

VERHANDELINGEN  
DER  
KONINKLIJKE AKADEMIE  
VAN  
WETENSCHAPPEN

---

EERSTE SECTIE

(Wiskunde - Natuurkunde - Scheikunde - Kristallenleer - Sterrenkunde -  
Weerkunde en Ingenieurswetenschappen)

---

DEEL III  
MET 7 PLATEN

---

AMSTERDAM · JOHANNES MÜLLER  
1896



# California Academy of Sciences

---

Presented by Koninklijke Akademie  
van Wetenschappen,  
Amsterdam.

January \_\_\_\_\_, 1907.









VERHANDELINGEN  
DER  
KONINKLIJKE AKADEMIE  
VAN  
WETENSCHAPPEN

---

EERSTE SECTIE

(Wiskunde - Natuurkunde - Scheikunde - Kristallenleer - Sterrenkunde -  
Weerkunde en Ingenieurswetenschappen)

---

DEEL III  
MET 7 PLATEN

---



13269

AMSTERDAM — JOHANNES MÜLLER

1896







# I N H O U D.

---

1. J. M. VAN BEMMELEN. Over de samenstelling, het voorkomen, en de vorming van Sideroze (witte clien) en van Vivianiet in de onderste darglaag der hoogveenen van Zuidoost Drenthe. Met 1 plaat.
  2. J. J. A. MULLER. De verplaatsing van eenige triangulatiepilaren in de residentie Tapanoeli (Sumatra) tengevolge van de aardbeving van 17 Mei 1892. Met 3 platen en 5 Bijlagen.
  3. W. KAPTEIJN. Over de merkwaardige punten van den driehoek.
  4. P. H. DOJES. Over de theorie der straling in verband met de voorstelling van Fourier.
  5. H. J. ZWIERS. Recherches sur l'orbite de la comète périodique de Holmes et sur les perturbations de son mouvement elliptique.
  6. E. MULDER. Over verbindingen afgeleid van wijnsteen zuur en parabrandig druiven zuur (6<sup>e</sup> verhandeling). — Over den nadeeligen invloed van zwavelig zuur der vlam van steenkool gas op de bepaling in hoeveelheid van eenige lichamen; en over een methode om daarin te voorzien.
  7. M. VAN OVEREEM JR. De merkwaardige punten van den ingeschreven veelhoek. Met 1 plaat.
  8. E. MULDER en J. HERINGA. Over een peroxy-salpeter zuur zilver (1<sup>ste</sup> verhandeling.)
  9. J. KLUYVER. Over een minimaal oppervlak van tweevoudigen samenhang. Met 2 platen.
-



Digitized by the Internet Archive  
in 2012 with funding from  
California Academy of Sciences Library

OVER  
DE SAMENSTELLING, HET VOORKOMEN, EN DE VORMING

VAN

SIDEROZE (WITTE KLIEN)

EN VAN

VIVIANIET

IN DE ONDERSTE DARGLAAG DER HOOGVEENEN  
VAN ZUIDOOST DRENTHE

DOOR

**J. M. VAN BEMMELEN.**

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL III. No. 1.

(MET ÉÉN PLAAT.)

---

AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
1895.





O V E R  
DE SAMENSTELLING, HET VOORKOMEN, EN DE VORMING

VAN

SIDEROZE (WITTE KLIEN)

EN VAN

V I V I A N I E T

IN DE ONDERSTE DARGLAAG DER HOOGVEENEN  
VAN ZUIDOOST DRENTHE

DOOR

**J. M. VAN BEMMELEN.**

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

**(EERSTE SECTIE.)**

**DEEL III. No. 1.**

**(MET ÉÉN PLAAT.)**

---

AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
1895.





## O V E R

de samenstelling, het voorkomen en de vorming van Sideroze (witte klien)  
en van Vivianiet in de onderste darglaag der Hoogveenen

### VAN ZUIDOOST DRENTHE

DOOR

**J. M. VAN BEMMELN.**

---

Een merkwaardige vorming in sommige onzer hoogveenen is eene opeenhooping van koolzuur ijzeroxydule, tot zoogenaamde nesten. Zij is bekend onder den naam van *witte klien*, in onderscheiding van de veenzelfstandigheid, die den naam van *blauwe klien* draagt. Daartusschen of daarbij komt ook vivianiet voor. Voor eenigen tijd met Prof. G. A. T. MOLENGRAAFF en Dr. J. W. Ch. GOEDHART die hoogveenen in den Zuidoosthoek van Drenthe bezoekende, was ik in de gelegenheid om het voorkomen van deze nesten witte klien ter plaatse zelve waar te nemen, en deze stof evenals het vivianiet en het moederveen te verzamelen en te ontleden <sup>1)</sup>.

#### I. SAMENSTELLING VAN DE WITTE KLIEN, HET VIVIANIET EN DE MOEDERVEENSTOF.

##### a. Witte klien.

De stof in geheel verschen toestand, derhalve vóór dat zij in aanraking met de lucht is geweest, is geheel wit (hoogstens geelachtig).

---

<sup>1)</sup> Hoewel het vraagstuk van het ontstaan ter onderzoek overblijft, zoo wensch ik de mededeeling, van hetgeen mijne waarnemingen geleerd hebben, niet langer uit te stellen, aangezien ik vermoedelijk niet weder in de gelegenheid zal komen die veenen te bezoeken, en aangezien de Heer MOLENGRAAFF door andere onderzoekingen vooreerst verhinderd is zijne onderzoekingen in onze hooge veenen tot eene zekere afsluiting te brengen. Ik zeg hem dank voor zijne welwillende mededeeling van verscheidene



Aan de lucht oxydeert zij zich zeer snel, zoodat de snijvlakten in het afgestoken veen eene vuurroode kleur vertoonen.

De verzamelde stof werd terstond onder water in eene goed gesloten flesch overgebracht en op die wijze vervoerd, om voor de analyse te dienen. Daardoor kon evenwel niet verhoed worden, dat eenige inwerking van de luchtzuurstof plaats had, en dus eene kleine hoeveelheid geoxydeerd werd en koolzuur verloor. De stof is gelei-achtig amorph, en bevat nog vele plantenvezeltjes ingemengd. De procentanalyse kon natuurlijk niet uitgevoerd worden, dan nadat de stof droog geworden en dus geoxydeerd was, en het koolzuur verloren had. In de nog met veel water vermengde stof kon alleen de aequivalent-verhouding tusschen ijzer en koolzuur bepaald worden. Eene zekere, ongewogene, hoeveelheid werd daarvoor uit de flesch genomen en ten snelste in den toestel van koolzuurbepaling overgebracht, waarna zonder verwijl die bepaling werd uitgevoerd. Het door een verdund zuur uitgedreven koolzuur werd door natronkalk opgeslurpt en alzoo gewogen; in de terugblijvende vloeistof werden ijzer en kalk bepaald. Van magnesia, alkalien kwamen slechts sporen voor, benevens 0.2%  $P_2O_5$ .

Analysen van de gedroogde en aan de lucht geoxydeerde stof.

Analyse I.		Watervrij berekend, in de veronderstelling dat Fe en Ca oorspronkelijk als carbonaten aanwezig waren.	
	%		%
$Fe_2O_3$	63.5	$FeCO_3$	88.3
$CaO$	1.4 <sup>5</sup>	$CaCO_3$	2.5 <sup>5</sup>
$P_2O_5$	0.2	$P_2O_5$	0.2
$SO_3$	0.4	$MgO$ , Alkaliën, $SO_3$	
$MgO$ en Alkaliën	0.2	en verlies	0.7 <sup>5</sup>
Plantenvezels	8.2	Plantenvezels	8.2
Water bij 100° uitgedreven	14.2		100.0
Water vaster gebonden en nog eenig $CO_2$	11.8 <sup>5</sup>		
	100.0		

waarnemingen omtrent de opvolging, afmeting en hoogteligging der veenlagen op verschillende plaatsen. Ook den Heer GOEDHART, die de afbeeldingen (zie Fig. 1—4) vervaardigd heeft, zeg ik dank voor de verleende hulp bij de opnemingen.

In drie andere analyses werd verkregen voor de:

Verhouding tusschen Fe, Ca, en CO<sub>3</sub>.

	Milligram Atomen (of Atoomgroepen).		
Analyse.	II.	III.	IV.
Fe	10.31	7.8	5.67
Ca	0.76	0.6	0.44
Som	11.07	8.4	6.11
CO <sub>3</sub>	10.30	7.4	5.5
Verschil = tekort aan koolzuur	0.77	1.0	0.6

waaruit blijkt, dat slechts een klein gedeelte,  $\pm \frac{1}{10}$ , van het koolzuur ijzeroxydule geoxydeerd was, en daardoor koolzuur verloren had. De oorspronkelijke stof mag dus beschouwd worden als te bestaan uit koolzuur ijzeroxydule, eenige koolzure kalk, en plantenvezels. De verhouding daarvan in gewicht is, volgens de vier analyses, wanneer het ijzer geheel als Fe CO<sub>3</sub> in rekening wordt gebracht:

	II.	III.	IV.	I.
Fe CO <sub>3</sub>	86.8 <sup>5</sup>	86.65	86.57	89.1
Ca CO <sub>3</sub>	5.5 <sup>2</sup>	5.75	5.80	2.6
Vezels	7.6 <sup>3</sup>	7.6	7.63	8.3
	100.—	100.—	100.—	100.—

De witte clien van het monster I is van eene andere plaats afkomstig dan die van de monsters II—IV. Van daar misschien dat er een klein verschil in het kalkgehalte is. Maar overigens bewijzen de analyses dat de stof van homogene samenstelling is. Opmerking verdient dat het phosphorzuurgehalte gering is, en dat dus deze monsters geen mengsel van sideroze en vivianiet zijn.

De na behandeling met verdund zoutzuur overblijvende vezels bestaan grootendeels uit plantenweefsel waarvan de bouw duidelijk zichtbaar is; parenchym, ring- en spiraalvaten enz. en overigens gehumificeerde plantenstof; slechts enkele lange kleurlooze buisvormige draaden — eene spaarzame kleine diatomee — overblijfselen van



ijzerbacterien kon ik niet waarnemen, maar ik moet dat onderzoek verder aan deskundigen overlaten.

De witte clien is alzoo voor bijna  $\frac{9}{10}$  eene amorphe geleachtige sideroze, met enkele procenten koolzure kalk en een scelet, als het ware, van plantenvezels.

### b. Vivianiet.

Op sommige plaatsen komt nevens de witte clien ook vivianiet voor, van grijsblauwe of blauwe kleur. De samenstelling van deze, in reeds droogen toestand aangetroffen stof is als volgt:

Analyse V en VI. Luchtdroog verliest de stof boven zwavelzuur 7.2 %					
Zwavelzuur-droog.		Na aftrek van 10 % water en 1.32 % bijkomende minerale bestanddeelen.			
			%	% Molekul.	Molekuul verhouding.
$\text{Fe}_2\text{O}_3$	36.10	$\text{Fe}_2\text{O}_3$	40.78	2.55	1.82 $\text{Fe}_2\text{O}_3$ of $\frac{3.64}{\text{FeO}}$
$\text{P}_2\text{O}_5$	17.57 (17.54 en 17.59)	$\text{P}_2\text{O}_5$	19.84	1.40	1 $\text{P}_2\text{O}_5$
$\text{SiO}_2$	0.31	Plantenvezels en water boven 100° gebonden	39.38		
Plantenvezels en op 100° teruggehouden water	34.88		100.—		
Water op 100° uitgedreven	10.13				
Oplosbare bestanddeelen en verlies	1.01				
	100.—				

Het onderzochte monster vivianiet bezit dus ook een scelet van plantenvezels, ongeveer  $\frac{4}{10}$  van het geheel. De verhouding van het Phosphorzuur tot het ijzer maakt aannemelijk, dat het oorspronkelijk is geweest:  $\text{P}_2\text{O}_5 \cdot 3 \text{FeO}$  nog gemengd met  $\text{FeCO}_3$ . Het is mij niet gelukt om het vivianiet nog in den oorspronkelijken toestand te vinden, te weten: nog ingesloten liggende in het onaangeroerde veen.

De Analyse der aan de lucht droog geworden en dus reeds geoxydeerde stof <sup>1)</sup> maakt het waarschijnlijk, dat zij oorspronkelijk bestaat

<sup>1)</sup> De bepaling van het ijzeroxydule is daarom, als betekenislloos, nagelaten.

uit  $P_2O_5$ . 3 (FeO) en  $FeOCO_2$ , en wel op 100 Molek. van het eerste 64 Molek. van het tweede. De samenstelling is dan:

$\pm 1\%$  bijkomende bestanddeelen

40 „ vezels	} het ijzer gebonden voor
60 „ ferrophosphaat en ferrocarbonaat	
	$\frac{2}{3}$ aan phosphorzuur
	$\frac{1}{3}$ aan koolzuur.

### c. De moederveenstof.

De vraag is nog belangrijk of het dargveen, waarin de sideroze en vivianiet voorkomen, meer of minder ijzer bevat dan de andere hoogveenlagen, en dan het veen in de laagveenen van het alluvium. Reeds aan de hoogroode kleur der asch, die de vuurtjes waarop de veenarbeiders water koken hadden achtergelaten, had ik kunnen waarnemen, dat dit dargveen rijker aan ijzer is dan de andere hoogveenlagen. De blauwe klie, die boven op de darglaag ligt, geeft witte asch, welke slechts een spoor ijzer bevat. De ligte fabrieksturf, en de zoogenaamde kolige turf evenzoo. Van sommige turfsoorten is de asch geelachtig. De analyse van de darg, die de nesten witte klie omsloot, bevestigt het betrekkelijk hooge ijzergehalte der asch:

Vochtigheid . . . . .	}	96.95
Organische stof . . . . .		
$Fe_2O_3$ . . . . .		1.8
Ca O . . . . .		0.55
MgO . . . . .		0.09
$P_2O_5$ . . . . .	}	0.09
$SO_3$ . . . . .		0.35
S* . . . . .		—
Alkalien en verlies . . . . .		0.17
		100.00

\* niet bepaald.

Ruim de helft van de 3% minerale bestanddeelen bestaat dus uit ijzeroxyde. In eene 4 M. dikke laag laagveen van Reeuwijk (nabij Gouda) vond ik vroeger:

	Op 1.3 M.	Op 2.7 M.
Zand en kleistof . . .	6.1	4.2
Organ. stof . . . . .	85.7	89.7
Zwavel . . . . .	1.3	1.0
Asch. . . . .	6.9	5.1
	100.0	100.0

In de 6,9 en 5,1 % aschdeelen (CaO, MgO, Alkalien,  $P_2O_5$ , Na Cl.), was aanwezig:

IJzeroxyde . . . . 0.5 | 0.4

dus slechts  $\frac{1}{13}$  van de minerale stoffen, en slechts  $\frac{1}{4}$  van de hoeveelheid in de darg van 't Emmer Compasuum.

Ten slotte zij opgemerkt, dat de darglaag, die de witte kliennesten bevat, op diluviaal zand rust. De bovenste laag van dit zand, waarop zich dus het veen gevormd heeft, draagt den naam van klip. Zij is een door ijzeroer en kiezelzuur versteend zand en grind, en sluit plantenstengels of wortels in; aan deze laatste laat zich op vele plaatsen vivianiet waarnemen, dat alzoo om en in de stengels afgezet is. De laag heeft 2—3 d.M. dikte.

## II. HET VOORKOMEN VAN DE WITTE KLIEN EN VIVIANIET.

De witte clien komt voor in de darglaag van de hoogveenvorming die zich uitstrekt oostelijk van den Hondsrug; hare aanwezigheid is tot nog toe algemeen in het Emmer Compasuum gestaafd. De veenen van het Emmer Compasuum grenzen westelijk aan de Runde. De teekeningen I en II geven eene voorstelling van de opvolging der veenlagen, ter plaatse waar ik eene reeks witte clien-nesten, versch doorgesneden, heb aangetroffen, en van een der nesten op iets grooter schaal. Het kaartje (III) geeft de plaatsen in de Emmer Compasuumveenen aan. Fig. IV is een voorbeeld van een boomstronk uit de zoogenaamde Stobbelaag boven de darg.

De grondslag onder het veen ligt hier op 14—15 M. A.P., terwijl die van den Hondsrug, op zijn hoogste punt ten zuiden van Nieuw-Dordrecht (daar, waar het Oranjekanaal begint, en het Hoogeveensterkanaal een stompen hoek maakt) 18—20 M. bedraagt. In zuidelijke richting van het Emmer Compasuum (naar het Zwarte meer toe) rijst die grondslag een paar Meters. In dit hoogere gedeelte, uit het Zwarte Meer, ontspringt dan ook de Runde en vloeit noordelijk en ten westen van het Emmer Compasuum. Uit dit alles mag dunkt mij afgeleid worden, dat de onderste veenlaag in het laagste en meest moerassige gedeelte gevormd is.

Op de kliplaag (zie boven) ligt 0.5 tot 1 M. dargveen, welks bovenvlak, voor zoover wij konden waarnemen, zich tamelijk horizontaal uitstrekt. Deze laag is uit vastere en zwaardere veenstof gevormd dan die der hoogeveensturf, en draagt dan ook den naam van darg; zij gelijkt meer op de baggerturf. De darg is de naam



die gewoonlijk aan de veenlagen gegeven wordt, welke in Groningen onder of tusschen de kleilagen ligt, en evenzoo eene vaste dichte turf vormt. Dit alles maakt het aannemelijk, dat deze laag zoo niet in water dan toch in een moeras ontstaan is op eene wijze die van de vorming van vele laagveenen weinig verschilt of wel daarmede overeenkomt.

Slechts in deze darglaag zijn, voorzoover mij bekend, de witte klier-nesten gevonden, en waarschijnlijk ook de ophooping van vivianiet.

Boven op deze darglaag heeft een bosch van kienhout(?) gestaan, want in de veenlaag die zich ter dikte van 3—4 d.M. daarboven uitstrekt, zijn tal van boomstompen met wortels ingesloten.

De derde laag, de blauwe klier, is eene echte hoogveen-vorming waarvan beste steekturf bereid wordt. De vorming van deze veenlaag heeft waarschijnlijk het bosch doen ondergaan.

Boven dezelve is de jongste laag gelegen, die van het gewone grauwe of mos-veen. In zuid-noordelijke richting werden de volgende drie profielen waargenomen (zie *a*, *b*, *c*, op de kaart), en op grooteren afstand van deze een profiel (*p*) bij het Zwarte meer. *k*, *k*, zijn plaatsen waar onder anderen nesten van witte klier en *v*, *v*, plaatsen waar onder anderen vivianiet is waargenomen.

	Dikte der lagen in Meters				
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>		<i>p</i>
Grauw veen	1.1	0.4	0.75	Grauw	0.8
Blauwe klier	1.4	0.8	0.3	Lichtveen*)	2.0
Stobbelaag	0.4	0.3	0.25	Stobbelaag	± 0.3
Darg	0.5	0.95	1.0	Darg	0.8
	Som 3.4	Som 2.45	Som 2.3		Som 3.9
Kliplaag		± 0.1 <sup>5</sup>			
Diluv. zandvorming aanvangende <sup>1)</sup> op ongeveer	14.6 M.	14.2 M.	13.2 M.	*) Zoogenaam- de fabrieks- turf.	15.5

De water-  
spiegel bij  
*b* is in de  
teekening  
aangege-  
ven.

De insnijding in het veen, die bij *b* had plaats gehad en waar wij de nesten witte klier konden waarnemen, had eene lengte van ruim 50 M., eene breedte van ± 25 M. en eene hoogte van 2,3 M.

<sup>1)</sup> Volgens de bepalingen van den Heer MOLENGRAAFF.

In dien wand waren verscheidene nesten zichtbaar zooals er drie geteekend zijn over eene lengte van vier meters (Fig. 1). Verder in oostelijke richting ontbraken zij, evenals in den zuidelijken wand der opening.

De afmetingen der nesten zijn zeer verschillend, en bovendien zeer onregelmatig, omdat zij eigenlijk uit eene reeks van nesten of van met elkander vertakte gedeelten of aders bestaan zooals de teekening aanwijst; ruw genomen, was, van de grootste nesten (of nest-ophoopingën).

de hoogte 1 tot  $2\frac{1}{2}$  d.M.

de lengte (oostwest)  $\frac{1}{2}$  tot  $1\frac{1}{2}$  Meter

de lengte (noordzuid) ook  $\frac{1}{2}$  tot  $\pm 1\frac{1}{2}$  Meter.

De laatste afmeting werd niet gemeten maar mocht uit de in het gat liggende turven en ook uit andere profielen, in het voorbijgaan waargenomen, afgeleid worden.

Het is merkwaardig om de turven waar te nemen die hier ter plaatse gestoken zijn, en welke gedeeltelijk uit veen, gedeeltelijk uit vuurrood geworden witte clien bestaat. De laatste is vrij scherp van de darg afgescheiden, en aangezien de beide deelen zich ongelijk bij de indrooging samentrekken heeft de turf dezen vorm



een rooden en een zwarten boog.

Dat plekken witte clien veelvuldig in dit Emmer Compasuum voorkomen, heb ik bij *k*, *k* enz. waargenomen langs eene afgraving. Telkens kwamen de roode vlammen in de onderste darglaag<sup>1)</sup> in het gezicht.

Het vivianiet komt evenzoo opgehoopt voor, maar ik heb dit niet op de oorspronkelijke plaats, dus nog in het moederveen liggende, waargenomen; alleen aan reeds droog geworden turven die voor korten tijd uit de darglaag gestoken waren en opgestapeld lagen. Daaruit liet zich afleiden, dat zij nevens of in de witte clien voorkomt, dikwijls in of aan stengels en wortelstukjes. De Heer MOLENGRAAFF bezit een monster waarin eenige veentakjes helder blauw tegen de rood geworden massa der sideroze afsteken. Evenzoo heb ik in de kliplaag tusschen de zand- en oerdeeltjes, stengels en wortels waargenomen, die door vivianiet blauw gekleurd waren. De kern der stengelstjes is in vivianiet overgegaan; zij hebben tot banen gediend, waarlangs het vivianiet zich heeft afgezet. Maar ook dikwijls komen afzonderlijke plekken vivianiet in de darg voor, en schijnt het dat een gedeelte witte clien in vivianiet is omgezet.

<sup>1)</sup> Dr. A. BORGMAN zegt in zijne Dissert. Inaug (1890) over „De Hoogveenen in Nederland”: de witte clien is kenschetsend voor de veenen in zuid-oostelijk Drenthe.

In het Emmer Compaseuum werd zij op vele plaatsen aangetroffen, en evenzoo nam de Heer MOLENGRAAFF vivianiet en oer waar op de afgeveende gronden bij Roswinkel, zoodat men daaruit mag besluiten dat zij algemeen in de onderste darglaag voorkomt, die zich ongetwijfeld in deze streek tot Roswinkel uitstrekt.

De grenzen dezer darglaag zijn nog niet bepaald, doch zullen vermoedelijk beantwoorden aan den lager gelegen diluvialen grondslag ten oosten van den Hondsrug, zoo als boven aangegeven is <sup>1)</sup>. Evenmin zijn de grenzen van het voorkomen der witte clien- en vivianiet-nesten bepaald.

### III. DE OORZAKEN DER VORMING.

In de lager gelegen streek, waarschijnlijk eene kom ten opzichte van de omliggende hoogere terreinen, moet dus het dargveen gevormd zijn, en *in dit moeras* is de beweging van het ijzer aanzienlijk geweest. Daarvoor pleiten: 1<sup>o</sup> het oer en het vivianiet in de kliplaag, 2<sup>o</sup> de nesten witte clien en vivianiet in de darglaag, 3<sup>o</sup> het betrekkelijk hooge ijzergehalte van de darg zelve.

Tegenover deze verschijnselen van ophooping gevoelt men terstond, dat de oude en geheel algemeen gehouden verklaring — 1<sup>o</sup> reductie van ijzeroxyde door invloed van de tot humus overgaande plantensterfstof tot koolzuur ijzeroxydule, 2<sup>o</sup> de oplossing dezer stof in koolzuur houdend water, 3<sup>o</sup> de wederafzetting onder den invloed van toetredende luchtzuurstof als oer — geheel onvoldoende is.

Ten eerste moeten de oorzaken gevonden worden, waardoor zoo veel ijzer in oplossing *aangevoerd* is, en langs welke *banen* zulks heeft plaats gehad. Ten tweede moeten de oorzaken opgespoord worden, die de afzetting, en dus de *opeenhooping* van dat ijzer in den vorm van geleiachtige sideroze en van vivianiet op *bepaalde plekken* teweeg hebben gebracht. In korte woorden: de oorzaken en de banen van aanvoer, van omzetting en afzetting op bepaalde plekken.

Ofschoon het nu ver daarvan verwijderd is, dat die oorzaken gevonden zijn, zoo zij het mij toch vergund op eenige vragen te wijzen, die met het oog op eene toekomstige verklaring kunnen gesteld worden.

Dewijl de veenlaag, die de witte clien bevat, in zijn geheel meer ijzer bevat dan de veenlagen die er boven liggen, en de veenlagen

---

<sup>1)</sup> Bij Nieuw-Dordrecht bijv. komt geen darg voor.



die verderop in het Emmerveen voorkomen, zoo moet dit van elders aangevoerd zijn. Aangezien nu de grondslag van de veenen van 't Emmer Compascuum lager is dan die van het omringende terrein, zoo ligt het voor de hand om de waarschijnlijkheid aan te nemen dat de aanvoer van het ijzer heeft plaats gehad uit de omringende hoogere zandgronden?

Moeten de banen van aanvoer in den ondergrond gezocht worden? Onder de kliplaag is loopzand waargenomen. Of is het opgeloste ijzer (als zuur koolzuur ijzeroxydule) door het bovenwater aangevoerd, dus van boven af in de veenlagen gedrongen, en onder den invloed der veenvorming daaruit teruggehouden?

Is de witte clien tegelijkertijd met het veen ontstaan, of later in het reeds bestaande veen gevormd, vóór of na de bedekking met de later daarop gevormde veenlagen? Is eerst door de eene of andere oorzaak het aangevoerde opgeloste zure koolzuur ijzeroxydule teruggehouden en na oxydatie opgehoopt als ijzeroxyde, en daarna door eene tweede oorzaak weder herleid tot onoplosbaar koolzuurijzer oxydule? Of is op de plaats zelve dadelijk koolzuur ijzeroxydule gevormd?

Die vragen hangen nauw samen met die naar het agens, hetwelk de ophooping en de oxydatien of reductien bewerkt heeft.

De vraag rijst natuurlijk, of hierbij organismen in 't spel zijn geweest. Mocht men die aannemen, dan zoude men misschien tot eene verklaring kunnen komen van het merkwaardige feit dat onregelmatige holten van verschillende grootte en met vertakkingen, die zich als het ware in aderen uitbreiden — men zie de teekening — midden in de veenlaag gevuld zijn met de witte clien, en dat deze stof slechts  $\frac{1}{10}$  aan veenvezeltjes bezit. Het beeld dringt zich op van eene kolonie van organismen die zich heeft uitgebreid, die ijzer heeft opgenomen en weder afgezet, en die daarbij het veen heeft verdrongen of wellicht verteerd (zoodat slechts wat vezeltjes zijn overgebleven). Doch ook dan blijft de vraag: is die vorming eene gelijktijdige van de veenvorming, of is het ijzeroxyde het eerste product? en is dat eerst later, nadat de veenlaag geheel van de lucht was afgesloten geworden, weder tot koolzuur ijzeroxydule herleid? Zooals ik boven heb medegedeeld kon ik geene overblijfselen van ijzerbacterien in de witte clien ontdekken; is die waarneming juist, dan zoude dus voor bovenstaande hypothese daaruit volgen, dat deze organismen weder later verteerd zijn, en hun product (het ijzeroxyde) tot sideroze herleid is.

Ook de vivianiet-vorming, in haar verband met de siderozevorming, moet verklaard worden. Voor die vorming zijn organismen noodig,

dierlijke weeke deelen en schelpen, hoorns of pantsers, die het phosphorzuur geleverd hebben. Nu is het dierlijk leven in de veenen, in zekere tijdperken harer vorming, rijkelijk aanwezig, en volgens onze onderstelling is de witte klien- en vivianiethoudende laag eene laagveenvorming <sup>1)</sup>. De phosphorzure kalk der organismen is, zooals bekend, hun *bestendigste* bestanddeel, bestendiger nog dan de koolzure kalk. Het ontstaan van phosphorzure kalklagen uit koraalkalk en andere kalksteen is daarvan het bewijs. Deze phosphorzure kalk kan zich met de sideroze hebben omgezet in vivianiet; ook de phosphorzure ammoniak, die bij de langzame ontbinding van dierlijke overblijfselen ontstaat, kan zulks bewerkt hebben <sup>2)</sup>. Ik acht het niet onwaarschijnlijk, dat de vivianiet door enkel scheikundige metamorphose (zonder behulp van organismen) later ontstaan is uit sideroze en de phosphorzure kalk welke de dieren hebben achtergelaten, die in dit lage veen bij deszelfs vorming geleefd hebben.

Wat nu de sideroze zelve betreft, voorzoover mij bekend is nog geen onderzoek verricht, waaruit zou blijken dat de omzetting van ijzeroxyde tot koolzuur ijzeroxydule aan de werking van organismen toe te schrijven ware <sup>3)</sup>. Daarentegen is het wel bewezen dat het ijzer onder den invloed van organismen plaatselijk *opgehoopt* wordt, en wel door de ijzerhoudende Leptothrix en Crenothrix (als ijzerbacterien bekend). Zij behooren tot de laagste levensvormen van de Algen of Zwammen. Het is gestaafd, dat deze organismen in den bodem en in het water leven, zelfs tot 20 Meters diepte. Zij worden ook in grondwater-leidingsbuizen aangetroffen <sup>4)</sup>. Zij hoopen het ijzer, dat als zuur koolzuur ijzeroxydule in het water des bodems opgelost is (en dus in het water der grondwaterleidingen aangevoerd wordt) in hunne geleiachtige schede op, en wel in hoeveelheden, die zeer groot zijn in vergelijking tot het gewicht der draden.

---

1) De Heer MOLENGRAAFF heeft mij medegedeeld, dat hij op de eilandjes der veenplassen bij Kortenhoef somtijds ware riffen van Dreissenia polymorpha gezien heeft, die met hunne baarddraden aaneengehecht dichte kluwens vormen, welke aan stengels en wortels zijn vastgehecht.

2) GAUTIER (C. R. 1893 126 1274, 1491 maakt op deze omzettingen opmerkzaam. Hij heeft *gekrystalliseerde* sideroze van de Pyreneën door behandeling gedurende 200 uren, bij 83°, met Ammoniumphosphaat omgezet in  $P_2O_5$ . 3 (FeO). 6 (H<sub>2</sub>O). Het witte of groenachtige vivianiet in de natuur heeft volgens GAUTIER de samenstelling  $P_2O_5$ . 3 (FeO). 8 H<sub>2</sub>O.

3) Ik werd hierin bevestigd door eene mondelinge mededeeling van Dr. BEYERINCK.

4) Zie BAKHUIS ROOZEBOOM. Onderzoek der Arnhemsche Waterleiding 1892.

Als zij in van de lucht afgesloten staalwaters aanwezig zijn, trekken zij allengs al het ijzer tot zich, hetgeen zich als ijzeroxyde op den bodem van het vat verzamelt <sup>1)</sup>. In ijzerhoudende minerale wateren vond TOLOMEI steeds ijzerbacteriën (bijv. *Leptothrix ochracea* Kützing). Over de chemische werkingen, die daarbij in 't spel zijn, heerscht geene eenstemmigheid. WINOGRADSKY <sup>2)</sup> nam aan, dat zij in het protoplasma het opgenomen FeO tot Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> oxydeeren. MOLISCH <sup>3)</sup> daarentegen heeft geen ijzer in het protoplasma waargenomen, maar meent dat het ijzer in het geleiachtig omhulsel der cellen wordt opgezameld, en dat de oxydatie van het oxydule tot oxyde een secundair verschijnsel is.

Het blijkt dus dat de *stofwisseling*, welke het ijzer in de ijzerorganismen (bacterien of splijtzwammen) ondergaat nog niet tot klaarheid is gebracht maar een geheel nieuw onderzoek vereischt <sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> TOLOMEI Zeitschrift f. anorg. Ch. 5. 102.

<sup>2)</sup> Bot. Zeit. 1888. 260.

<sup>3)</sup> Die Pflanzen in ihren Beziehungen zum Eisen. Jena 1892.

<sup>4)</sup> Belangrijk schijnt mij eene waarneming toe, die de Heer N. VAN DER SLEEN onlangs heeft gedaan, en mij welwillend medegedeeld.

Eene proefput van de Amsterdamsche waterleiding, in een duinterrein aan den Zandvoortschen straatweg, werd aldus ingericht. Ter diepte van  $\pm 12$  meters beneden het terrein werd eene ijzeren, van onderen met gaten doorboorde pompbuis geplaatst (middellijn 1 d.M. inwendig). Deze pompbuis was omgeven, eerst door eene laag grind, vervolgens door eene laag grof zand en ten laatste door eene laag fijn zand. (De gezamenlijke middellijn dezer kokers 6 d.M.).

In de pompbuis was eene zinken peilbuis afgelaten (middellijn 0.4 d.M.) van onderen voorzien met een emmertje (lengte 2 d.M.) dat aan de wanden der pompbuis aansloot, om als zandvanger dienst te doen. Ter hoogte van  $\pm 3$  d.M. boven het terrein was de pompbuis omgebogen, en voerde naar eene zuig- en perspomp op  $\pm 2$  M. afstand, die 40 M<sup>3</sup>. in het etmaal oppompte. Kort achter deze bocht was een goed sluitend kraantje aangebracht, waaruit bij het pompen water kon afgelaten worden, onder volkomen afsluiting der buitenlucht. Nadat de pomp 14 dagen onafgebroken, dag en nacht door, in werking was gehouden, werd de put geopend en de peilbuis opgehaald. Bij *onmiddellijke* waarneming bleek, dat deze van buiten over hare geheele lengte bedekt was met eene eenigzins slijmerige *rood-bruine* stof, op sommige plaatsen ter dikte van meer dan 5 m.M. Het emmertje was met diezelfde stof (en water) geheel gevuld en bevatte bijna geen zand.

De bruinroode stof was weinig samenhangend en was ook *inwendig geheel bruinrood*. Bij het blootstellen aan de lucht werd zij niet merkbaar rooder.

Deze proef (na 14 dagen onafgebroken pompen) is nog tweemaal herhaald met dezelfde uitkomst. Vóór het buitenwerkingstellen der pomp werd eerst eene hoeveelheid water, met alle mogelijke voorzorgen tegen de toetreding van lucht, voor de analyse verzameld. De roodbruine slijmerige stof bestond hoofdzakelijk uit ijzeroxyde en *Leptothrix ochracea*.



Evenwel staat het vast dat deze organismen het ijzer terughouden en is daarmede eene mogelijke oorzaak van ophooping gevonden, zelfs op aanmerkelijke diepte in den bodem, en bij afsluiting van lucht. Het is dus wenschelijk in die lage- en moerasveenen, waar het grondwater ijzerhoudend is, naar deze organismen te zoeken, en als zij gevonden zijn, hunne wijze van uitbreiding na te speuren.

Mocht het blijken dat deze oorzaak van ophooping de juiste is, dan zou daaruit volgen, dat de vorming van witte clien uit dat ijzeroxyde eene secundaire werking is, (in een alkalisch medium),

De samenstelling blijkt uit de volgende analyses.

	De roodbruine stof.	Het Water.		Kleur en reukloos helder.
	%	m. Gr. in den Liter		
$\text{Fe}_2\text{O}_3$	71.6	$\text{Fe}_2\text{O}_3$	8.6	Geheel als zuur $\text{FeO}$ . $\text{CO}_2$ aanwezig.
Gloeiverlies	18.7	$\text{Ca CO}_3$	196.4	
$\text{Ca CO}_3$	2.7	$\text{Ca SO}_4$	184.2	
$\text{Fe S}$	0.8	$\text{Na Cl}$	87.8	
$\text{Zn O}$	3.5	$\text{NH}_3$ (albuminoid)	0 10 <sup>7</sup>	
Zand	2.4	$\text{NH}_3$	0.48 <sup>7</sup>	
	99.7	$\text{N}_2\text{O}_5$	0 0	
In het emmertje alleen bevond zich ongeveer 80 Gram vaste stof.		$\text{N}_2\text{O}_3$	0.0	
		Gloeiverlies	27.4	
		Overige bestandd.	± 14.6	
			519 6 m.Gr.	
		Zuurstofgehalte	0	
		Koolzuur	niet bepaald.	

Uit deze proef moet dus afgeleid worden, dat de *Leptothrix* uit zuurstofvrij water *ijzeroxydule* had opgenomen, en dat dit als *ijzeroxyde* werd teruggevonden. Kan men nu wel aannemen dat onder die omstandigheden de luchtzuurstof *ijzeroxydule* tot oxyde heeft gemaakt? Volgens den Heer VAN DER SLEEN kon bij deze proef volstrekt geene luchtzuurstof tot de pompbuis of het emmertje doordringen.

Het water was dan ook zuurstofvrij en nevens het *ijzeroxyde* is eenig zwavelijzer gevonden — een reductieproduct van eene anaerobiebacterie, zooals Dr. BEYERINCK onlangs bewezen heeft.

Zoo pleit dan deze proef voor de meening dat het ijzer, hetwelk door de *Leptothrix ochracea* als zuur- koolzuur *ijzeroxydule* wordt opgenomen, als *ijzeroxyde* weder wordt afgescheiden.

die later in het afgesloten veen zonder medewerking van organismen heeft plaats gehad, evenals zulks het geval is bij de vorming van vivianiet nevens de sideroze, uit de overblijfselen der weeke deelen en schelpen of pantsers van andere organismen welke op die plaatsen geleefd hebben.

Intusschen zijn door dit onderzoek de volgende uitkomsten verkregen:

De witte klier is eene amorphe sterk waterhoudende sideroze van bijna 90% Ferrocarbonaat met enkele % Calcium Carbonaat, en 10% plantenvezels.

Zij komt voor in adervormige nesten van hoogstens  $1\frac{1}{2}$  M. lengte en breedte en 1—3 decimeters dikte, in eene onderste veenlaag (de darg) die tot de laagveenvorming in de hoogveenen van Zuid-Oost Drenthe behoort. Het moederveen zelf is rijker aan ijzeroxyde dan de overige lagen in het hoogveen, en dan de laagveenen in 't algemeen. De darglaag ligt in een lager gelegen gedeelte van het diluvium. Nevens en in de sideroze komt veel vivianiet voor, op eene wijze die voor eene metamorphose van sideroze in vivianiet pleit.

Een nader onderzoek van de hoogte van den diluvialen grondslag in de verschillende deelen van het groote Bargerveen, van de dikte, hoedanigheid en samenstelling der verschillende veenlagen, en van derzelve grenzen, is zeer gewenscht. Men vergete niet dat de verklaring van de vorming onzer hoogveenen, ook na den arbeid van Dr. LORÉ, Dr. BORGMAN, en anderen nog zeer onvolkomen is en uitgebreide onderzoekingen vereischt.

*Leiden, Anorgan. Chem. Labor. der Univ.*

Juni 1894.

---



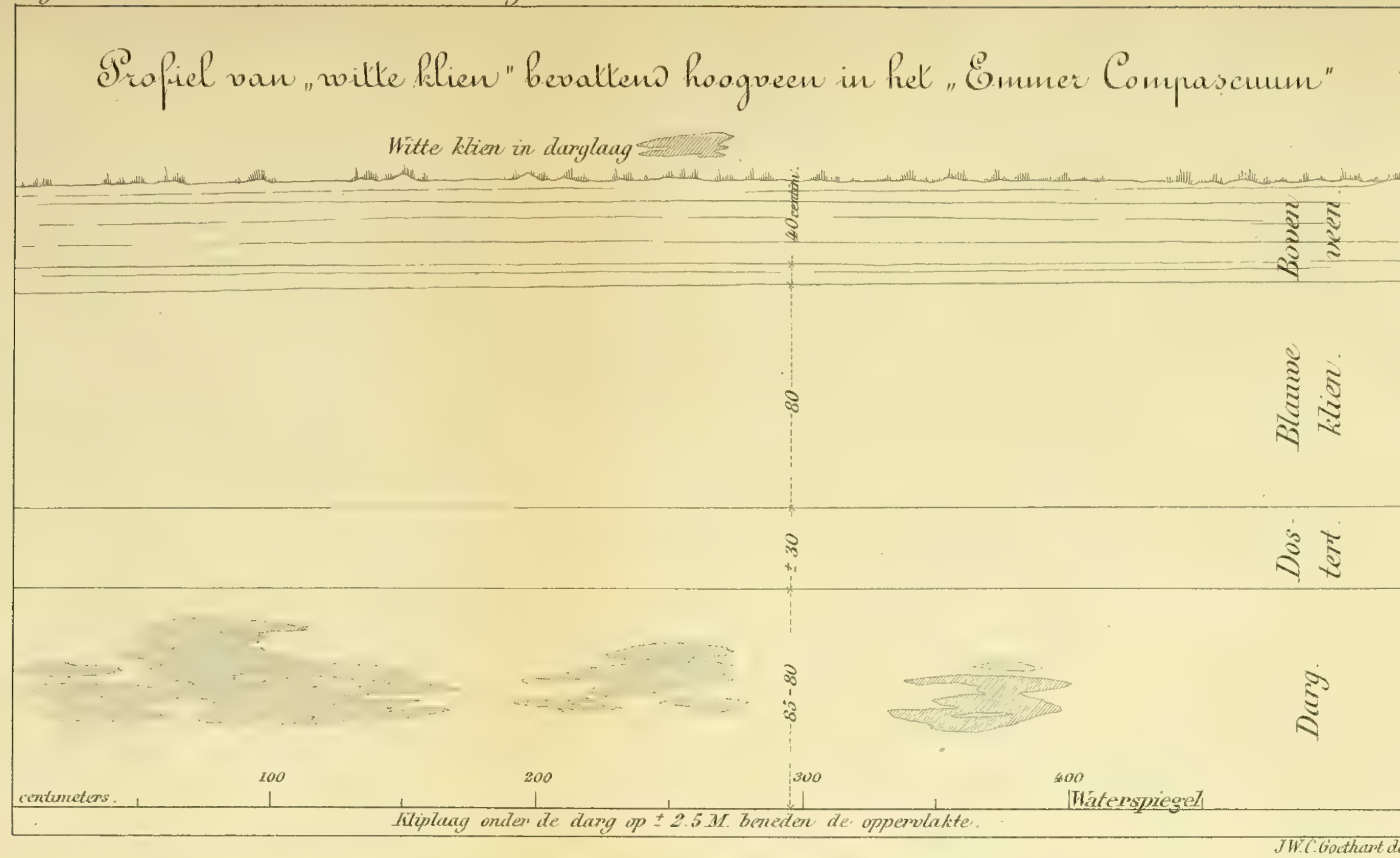
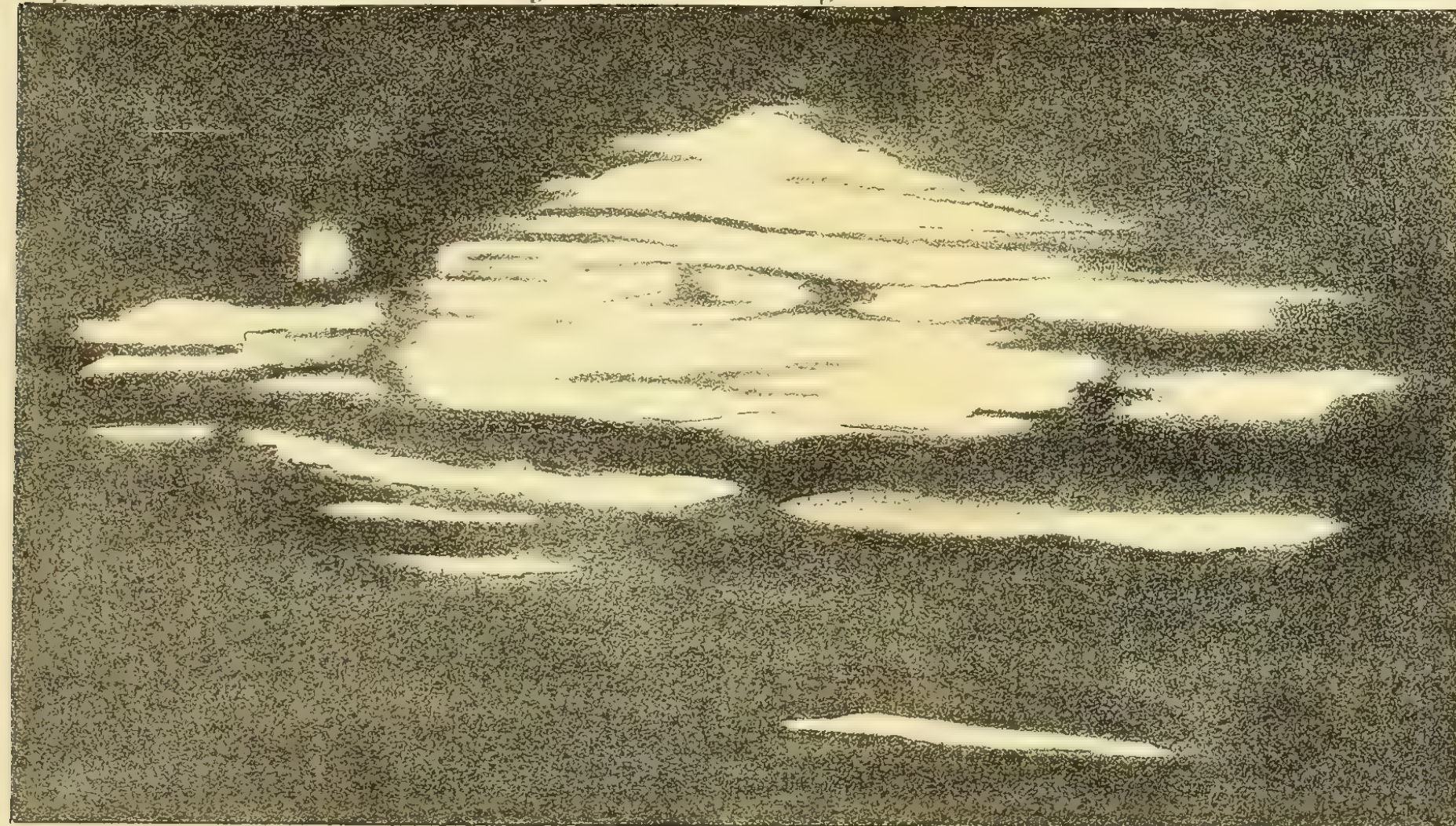


Fig. 2. Een nest van witte kien: ongeveer  $\frac{1}{10}$  van de ware grootte.



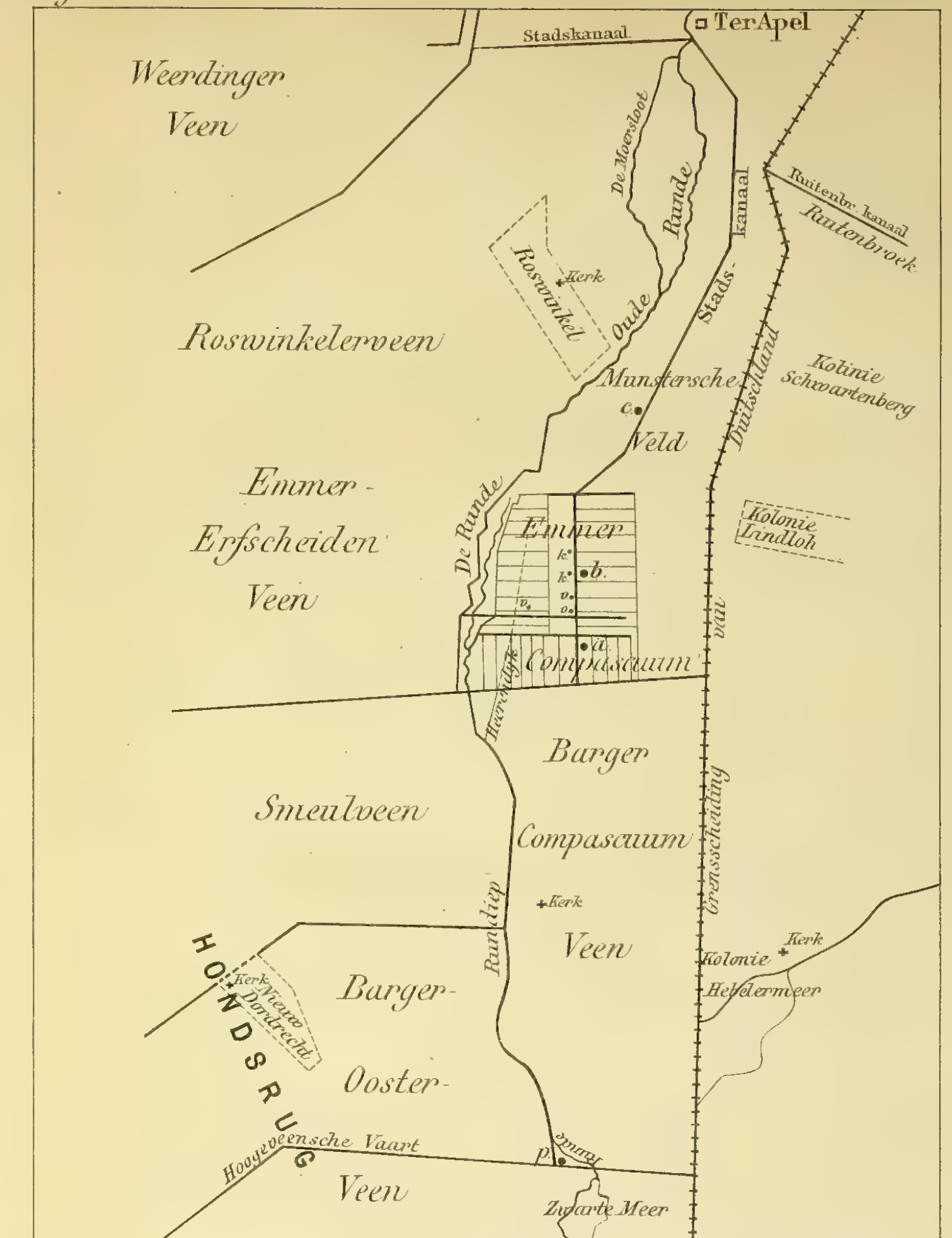
J.W.C. Goethart del.

Fig. 4.



J.W.C. Goethart del.

Fig. 3



a. b. c. p. Plaatsen waar het bodemprofiel is onderzocht. (blad. 9.)

k. Witte kien.

v. Vivianië.

De Runde is gedeeltelijk tot een Diep vergraven, zoo als uit de teekening van den loop te zien is.

Alleen in het Emmer-Compasuum zijn de indeelingen geteekend die bij het afveenen gevolgd worden.





DE VERPLAATSING  
VAN EENIGE  
TRIANGULATIE-PILAREN

IN DE  
Residentie TAPANOELI (Sumatra)

TENGEVOLGE  
VAN DE AARDBEVING VAN 17 MEI 1892.

DOOR  
J. J. A. MÜLLER.

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL III. No. 2.

Met 3 Platen en 5 Bijlagen.

---

AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
1895.





DE VERPLAATSING  
VAN EENIGE  
**TRIANGULATIE-PILAREN**

IN DE  
Residentie TAPANOELI (Sumatra)

TENGEVOLGE  
VAN DE AARDBEVING VAN 17 MEI 1892.

DOOR  
**J. J. A. MULLER.**

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

**(EERSTE SECTIE.)**

**DEEL III. No. 2.**

**Met 3 Platen en 5 Bijlagen.**

---

AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
1895.



# De verplaatsing van eenige Triangulatie-Pilaren in de Residentie Tapanoeli (Sumatra) tengevolge van de aardbeving van 17 Mei 1892

DOOR

J. J. A. M U L L E R.

---

Den 17<sup>en</sup> Mei 1892, des avonds omstreeks 8 uur, had er in de Noordelijke helft van *Sumatra* een aardbeving plaats, die zelfs in een deel van het Schiereiland *Malaka* werd gevoeld, doch het meest de landstreken teisterde gelegen tusschen den *Dolok Loeboek Raja* en den *Goenoeng Talamau (Ophir)*. Zij ging gepaard met een sterk golvende beweging van den grond, waardoor de steenen gebouwen ter hoofdplaats *Padang Si Dimpoewan*, zooveel schade leden, dat zij meerendeels moesten worden afgebroken, terwijl op verschillende plaatsen houten gebouwen, op steenen neuten of houten stempels geplaatst, van hunne steunpunten werden afgeworpen.

In het gebergte hadden op talrijke plaatsen zeer belangrijke afstortingen plaats. In hooge mate was dit onder anderen het geval nabij den top en langs de hellingen van den *Sorik Marapi*, een 2145 M. hoogen vulkaan <sup>1)</sup>, gelegen in de onderafdeeling *Groot Mandailing* en *Batang Natar* der residentie *Tapanoeli*, welke met de voornaamste nabijgelegen bergtoppen en ruggen op de schetskaart (plaat I figuur 1) is aangegeven, aan welks voet de hoeta *Si Banggor* geheel werd bedolven. Het was daarom te vreezen, dat de triangulatie-pilaar, op het hoogste punt van den kraterwand opgericht, zou zijn verdwenen. Bij onderzoek bleek dit evenwel niet het geval te zijn, maar een afstorting naar de binnenzijde van den krater reikte tot zeer dicht bij den voet van den pilaar, en er vertoonde zich daar een diepe scheur, zoodat men kon verwachten, dat

---

<sup>1)</sup> De hoogte van 1788 M., opgegeven op de kaart van Midden-*Sumatra* in den *Atlas van Ned.-Indië* van STEMFOORT en TEN SIETHOFF, waar de berg ook verkeerdelyk *Seret Berapi* is genoemd, is onjuist.



de pilaar, die overigens nog zuiver te lood stond, te eeniger tijd in de diepte zou neerstorten.

Daarom werd in de maand Juli op ongeveer drie Meter van den ouden pilaar — meer liet de smalle rug niet toe — een nieuwe opgericht, welks bovenvlak gelijk kwam met dat van den eersten. Beide pilaren zijn, evenals op de overige punten der eerste en tweede orde, 1,50 M. hoog boven het maaiveld en 0,50 M. in het vierkant, gegoten van beton op een stevige fundeering, en op het bovenvlak voorzien van een vierkante ijzeren dook met ingevijld kruis, tot centreering van het instrument en bevestiging van den heliotroop. De elementen voor de centreering werden nauwkeurig bepaald, ten einde de reeds op verschillende stations uitgevoerde metingen, betrekking hebbende op den ouden pilaar, tot den nieuwen te kunnen herleiden.

In de maand Augustus werden de hoekmetingen op het station *Sorik Marapi* uitgevoerd, waarbij het instrument op den nieuwen pilaar was opgesteld.

Het punt *Sorik Marapi* S. 59 zou gezamenlijk met de punten *Sopo Oentjim* S. 63 en *Tor Si Hite* S. 80 worden vastgelegd aan de punten der eerste orde *Dolok Toedjoe* P. 37, *Goenoeng Malintang* P. 41 en *Dolok Maleja* P. 51 (zie plaat II, figuur 3). De hiervoor noodige metingen op de stations *D. Toedjoe*, *D. Maleja* en *Tor Si Hite* waren reeds vóór de aardbeving uitgevoerd. Na herleiding tot den nieuwen pilaar op den *Sorik Marapi* gaven de eerst verkregen hoeken met de resultaten der hoekmetingen, op dit laatste station na de aardbeving uitgevoerd, zulke groote sluitingsfouten der driehoeken, dat deze onmogelijk aan de toevallige fouten der metingen konden worden toegeschreven.

Al spoedig rees het vermoeden, dat de oude pilaar op den *Sorik Marapi* tengevolge van de aardbeving een verschuiving zou hebben ondergaan. Op de stations *D. Toedjoe*, *D. Maleja* en *Tor Si Hite* werden daarom voor de tweede maal metingen uitgevoerd, door welke dat vermoeden werd bevestigd, terwijl tevens bleek dat ook de pilaar op *G. Malintang* van plaats moest zijn veranderd; voor de vastlegging der punten werd daarom in plaats van den *G. Malintang* de *Dolok Si Dohar Dohar* in het net opgenomen (zie plaat II, fig. 4).

De vóór de aardbeving uitgevoerde metingen waren reeds voldoende voor de vastlegging der drie punten van de tweede orde; voor de vereffening werd daarbij de methode der indirecte waarnemingen toegepast, waarbij de coördinaten der punten als de onbekenden der normaalvergelijkingen worden aangenomen. Die coördinaten hebben betrekking op de conforme kegelvormige projectie; de

middenassen zijn gelegen op  $0^{\circ}50'$  N.B., en op  $0^{\circ}50'$  W.L. van den Meridiaan gaande over het Westelijk uiteinde der basis nabij *Padang*, welke als uitgang voor het tellen der lengten op *Sumatra* is aangenomen. De gemeten hoeken werden voor de uitvoering der vereffening door het aanbrengen van kleine reducties tot het platte vlak herleid.

Voor de coördinaten werden de navolgende waarden, in Meters, verkregen :

*Sorik Marapi*. S. 59 (oude pilaar)

$$x = + 376,47 \qquad y = - 16433,38.$$

*Sopo Oentjim*. S. 63

$$x = + 25812,04 \qquad y = + 2851,91.$$

*Tor Si Hite*. S. 80

$$x = + 11594,50 \qquad y = - 7295,60.$$

Op volkomen dezelfde wijze werden met de na de aardbeving verkregen resultaten de coördinaten van den nieuwen pilaar op den *Sorik Marapi*, die van de pilaren *Sopo Oentjim* en *Tor Si Hite* en bovendien nog van den pilaar op den *G. Malintang* berekend. Daarvoor werd gevonden :

*Sorik Marapi*. S. 59 (nieuwe pilaar)

$$x = + 375,03 \qquad y = - 16429,58.$$

*Sopo Oentjim*. S. 63

$$x = + 25812,06 \qquad y = + 2851,98.$$

*Tor Si Hite*. S. 80

$$x = + 11594,83 \qquad y = - 7296,15.$$

*G. Malintang*. P. 41

$$x = + 12843,54 \qquad y = - 39548,41.$$

De uit de elementen der centreering afgeleide reducties voor de berekening der coördinaten van den ouden pilaar op den *Dolok Sorik Marapi* zijn :

$$\text{red. } x = + 1,12 \qquad \text{red. } y = - 2,61.$$

De coördinaten na de aardbeving zijn dus :

*Sorik Marapi.* S. 59 (oude pilaar)

$$x = + 376,15 \qquad y = - 16432,19.$$

De coördinaten van den *G. Malintang* P. 41, vóór de aardbeving zijn verder :

$$x = + 12844,56 \qquad y = - 39549,11.$$

De resultaten der metingen en de voornaamste cijfers der beide vereffeningen, waaruit de opgegeven waarden zijn afgeleid zijn medegedeeld in de bijlagen I, II en III.

De waarden, verkregen na de aardbeving, verschillen met die, verkregen vóór de aardbeving, de volgende bedragen :

*Sorik Marapi.* S. 59 (oude pilaar)

$$\Delta x = - 0,32 \qquad \Delta y = + 1,19.$$

*Sopo Oentjim.* S. 63

$$\Delta x = + 0,02 \qquad \Delta y = + 0,07.$$

*Tor Si Hite.* S. 80

$$\Delta x = + 0,33 \qquad \Delta y = - 0,55.$$

*G. Malintang.* P. 41.

$$\Delta x = - 1,02 \qquad \Delta y = + 0,70.$$

Deze verschillen zijn voor een deel te wijten aan de onvermijdelijke waarnemingsfouten en aan de fouten der waarden, toegekend aan de coördinaten van de aansluitingspunten der eerste orde ; voor het overige moeten zij worden toegeschreven aan een werkelijke verplaatsing der beschouwde punten.

Wat het punt *Sopo Oentjim* betreft, zoo was het wel à priori aan te nemen, dat het kleine verschil geheel op rekening der eerste oorzaken kon worden gesteld en dus aan een verplaatsing van het punt niet behoefde te worden gedacht, maar van de overige punten, óók van *Si Hite*, was een werkelijke verplaatsing zeer waarschijnlijk.

Wanneer voor deze drie punten de verschillen uitsluitend aan werkelijke verschuiving worden toegeschreven, dan volgt voor het bedrag der verschuiving  $V$ , en het Azimut der richting, waarin de



verschuiving zou hebben plaats gehad <sup>1)</sup>, geteld uit het Noorden in Oostelijken zin rondgaande:

*Sorik Marapi*

$$V = 1,23 \text{ M.} \quad A = 344^{\circ}57'.$$

*Tor Si Hite*

$$V = 0,64 \text{ M.} \quad A = 149^{\circ}2'.$$

*G. Malintang*

$$V = 1,24 \text{ M.} \quad A = 304^{\circ}28'.$$

Op plaat I zijn in figuur 2, die verplaatsingen in richting en grootte voorgesteld.

In hoeverre deze veronderstelling vertrouwen verdient, kan eerst blijken na berekening van de middelbare fouten der metingen en van de daaruit afgeleide grootheden.

De voornaamste cijfers hierop betrekking hebbende zijn in de bijlagen IV en V opgenomen.

In de eerste plaats is opgemaakt de middelbare fout der metingen op de stations, welke onafhankelijk is van de aansluiting op de vaste punten. Op die stations zijn verschillende instrumenten gebezigd; namelijk op de stations der eerste orde vóór de aardbeving een 10 duims Universaal instrument van PISTOR en MARTINS, op het station *Si Hite* vóór de aardbeving een 8 duims instrument van WEGENER en na de aardbeving overal dat 8 duims instrument, behalve op den *Dolok Maleja*, waar een 8 duims instrument van PISTOR en MARTINS werd gebezigd.

Met die instrumenten werden zoowel rondmetingen uitgevoerd als enkele hoeken gemeten, de volledige seriën en hoeken ieder zes malen in twee kijkerstanden. Enkele onvolledige seriën werden verloffend volgens de benaderingsmethode der Ordnance Survey.

Uit de gemeten hoeken en volledige seriën werd voor de middelbare fout eener tweemaal ingestelde richting gevonden:

10 duims U.-I.	P. & M.	1",75
8       "       "	"	3",16
8       "       "	W.	2',40.

---

<sup>1)</sup> Streng genomen zijn de opgegeven waarden van *A* de hoeken met *F*-as in de projectie (richtingshoeken), maar wegens de onzekerheid dier getallen is het verschil geheel onbeduidend.

Hieruit volgt voor de M. f. van het gemiddelde, uit zes dergelijke metingen afgeleid, respectievelijk :

$$0'',71, \quad 1'',30 \quad \text{en} \quad 0'',98.$$

De tweede waarde is ongetwijfeld te groot, daar het instrument belangrijke regelmatige randverdeelingsfouten vertoont, wier invloed uit het gemiddelde grootendeels is geëlimineerd.

Alle metingen gezamenlijk beschouwende, onverschillig met welk instrument zij zijn uitgevoerd, verkrijgt men voor de middelbare fout van de tweemaal ingestelde richting  $2'',42$  en van het gemiddelde uit zes dergelijke waarnemingen, welke grootheid door de letter  $\mu$  zal worden aangeduid :

$$\mu = 0'',99.$$

Uit de sluitingsfouten der zes driehoeken, waarvan na de aardbeving alle hoeken zijn gemeten volgt verder :

$$\mu = 1'',01.$$

Bij de vereffening van het net zijn de met verschillende instrumenten gemeten richtingen allen met hetzelfde gewicht in rekening gebracht, omdat men, tengevolge van den dwang bij de aansluiting aan de punten der eerste orde, bij het toekennen van verschillende gewichten toch niet nader tot de waarheid zou komen. De vereffening gaf voor de waarde van  $\mu$  uit de metingen vóór de aardbeving :

$$\mu = 1'',35,$$

en uit de metingen na de aardbeving :

$$\mu = 1'',70.$$

Beide waarden zijn grooter dan die uit de metingen op de stations en uit de sluitingsfouten der driehoeken afgeleid, het gevolg van den dwang, die aan de resultaten der metingen voor de aansluiting aan de vaste punten is moeten worden aangedaan.

Dat die waarde na de aardbeving grooter is, kan voor een deel worden toegeschreven aan de omstandigheid, dat vóór de aardbeving de meer nauwkeurige 10 duims instrumenten zijn gebezigd, maar houdt bovendien daarmede verband, dat voor de coördinaten der vaste punten na de aardbeving waarden zijn gebezigd, afgeleid uit metingen vóór de aardbeving verricht, terwijl deze laatste toch eenigen invloed op de ligging van die pilaren zal hebben uitge-

oefend. Groot kan die invloed echter niet zijn geweest, anders zouden belangrijker verschillen zijn gevonden.

Voor de verdere foutenberekeningen is uit beide vereffeningen gezamenlijk één waarde van  $\mu$  afgeleid, namelijk:

$$\mu = 1'',64.$$

slechts zeer weinig minder dan de tweede der gevonden waarden; de nauwkeurigheid wordt daarmede dus zeker niet te hoog aangeslagen.

Bij de oplossing der normaalvergelijkingen zijn alle gewichtsgedallen tevens berekend. Uit deze grootheden zijn in de eerste plaats afgeleid de elementen der foutenellipsen.

Stelt men de gewichtsgedallen, behoorende bij de meest waarschijnlijke waarden  $x$  en  $y$  der coördinaten van een punt, gelijk aan  $Q_{xx}$ ,  $Q_{xy}$  en  $Q_{yy}$ , dan maken de hoofdassen van waarschijnlijkheid met de coördinaatassen hoeken  $\alpha$  en  $\alpha + 90^\circ$ , welke worden verkregen uit de formule

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{2 Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}},$$

terwijl de halve assen der ellipsen kunnen worden gevonden uit de uitdrukkingen:

$$\begin{aligned} k_\alpha &= \mu \sqrt{Q_{xx} \cos^2 \alpha + 2 Q_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + Q_{yy} \sin^2 \alpha} \\ k_{\alpha+90^\circ} &= \mu \sqrt{Q_{xx} \sin^2 \alpha - 2 Q_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + Q_{yy} \cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

De voor de verschillende ellipsen verkregen waarden zijn in de bijlage V vermeld. Bovendien zijn op plaat III in de figuren 5 tot 8 de ellipsen geteekend, wier halve assen de dubbele lengte van die der foutenellipsen hebben, en wel met de assen behoorlijk georiënteerd en met de middelpunten voor ieder driehoekspunt samenvallend met de meest waarschijnlijke ligging  $P$  vóór, en  $P'$  na de aardbeving, zoodat de verbindingslijn  $PP'$  de verschuiving aangeeft.

De waarschijnlijkheid, dat het bedoelde punt in werkelijkheid buiten een zoodanige ellips zou zijn gelegen, wordt gegeven door de uitdrukking

$$W = \frac{1}{e^2}$$

en bedraagt dus slechts ongeveer  $\frac{1}{7}$ . Aan de realiteit der verplaatsing van de punten *Goenoeng Malintang*, *Sorik Marapi* en *Tor Si*



*Hite* behoeft dus niet te worden getwijfeld. Alleen voor den *Sopo Oentjim* kan het verschil in ligging der punten  $P$  en  $P'$  zonder bezwaar aan de toevallige fouten der metingen worden toegeschreven.

Met behulp der gewichtsgetallen zijn verder de middelbare fouten van het bedrag en de richting der verschuiving van de drie eerstgenoemde punten berekend.

Stelt men de coördinaten van eenig punt vóór de aardbeving voor door  $x$  en  $y$ , daarna door  $x'$  en  $y'$ , dan is het bedrag der verschuiving  $V$  noemende :

$$V^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$$

en de richting daarvan  $A$  stellende :

$$\text{tang. } A = \frac{x' - x}{y' - y}.$$

Uit deze formules volgt :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x'} &= \sin A & \frac{\partial V}{\partial y'} &= \cos A \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= -\sin A & \frac{\partial V}{\partial y} &= -\cos A \\ \frac{\partial A}{\partial x'} &= \frac{\cos A}{V} & \frac{\partial A}{\partial y'} &= -\frac{\sin A}{V} \\ \frac{\partial A}{\partial x} &= -\frac{\cos A}{V} & \frac{\partial A}{\partial y} &= \frac{\sin A}{V} \end{aligned}$$

De bijbehorende gewichtsgetallen noemende  $Q_{xx}$ ,  $Q_{xy}$ ,  $Q_{yy}$ ,  $Q_{x'x'}$ ,  $Q_{x'y'}$ ,  $Q_{y'y'}$ , — andere combinaties der indices komen niet voor, daar de grootheden met en zonder accenten uit verschillende vereffeningen afgeleid en dus onderling onafhankelijk zijn — dan verkrijgt men voor de middelbare fout  $M_v$  der grootheid  $V$  :

$$\begin{aligned} M_v^2 &= \mu^2 [Q_{x'x'} \sin^2 A + 2 Q_{x'y'} \sin A \cos A + Q_{y'y'} \cos^2 A \\ &\quad + Q_{xx} \sin^2 A + 2 Q_{xy} \sin A \cos A + Q_{yy} \cos^2 A] \end{aligned}$$

en voor  $M_A$ , die der grootheid  $A$ , uitgedrukt in graden :

$$\begin{aligned} M_A^2 &= \frac{\mu^2}{V^2 \text{ boog } 21^\circ} \left[ Q_{x'x'} \cos^2 A - 2 Q_{x'y'} \sin A \cos A + Q_{y'y'} \sin^2 A \right. \\ &\quad \left. + Q_{xx} \cos^2 A - 2 Q_{xy} \sin A \cos A + Q_{yy} \sin^2 A \right]. \end{aligned}$$

Door toepassing van deze formules is gevonden :

*Sorik Marapi*

$$M_v = 0,28 \qquad M_A = 14^{\circ}30'.$$

*Tor Si Hite*

$$M_v = 0,14 \qquad M_A = 17^{\circ}45'.$$

*Goenoeng Malintang*

$$M_v = 0,34 \qquad M_A = 16^{\circ}0'.$$

Daar de gevonden waarden vrij groot zijn, en de reeks ontwikkeling, waarop de formules zijn gebaseerd, kleine waarden veronderstelt, moeten de uitkomsten als benaderd worden beschouwd.

Als men nagaat hoe groot de lengte der driehoekszijden is en hoe gering de lengte der lijnen, waarop de richtingen *A* betrekking hebben, dan kan de grootte der middelbare fouten, vooral van *A*, geen verwondering baren; een kleine fout in de ligging der eindpunten heeft toch reeds een belangrijke draaiing ten gevolge. Uit de waarden van *M<sub>v</sub>* in verband met de waarden van *V* blijkt echter, dat de verschillen der coördinaten slechts voor een betrekkelijk klein deel aan de toevallige fouten der metingen en den dwang bij de aansluiting mogen worden toegeschreven.

Wat de hoogteverschillen der beschouwde punten betreft, zoo is geene verandering kunnen worden aangetoond. De vóór en na de aardbeving op de stations *Dolok Toedjoe*, *Dolok Maleja* en *Tor Si Hite* gemeten zenitshoeken vertoonen verschillen van hoogstens 3", en hieruit kan, in verband met de onzekerheid der refractie, geen bepaald resultaat worden getrokken.

Uit de metingen op het station *Dolok Maleja* blijkt nog de verplaatsing van twee punten, waarvan echter het bedrag en de richting niet kan worden berekend, omdat zij vóór de aardbeving van geen ander station waren aangemeten. Die punten zijn *Tor Si Manondong* S. 67 en *Dolok Balameja* S. 71; de verandering der gemeten richtingen bedraagt :

$$\begin{array}{ll} \textit{Tor Si Manondong} & + 12'',9 \\ \textit{Dolok Balameja} & + 6'',9. \end{array}$$

Afziende van de fouten der metingen volgt hieruit in verband met den afstand tot den *Dolok Maleja*, voor het eerste punt een verplaatsing van minstens 1,3 M., van het tweede van minstens

0,9 M., terwijl het azimut bij beiden moet zijn gelegen tusschen  $260^{\circ}$  en  $80^{\circ}$ .

De afstand der uiterste punten, waarvan verplaatsing is geconstateerd: den *G. Malintang* en den *Dolok Balameja*, bedraagt ongeveer 53 kilometers, maar ongetwijfeld zullen dergelijke verplaatsingen nog in een grooter gebied hebben plaats gehad. Door hermeting zou dit voor de zuidelijker gelegen punten kunnen worden onderzocht, maar de werkzaamheden der triangulatiebrigade laten dit niet toe, te meer wijl de kleine veranderingen, welke de coördinaten der driehoekspunten kunnen hebben ondergaan, voor de topographische opneming van geen belang zijn.

Waarschijnlijk zijn thans voor de eerste maal door geodetische metingen dislocatieverschijnselen op het aardoppervlak aangetoond; uit deze blijkt, dat in een land, dat als *Sumatra* aan hevige aardbevingen is blootgesteld, de plaats der driehoekspunten op den duur niet als onveranderlijk kan worden beschouwd, en dat dus, wanneer in later tijd door hermetingen verschillen worden gevonden, deze zonder nader onderzoek niet aan mindere nauwkeurigheid der eerst uitgevoerde waarnemingen mogen worden toegeschreven, aangezien de mogelijkheid niet is buitengesloten, dat zij het gevolg zijn van eene werkelijke verplaatsing der driehoekspunten.

*Padang Si Dimpoewan,*  
den 25<sup>sten</sup> Augustus 1894.

*De Chef der Triangulatie-Brigade*

M U L L E R.

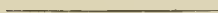
---



## B I J L A G E N.



- I. RESULTATEN DER STATIONSVEREFFENINGEN.
- II. VEREFFENING DER WAARNEMINGEN, UITGEVOERD VÓÓR DE AARDBEVING.
- III. VEREFFENING DER WAARNEMINGEN, UITGEVOERD NA DE AARDBEVING.
- IV. BEREKENING VAN DE MIDDELBARE FOUT DER GEWICHTSEENHEID.
- V. GEWICHTSGETALLEN EN FOUTENELLIPSEN.



## BIJLAGE I.

## RESULTATEN DER STATIONSVEREFFENINGEN.

## A. WAARNEMINGEN UITGEVOERD VÓÓR DE AARDBEVING.

I. *Station Dolok Toedjoe*. P. 37.

Waarnemer H. B. VAN RHIJN, Juni 1891.

Instrument: 10 duims P. & M. N<sup>o</sup>. I.

1. G. Malintang	0° 0' 0",0	red. + 1",3	gew. 1.
2. Sorik Marapi O. P.	49 45 3,3	+ 1,2	1.
3. T. Si Hite	73 12 58,9	+ 0,6	1.
4. T. Si Hite-Sopo Oentjim	51°26'15",1	red. — 0",5	gew. 0,5.

II. *Station Goenoeng Malintang*. P. 41.

Waarnemer J. J. A. MULLER, Augustus 1890.

Instrument: 10 duims P & M. N<sup>o</sup>. I.

5. Sorik Marapi O. P. — D. Toedjoe	65°23'18",3	red. — 2",2	gew. 0,5.
------------------------------------	-------------	-------------	-----------

III. *Station Dolok Maleja*. P. 51.

Waarnemer H. B. VAN RHIJN, September 1891.

Instrument: 10 duims P. & M. N<sup>o</sup>. I.

6. Sopo Oentjim	0° 0' 0",0	red. + 0",3	gew. 1.
7. T. Si Hite	55 5 12,7	+ 0,0	1.
8. Sorik Marapi O. P.	78 24 27,8	+ 0,1	1.

IV. *Station Tor Si Hite*. S. 80.

Waarnemer L. H. F. WACKERS, Maart 1892.

Instrument: 8 duims W. N<sup>o</sup>. IV.

9. Sopo Oentjim	0° 0' 0",0	red. — 0",1	gew. 1.
10. D. Toedjoe	55 46 42,3	— 0,6	1.
11. Sorik Marapi O. P.	176 21 6,2	+ 0,3	1.
12. D. Maleja	300 54 34,4	+ 0,0	1.

## B. WAARNEMINGEN UITGEVOERD NA DE AARDBEVING.

I. *Station Dolok Toedjoe*. P. 37.

Waarnemer L. H. F. WACKERS, November 1892.

Instrument: 8 duims W. N<sup>o</sup>. IV.

1. Sorik Marapi N. P.	0° 0' 0",0	red. + 1",2	gew. 1.
2. T. Si Hite	23 27 24,4	+ 0,6	1.
3. D. Maleja	54 18 46,5	+ 0,1	1.
4. Sopo Oentjim	74 53 40,3	+ 0,1	1.
5. G. Malintang—Sorik Marapi	49°45'19",4	red. — 0",1	gew. 0,5.

II. *Station Tor Si Dohar Dohar*. P. 49.

Waarnemer L. H. F. WACKERS, September 1893.

Instrument: 8 duims W. N<sup>o</sup>. IV.

- |    |                             |             |        |           |      |
|----|-----------------------------|-------------|--------|-----------|------|
| 6. | D. Maleja—Sorik Marapi N.P. | 42°46' 2",9 | red. — | 1",1 gew. | 0,5. |
| 7. | D. Maleja—G. Malintang      | 64 23 51 ,4 | —      | 2 ,8      | 0,7. |

III. *Station Dolok Maleja*. P. 51.

a. Waarnemer B. M. V. SCHLEENSTEIN, December 1892.

Instrument: 8 duims P. & M. N<sup>o</sup>. II.

- |     |                    |             |        |           |    |
|-----|--------------------|-------------|--------|-----------|----|
| 8.  | D. Toedjoe         | 0° 0' 0",0  | red. — | 0",1 gew. | 1. |
| 9.  | T. Si Hite         | 34 16 29 ,8 | +      | 0 ,0      | 1. |
| 10. | Sorik Marapi N. P. | 57 36 6 ,8  | +      | 0 ,1      | 1. |

b. Waarnemer A. R. VAN DORSEN, Februari 1893.

Instrument: 8 duims P. & M. N<sup>o</sup>. II.

- |     |   |             |        |           |      |
|-----|---|-------------|--------|-----------|------|
| 11. | Sopo Oentjim—T. Si Hite                 | 55° 5'13",5 | red. — | 0",3 gew. | 0,5. |
| 12. | Sorik Marapi N. P.—T. Si<br>Dohar Dohar | 43 17 48 ,1 | —      | 0 ,3      | 0,5. |

IV. *Station Sorik Marapi N. P. S.* 59.

Waarnemer J. J. A. MULLER, Augustus 1892.

Instrument: 8 duims W. N<sup>o</sup>. IV.

- |     |                             |              |        |           |      |
|-----|-----------------------------|--------------|--------|-----------|------|
| 13. | T. Si Dohar Dohar—D. Maleja | 93°56'13",8  | red. — | 1',0 gew. | 0,5. |
| 14. | T. Si Dohar Dohar           | 0° 0' 0",0   | red. + | 0",9 gew. | 1.   |
| 15. | D. Maleja                   | 93 56 13 ,2  | —      | 0 ,1      | 1.   |
| 16. | T. Si Hite                  | 126 4 15 ,6  | —      | 0 ,3      | 1.   |
| 17. | T. Si Hite                  | 0° 0' 0",0   | red. — | 0",3 gew. | 1.   |
| 18. | D. Toedjoe                  | 35 57 3 ,7   | —      | 1 ,2      | 1.   |
| 19. | G. Malintang                | 100 48 21 ,6 | —      | 0 ,9      | 1.   |

V. *Station Sopo Oentjim*. S. 63.

Waarnemer L. H. F. WACKERS, Juli 1893.

Instrument: 8 duims W. N<sup>o</sup>. IV.

- |     |                       |             |        |           |      |
|-----|-----------------------|-------------|--------|-----------|------|
| 20. | D. Toedjoe—T. Si Hite | 72°46'56",7 | red. + | 0",2 gew. | 0,5. |
| 21. | T. Si Hite—D. Maleja  | 65 49 28 ,4 | —      | 0 ,4      | 0,5. |

VI. *Station T. Si Hite*. S. 80.

Waarnemer H. J. M. DE WAHA, October 1892.

Instrument: 8 duims W. N<sup>o</sup>. IV.

- |     |                              |              |        |           |      |
|-----|------------------------------|--------------|--------|-----------|------|
| 22. | Sorik Marapi N.P.—D. Maleja  | 124°32'18",9 | red. — | 0",3 gew. | 0,5. |
| 23. | D. Toedjoe—Sorik Marapi N.P. | 120 35 33 ,3 | +      | 0 ,9      | 0,5. |
| 24. | D. Maleja                    | 0° 0' 0",0   | red. + | 0",0 gew. | 1.   |
| 25. | Sopo Oentjim                 | 59 5 21 ,8   | —      | 0 ,1      | 1.   |
| 26. | D. Toedjoe                   | 114 52 7 ,8  | —      | 0 ,6      | 1.   |



## A A N T E E K E N I N G E N .

De gebezigde Universaalinstrumenten zijn afkomstig uit de werkplaatsen van PISTOR en MARTINS (P. & M) en WEGENER (W.), beiden te Berlijn.

Op alle stations waren de instrumenten opgesteld centriscch op de pilaren; de richtpunten waren steeds heliotropen, centriscch op de pilaren bevestigd.

Op het punt *Sorik Maropi* is de oude pilaar (O. P.) steeds gebezigd vóór, de nieuwe (N. P.) na de aardbeving. De afstand dier beide pilaren bedraagt van centrum tot centrum 2,84 Meter, en de hoek *T. Si Hite*—centrum van den ouden pilaar, gemeten uit het centrum van den nieuwen pilaar:  $105^{\circ}59'$ .

De hoeken en volledige seriën zijn zes malen, telkens in twee kijkerstanden gemeten, de aflezingen regelmatig verdeeld langs den omtrek van den cirkelrand; aan het gemiddelde uit zes gemeten seriën is toegekend het gewicht 1, aan het gemiddelde van een zesmaal gemeten hoek het gewicht 0,5. Enkele onvolledig gemeten seriën zijn vereffend volgens de benaderingsmethode der *Ordnance Survey* ook aan de aldus verkregen waarden is het gewicht 1 toegekend. Aan den hoek *D. Maleja—G. Malintang*, gemeten op het station *T. Si Dohar Dohar*, is het gewicht 0,7 toegekend, aangezien hij is afgeleid uit de serie *D. Maleja—G. Malintang—G. Sondaran Galah*, welk laatste punt van de eerste orde niet in het net is opgenomen.

De bijgevoegde reducties hebben betrekking op de herleiding van de op het aardoppervlak gemeten richtingen en hoeken tot die in de conforme kegelvormige projectie. (Geodetische Formules en Tafels, bladz. 99, noot). De kleine reducties voor de herleiding der richtingen wegens de hoogte der richtpunten boven het zeeoppervlak, die nergens  $0'',2$  te boven gaan, zijn verwaarloosd.

## BIJLAGE II.

## VEREFFENING DER WAARNEMINGEN,

## UITGEVOERD VÓÓR DE AARDBEVING.

## A. COÖRDINATEN.

D. Toedjoe	$x = + 31612,30$	$y = - 14685,16$
G. Malintang	$+ 12844,56$	$- 39549,11$
D. Maleja	$+ 10033,58$	$+ 12074,32$
Sorik Marapi	$+ 376,00 + A$	$- 16433,00 + B$
Tor Si Hite	$+ 11594,85 + C$	$- 7296,15 + D$
Sopo Oentjim	$+ 25812,22 + E$	$+ 2851,86 + F$

## B. RICHTINGSHOEKEN.

D. Toedjoe-G. Malintang	$217^{\circ} 2'46'',1$
» -SorikMarapi	$266 47 50,4 - 0,37A + 6,58B$
» -T. Si Hite	$290 15 37,9 + 3,35C + 9,07D$
» -Sopo Oentjim	$341 41 57,2 + 10,60E + 3,51F$

G. Malintang-D. Toedjoe	$37^{\circ} 2'46'',1$
» -S. Marapi	$331 39 29,1 + 6,91A + 3,73B$

D. Maleja-Sopo Oentjim	$120^{\circ}18'21'',1 - 5,69E - 9,74F$
» -T. Si Hite	$175 23 30,8 - 10,58C - 0,55D$
» -Sorik Marapi	$198 42 54,4 - 6,49A + 2,20B$

T. Si Hite-Sopo Oentjim	$54^{\circ}28'54'',1 - 6,86C + 9,61D + 6,86E - 9,61F$
» -D. Toedjoe	$110 15 37,9 + 3,35C + 9,07D$
» -Sorik Marapi	$230 50 23,8 + 9,00C - 11,05D - 9,00A + 11,05B$
» -D. Maleja	$355 23 30,8 - 10,58C - 0,85D$

C. FOUTENVERGELIJKINGEN, NA ELIMINEERING DER RICHTINGS-  
ONBEKENDE UIT ELKE SERIE.

$\xi_1 = -1,8 - 0,12 A + 2,19 B + 1,12 C + 3,02 D$	gew. 1.
$\xi_2 = -2,9 + 0,25 A - 4,39 B + 1,12 C + 3,02 D$	1.
$\xi_3 = +4,6 - 0,12 A + 2,19 B - 2,23 C - 6,05 D$	1.
$\xi_4 = -4,7 + 3,35 C + 9,07 D - 10,60 E - 3,51 F$	0,5.
$\xi_5 = -0,9 + 6,91 A + 3,73 B$	0,5.
$\xi_6 = +1,0 - 2,16 A + 0,73 B - 3,53 C - 0,28 D + 3,79 E + 6,49 F$	1.
$\xi_7 = +3,7 - 2,16 A + 0,73 B + 7,05 C + 0,57 D - 1,90 E - 3,25 F$	1.

B 2

$$\begin{aligned}
\xi_8 &= -4,7 + 4,33 A - 1,47 B - 3,53 C - 0,28 D - 1,90 E - 3,25 F \text{ gew. 1.} \\
\xi_9 &= +6,8 - 2,25 A + 2,76 B + 5,59 C - 7,91 D - 5,14 E + 7,21 F \quad 1. \\
\xi_{10} &= +4,8 - 2,25 A + 2,76 B - 4,62 C - 7,37 D + 1,72 E - 2,40 F \quad 1. \\
\xi_{11} &= -16,3 + 6,75 A - 8,29 B - 10,27 C + 12,75 D + 1,72 E - 2,40 F \quad 1. \\
\xi_{12} &= +4,6 - 2,25 A + 2,76 B + 9,31 C + 2,55 D + 1,72 E - 2,40 F \quad 1.
\end{aligned}$$

## D. NORMAALVERGELIJKINGEN.

$$\begin{aligned}
\underline{112,78 A} - 72,85 B - 114,92 C + 113,99 D + 3,12 E - 42,69 F &= +181,15 \\
\underline{130,63 B} + 113,93 C - 160,10 D - 14,78 E + 33,71 F &= -207,37 \\
\underline{332,44 C} - 75,93 D - 76,16 E + 13,47 F &= -241,81 \\
\underline{382,40 D} + 4,62 E - 94,74 F &= +345,46 \\
\underline{113,06 E} + 6,11 F &= +16,22 \\
138,66 F &= -83,58
\end{aligned}$$

$$[g p p] = 437,18.$$

## E. RESULTAAT VAN DE OPLOSSING DER NORMAALVERGELIJKINGEN.

$$\begin{aligned}
A &= +0,47 \\
B &= -0,38 \\
C &= -0,35 \\
D &= +0,55 \\
E &= -0,18 \\
F &= +0,05
\end{aligned}$$

$$[g \xi \xi] = 5,48$$

## F. COÖRDINATEN VÓÓR DE AARDBEVING.

Sorik Marapi O. P.	$x = + 376,47$	$y = - 16433,38$
Tor Si Hite	$+ 11594,50$	$- 7295,60$
Sopo Oentjim	$+ 25812,04$	$+ 2851,91$



## BIJLAGE III.

## VEREFFENING DER WAARNEMINGEN,

## UITGEVOERD NA DE AARDBEVING.

## A. COÖRDINATEN.

D. Toedjoe	$x = + 31612,30$	$y = - 14685,16$
T. Si Dohar Dohar	$+ 29014,22$	$- 8674,78$
D. Maleja	$+ 10033,58$	$+ 12074,32$
Sorik Marapi	$+ 375,05 + A$	$- 16429,47 + B$
T. Si Hite	$+ 11594,85 + C$	$- 7296,15 + D$
Sopo Oentjim	$+ 25812,22 + E$	$+ 2851,86 + F$
G. Malintang	$+ 12844,56 + G$	$- 39549,11 + H$

## B. RICHTINGSHOEKEN.

D. Toedjoe-G. Malintang	$217^{\circ} 2'46'',1 - 5,28G + 3,99H$
» -Sorik Marapi	$266 48 14 ,0 - 0,37A + 6,58B$
» -T. Si Hite	$290 15 37 ,9 + 3,35C + 9,07D$
» -D. Maleja	$321 7 2 ,9$
» -Sopo Oentjim	$341 41 57 ,2 + 10,6 E + 3,51F$

D. Si Doh.Doh.-D. Maleja	$62^{\circ} 0'53'',5$
» -S.Marapi	$104 46 52 ,5 - 1,73A - 6,56B$
» -G Malint.	$126 24 42 ,7 - 2,35G - 3,19H$

D. Maleja-Sopo Oentjim	$120^{\circ}18'21'',1 - 5,69E - 9,74F$
» -D. Toedjoe	$141 7 2 ,9$
» -T. Si Hite	$175 23 30 ,8 - 10,58C - 0,85D$
» -Sorik Marapi	$198 43 8 ,4 - 6,49A + 2,20B$
» -D.Si Doh.Doh.	$242 0 53 ,5$

S. Marapi-D. Maleja	$18^{\circ}43' 8'',4 - 6,49A + 2,20B$
» -T. Si Hite	$50 51 11 ,4 - 9,00A + 11,06B + 9,00C - 11,06D$
» -D. Toedjoe	$86 48 14 ,0 - 0,37A + 6,58B$
» -G. Malintang	$151 39 35 ,7 - 6,91A - 3,73B + 6,91G + 3,73H$
» -D.SiDoh.Doh.	$284 46 52 ,5 - 1,73A - 6,56B$

Sopo Oentjim-D. Toedjoe	$161^{\circ}41'57'',2 + 10,60E + 3,51F$
» -T. Si Hite	$234 28 54 ,1 - 6,86C + 9,61D + 6,86E - 9,61F$
» -D. Maleja	$300 18 21 ,1 - 5,69F - 9,74F$

T. Si Hite-Sopo Oentjim	54°28'54",1—	6 86C+	9,61D+	6,86E—	9,61F
» —D. Toedjoe	110 15 37,9+	3,35C+	9,07D		
» —Sorik Marapi	230 51 11,4—	9,00A+	11,06B+	9,00C—	11,06D
» —D. Maleja	355 23 30,8—	10,58C—	0,85D		

## C. FOUTENVERGELIJKINGEN, NA ELIMINEERING DER RICHTINGS-

ONBEKENDE UIT ELKE SERIE.

$\xi_1 = +1,9 + 0,28A - 4,93B + 0,84C + 2,27D + 2,65E + 0,88F$	gew. 1.
$\xi_2 = +1,8 - 0,09A + 1,65B - 2,51C - 6,80D + 2,65E + 0,88F$	1.
$\xi_3 = -1,6 - 0,09A + 1,65B + 0,84C + 2,27D + 2,65E + 0,88F$	1.
$\xi_4 = -2,1 - 0,09A + 1,65B + 0,84C + 2,27D - 7,95E - 2,63F$	1.
$\xi_5 = -8,6 + 0,37A - 6,58B - 5,28G + 3,99H$	0,5.
$\xi_6 = +2,8 + 1,73A + 6,56B$	0,5.
$\xi_7 = -0,6 + 2,35G + 3,19H$	0,7.
$\xi_8 = -1,2 - 2,16A + 0,73B - 3,53C - 0,28D$	1.
$\xi_9 = +0,8 - 2,16A + 0,73B + 7,05C + 0,57D$	1.
$\xi_{10} = +0,3 + 4,33A - 1,47B - 3,53C - 0,28D$	1.
$\xi_{11} = +3,5 + 10,58C + 0,85D - 5,69E - 9,74F$	0,5.
$\xi_{12} = +2,7 - 6,49A + 2,20B$	0,5.
$\xi_{13} = -3,1 + 4,76A - 8,76B$	0,5.
$\xi_{14} = +2,7 - 4,01A + 8,79B + 3,00C - 3,69D$	1.
$\xi_{15} = -1,0 + 0,75A + 0,03B + 3,00C - 3,69D$	1.
$\xi_{16} = -1,8 + 3,26A - 8,83B - 6,00C + 7,37D$	1.
$\xi_{17} = +1,0 + 3,57A - 6,42B - 6,00C + 7,37D + 2,30G + 1,24H$	1.
$\xi_{18} = +1,2 - 5,06A - 1,94B + 3,00C - 3,69D + 2,30G + 1,24H$	1.
$\xi_{19} = -2,3 + 1,48A + 8,37B + 3,00C - 3,69D - 4,61G - 2,49H$	1.
$\xi_{20} = -0,0 + 6,86C - 9,61D + 3,74E + 13,12F$	0,5.
$\xi_{21} = +1,0 - 6,86C + 9,61D + 12,55E + 0,13F$	0,5.
$\xi_{22} = -0,8 - 9,00A + 11,06B + 19,58C - 10,21D$	0,5.
$\xi_{23} = +0,7 + 9,00A - 11,06B - 5,65C + 20,13D$	0,5.
$\xi_{24} = +0,5 + 5,88C + 6,79D + 2,29E - 3,20F$	1.
$\xi_{25} = -1,1 + 2,16C - 3,67D - 4,57E + 6,41F$	1.
$\xi_{26} = +0,6 - 8,05C - 3,13D + 2,29E - 3,20F$	1.

## D. NORMAALVERGELIJKINGEN.

<u>210,96 A</u> —199,17 B—197,62 C+211,13 D+ 0,98 E+ 0,33 F—11,23 G— 4,79H=+29,05	
512,23 B+279,03 C—350,74 D— 17,44 E— 5,78 F—40,45 G—44,34H=+44,07	
605,77 C—264,97 D— 84,02 E+ 10,88 F—20,73 G—11,19H=+10,41	
642,11 D+ 41,03 E—109,74 F+25,47 G+13,75H=— 0,73	
217,55 E+ 37,01 F	=+26,14
204,31 F	=—20,19
49,64 G+11,90H=+37,37	
+24,36H=—10,04	

$$[g p p] = 93,88.$$

## E. RESULTAAT VAN DE OPLOSSING DER NORMAALVERGELIJKINGEN.

$$A = - 0,02$$

$$B = - 0,11$$

$$C = - 0,02$$

$$D = - 0,00$$

$$E = - 0,16$$

$$F = + 0,12$$

$$G = - 1,02$$

$$H = + 0,70$$

$$[g \xi \xi] = 37,65.$$

## F. COÖRDINATEN NA DE AARDBEVING.

Sorik Marapi N. P.	$x = + 375,03$	$y = - 16429,58$
Tor Si Hite	$+ 11594,83$	$- 7296,15$
Sopo Oentjim	$+ 25812,06$	$+ 2851,98$
G. Malintang	$+ 12843,54$	$- 39548,41$

---



## BIJLAGE IV.

BEREKENING VAN DE MIDDELBARE FOUT  
DER GEWICHTSEENHEID.

## A. UIT DE STATIONSVEREFFENINGEN.

(Gemeten hoeken en volledige seriën).

<i>Station.</i>	<i>Waarnemer.</i>	<i>Instrument.</i>	<i>Teller. Noemer.</i>	
D. Toedjoe	VAN RHIJN	10 duims P. & M. N <sup>o</sup> . I	126,99	30
idem	WACKERS	8 » W. » IV	105,44	19
G. Malintang	MULLER	10 » P. & M. » I	9,03	10
T. Si Dohar Dohar	WACKERS	8 » W. » IV	177,02	31
D. Maleja	VAN RHIJN	10 » P. & M. » I	26,08	20
idem	SCHLEENSTEIN	8 » P. & M. » II	44,44	10
idem	VAN DORSEN	8 » P. & M. » II	313,90	25
Sorik Marapi	MULLER	8 » W. » IV	139,90	30
T. Si Hite	WACKERS	idem	40,08	12
idem	DE WAHA	idem	172,61	30
Sopo Oentjim	WACKERS	idem	186,76	20
Som			1342,25	237

Middelbare fout, dubbel ingestelde richting:

$$m = \sqrt{\frac{1342,25}{237}} = 2'',38$$

Middelbare fout der zesmaal dubbel ingestelde richting (gewichtseenheid):

$$\mu = \frac{2'',38}{\sqrt{6}} = 0'',97$$

## B. UIT DE SLUITINGSFOUTEN DER DRIEHOEKEN.

Na de aardbeving zijn van een zestal driehoeken alle hoeken gemeten; na herleiding tot het platte vlak geeft het verschil met 180° de sluitingsfout.

1. Sorik Marapi	35°57' 2'',8	
T. Si Hite	120 35 34 ,2	
D. Toedjoe	23 27 23 ,8	
<hr/>		
	180 0 0 ,8	sluitingsfout + 0'',8.

2.	D. Toedjoe	51°26'15",4	
	T. Si Hite	55 46 45 ,5	
	Sopo Oentjim	72 46 56 ,9	
		<hr/>	
		179 59 57 ,8	sluitingsfout — 2",2.
3.	D. Maleja	55° 5'13",2	
	T. Si Hite	59 5 21 ,7	
	Sopo Oentjim	65 49 28 ,0	
		<hr/>	
		180 0 2 ,9	sluitingsfout + 2",9.
4.	D. Toedjoe	30°51'21",6	
	T. Si Hite	114 52 7 ,2	
	D. Maleja	34 16 29 ,9	
		<hr/>	
		179 59 58 ,7	sluitingsfout — 1",3.
5.	Sorik Marapi	32° 8' 2",2	
	T. Si Hite	124 32 18 ,6	
	D. Maleja	23 19 37 ,1	
		<hr/>	
		179 59 57 ,9	sluitingsfout — 2",1.
6.	Sorik Marapi	93°56'12',8	
	D. Maleja	43 17 47 ,8	
	T. Si Dohar Dohar	42 46 1 ,8	
		<hr/>	
		180 0 2,4	sluitingsfout + 2",4.

Som van de vierkanten der sluitingsfouten 25,75.

Middelbare fout van den op het station vereffenden hoek :

$$\mu' = \sqrt{\frac{25,75}{3 \times 6}} = 1",43$$

Middelbare fout der gewichtseenheid :

$$\mu = \frac{\mu'}{\sqrt{2}} = 1",01$$

### C. UIT DE NETSVEREFFENINGEN.

a. Vóór de aardbeving :

Teller :  $[g \xi \xi] = 5,48.$

Aantal onbekenden (coördinaten) 6

Aantal gemeten seriën 3

Som 

---

 9

Aantal waarnemingen 12.

$$\text{Noemer } 12 - 9 = 3.$$

$$\mu = \sqrt{\frac{5,48}{3}} = 1'',35$$

b. Na de aardbeving:

$$\text{Teller: } [g \xi \xi] = 37,65.$$

Aantal onbekenden (coördinaten) 8

Aantal gemeten series 5

$$\text{Som } 13$$

Aantal waarnemingen 26.

$$\text{Noemer } 26 - 13 = 13.$$

$$\mu = \sqrt{\frac{37,65}{13}} = 1'',70.$$

c. Uit de beide vereffeningen gezamenlijk:

$$\text{Teller: } 5,48 + 37,65 = 43,13$$

$$\text{Noemer: } 3 + 13 = 16$$

$$\mu = \sqrt{\frac{43,13}{16}} = 1'',64.$$


---



## BIJLAGE V.

## GEWICHTSGETALLEN EN FOUTENELLIPSEN.

$$\mu = 1'',64.$$

1. *Sorik Marapi.*

## a. Vóór de aardbeving.

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= 0,02183 & Q_{xy} &= + 0,00025 & Q_{yy} &= 0,02400 \\ \alpha &= 83^{\circ}31' \\ k_x &= 0,25 \text{ halve groote as.} \\ k_{x+90} &= 0,24 \text{ halve kleine as.} \end{aligned}$$

## b. Na de aardbeving.

$$\begin{aligned} Q_{x'x'} &= 0,01277 & Q_{x'y'} &= + 0,00035 & Q_{y'y'} &= 0,00571 \\ \alpha &= 22^{\circ}23' \\ k_{x'} &= 0,20 \text{ halve groote as.} \\ k_{x'+90} &= 0,11 \text{ halve kleine as.} \end{aligned}$$

2. *Sopo Oentjim.*

## a. Vóór de aardbeving.

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= 0,01156 & Q_{xy} &= - 0,00005 & Q_{yy} &= 0,00911 \\ \alpha &= 88^{\circ}50' \\ k_x &= 0,16 \text{ halve kleine as.} \\ k_{x+90} &= 0,18 \text{ halve groote as.} \end{aligned}$$

## b. Na de aardbeving.

$$\begin{aligned} Q_{x'x'} &= 0,00545 & Q_{x'y'} &= - 0,00156 & Q_{y'y'} &= 0,00639 \\ \alpha &= 36^{\circ}37' \\ k_{x'} &= 0,11 \text{ halve kleine as.} \\ k_{x'+90} &= 0,14 \text{ halve groote as.} \end{aligned}$$

3. *Tor Si Hite.*

## a. Vóór de aardbeving.

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= 0,00806 & Q_{xy} &= - 0,00322 & Q_{yy} &= 0,00752 \\ \alpha &= 47^{\circ}24' \\ k_x &= 0,11 \text{ halve kleine as.} \\ k_{x+90} &= 0,17 \text{ halve groote as.} \end{aligned}$$

b. Na de aardbeving.

$$\begin{aligned} Q_{x'x'} &= 0,00282 & Q_{x'y'} &= -0,00008 & Q_{y'y'} &= 0,00359 \\ \alpha &= 5^{\circ}52' \\ k_{\alpha} &= 0,09 \text{ halve kleine as.} \\ k_{\alpha+90} &= 0,10 \text{ halve groote as.} \end{aligned}$$

4. *Goenoeng Malintang.*

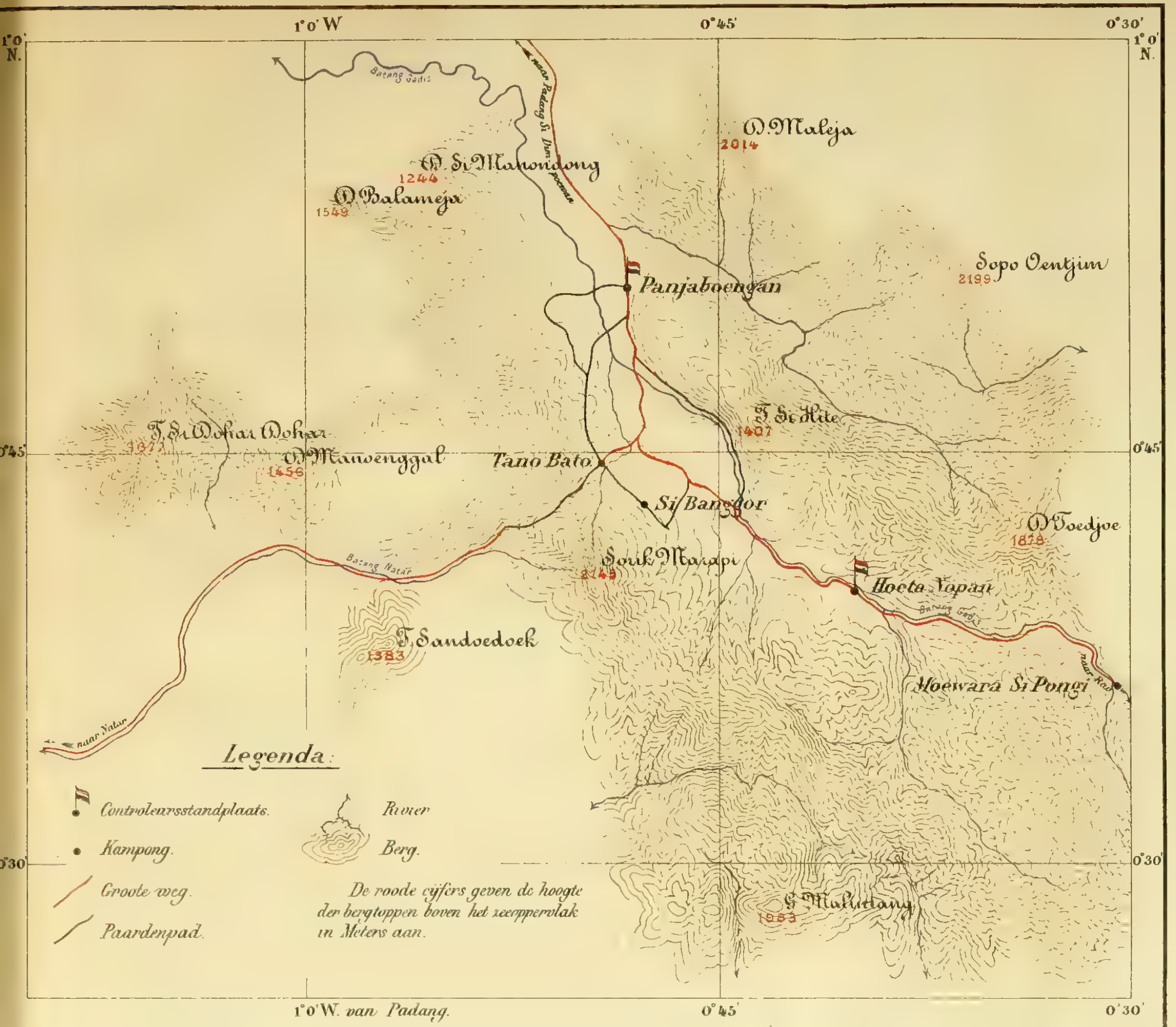
Na de aardbeving.

$$\begin{aligned} Q_{x'x'} &= 0,02592 & Q_{x'y'} &= -0,00616 & Q_{y'y'} &= 0,06107 \\ \alpha &= 9^{\circ}40' \\ k_{\alpha} &= 0,26 \text{ halve kleine as.} \\ k_{\alpha+90} &= 0,41 \text{ halve groote as.} \end{aligned}$$

# Fig. I. Schetskaart van een gedeelte der residentie Tapanoehi.

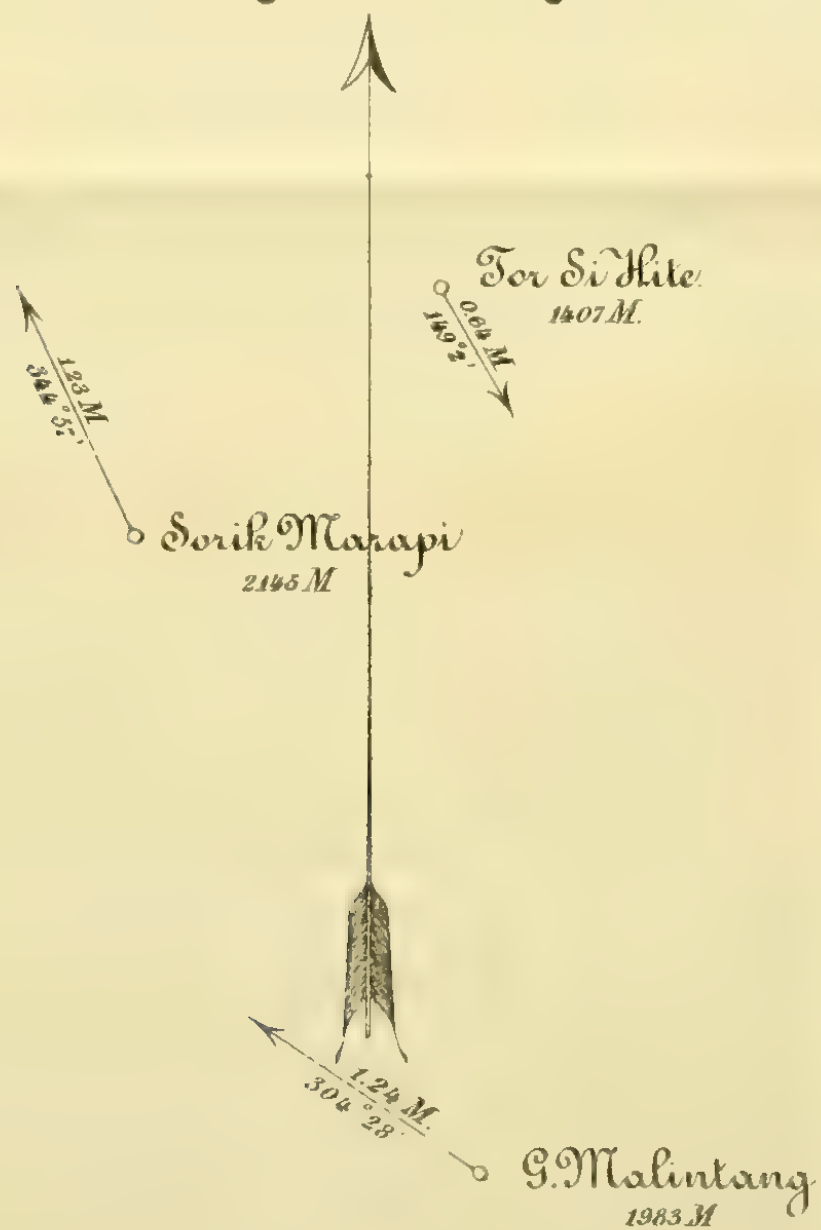
Schaal 1: 400,000.

Plaat I.



Meridiaan van Padang 100° 21' 44" O.L. van Greenwich.

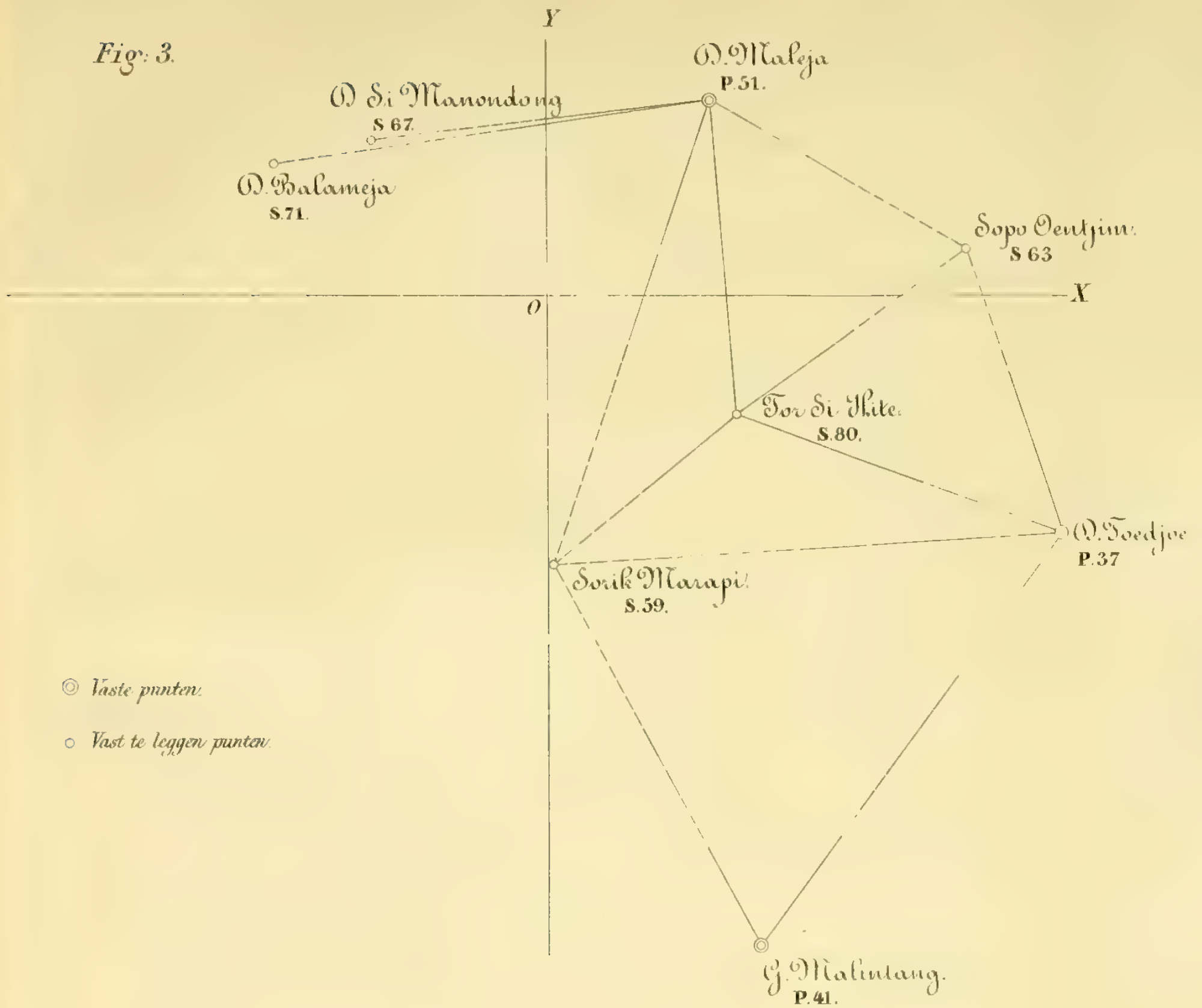
## Fig. 2. Verplaatsing der triangulatie pilaren.





# Metingen vóór de aardbeving.

Fig. 3.

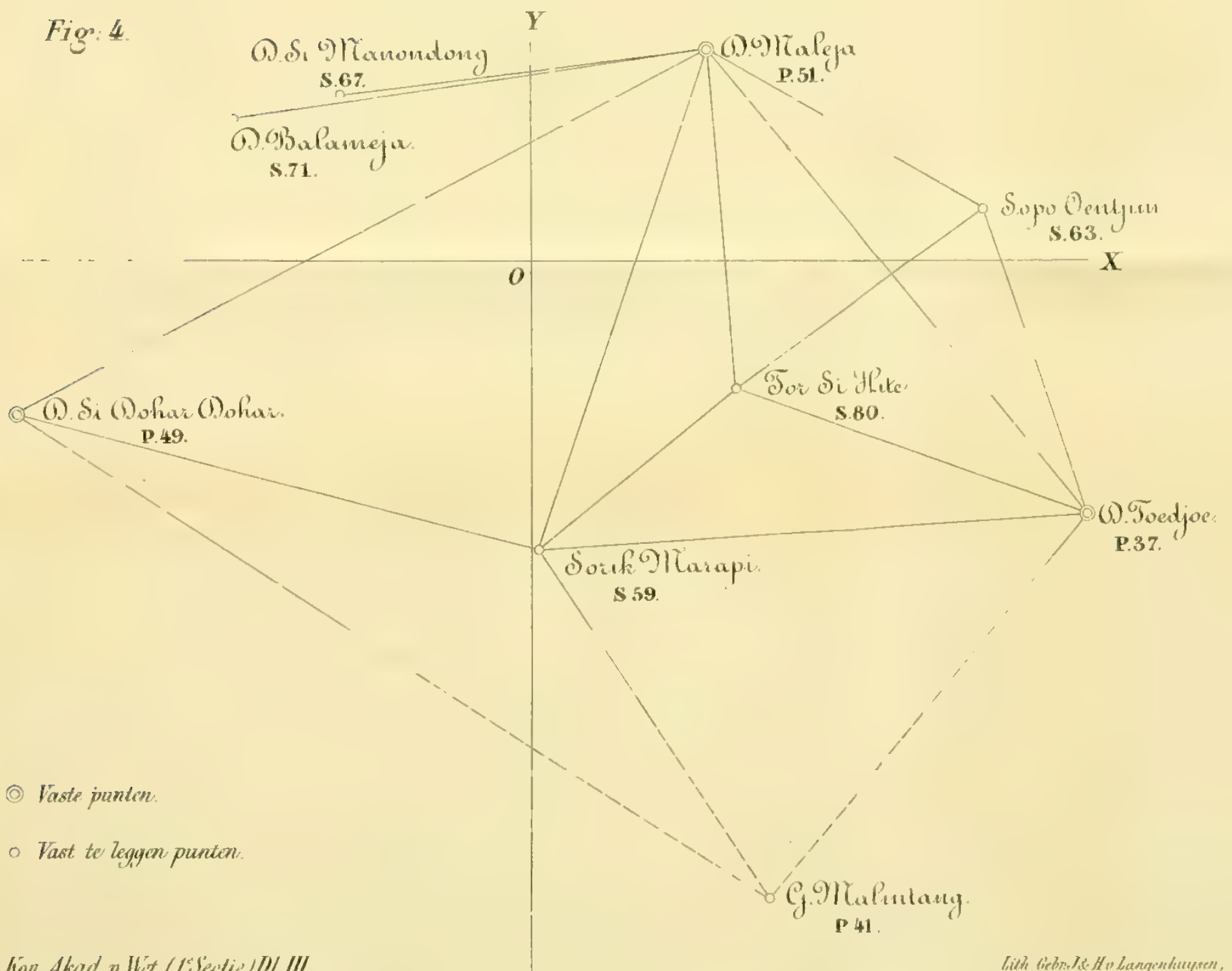


⊙ Vaste punten.

○ Vast te leggen punten.

# Metingen na de aardbeving.

Fig. 4.



⊙ Vaste punten.

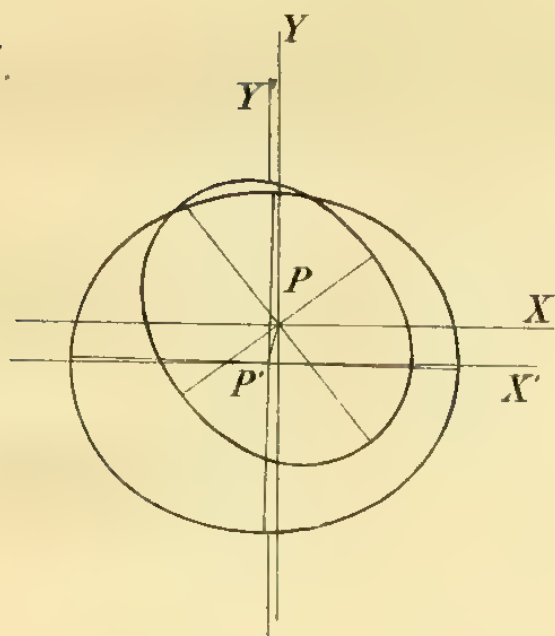
○ Vast te leggen punten.

Foutenellipsen.

Schaal 1 : 20.

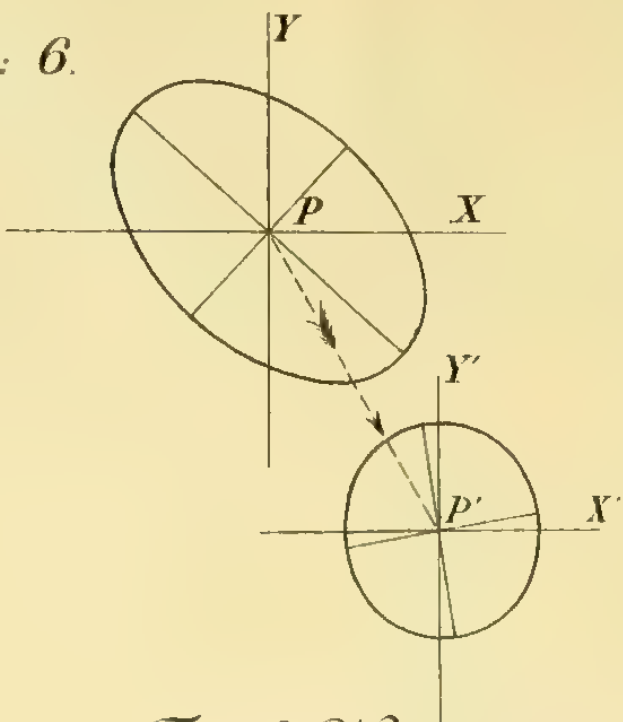
(Voor de halve asfen zijn genomen de waarden  $2k_x$  en  $2k_x + 90^\circ$ )

Fig: 5.



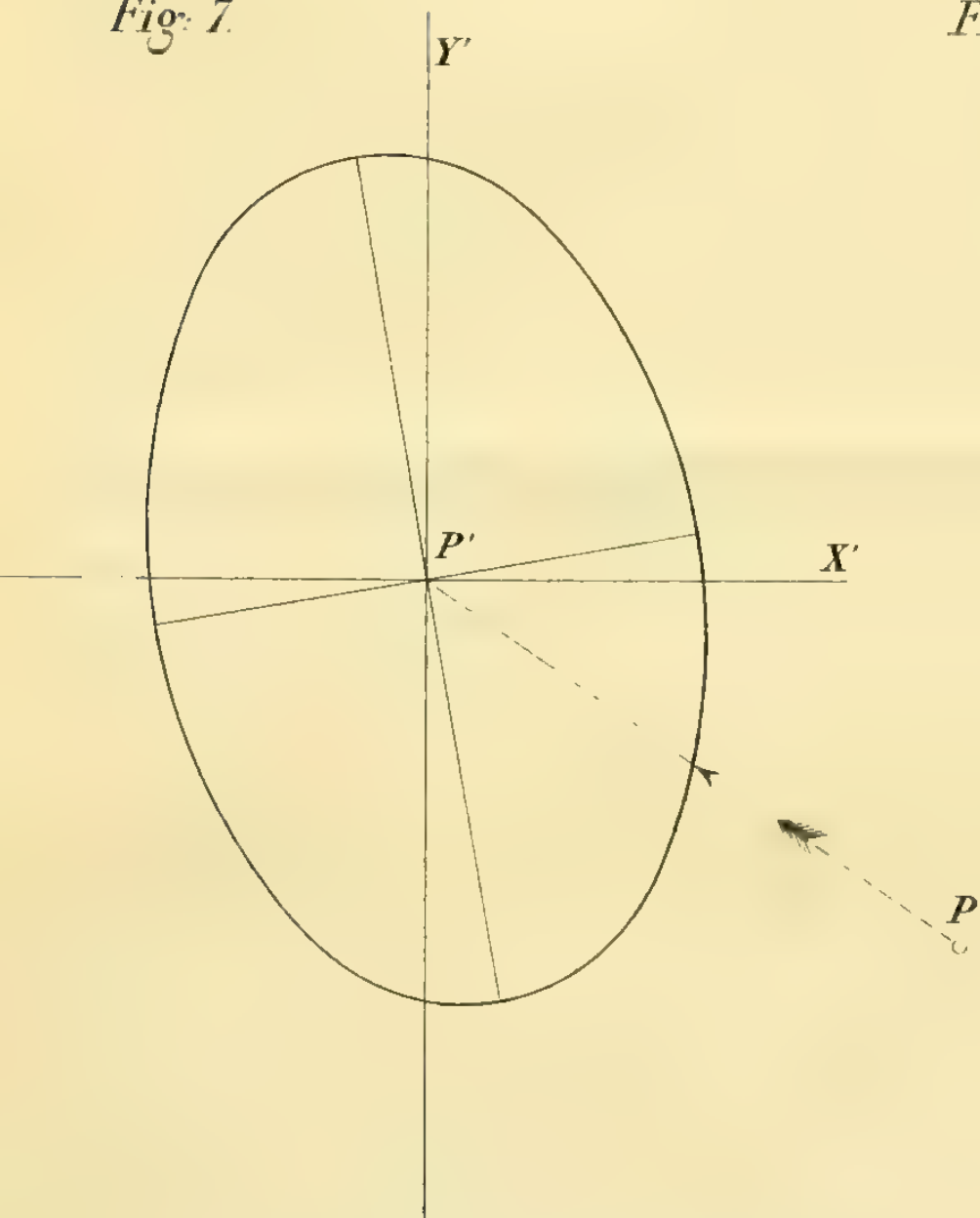
Sopo Oentjim. S.63.

Fig: 6.



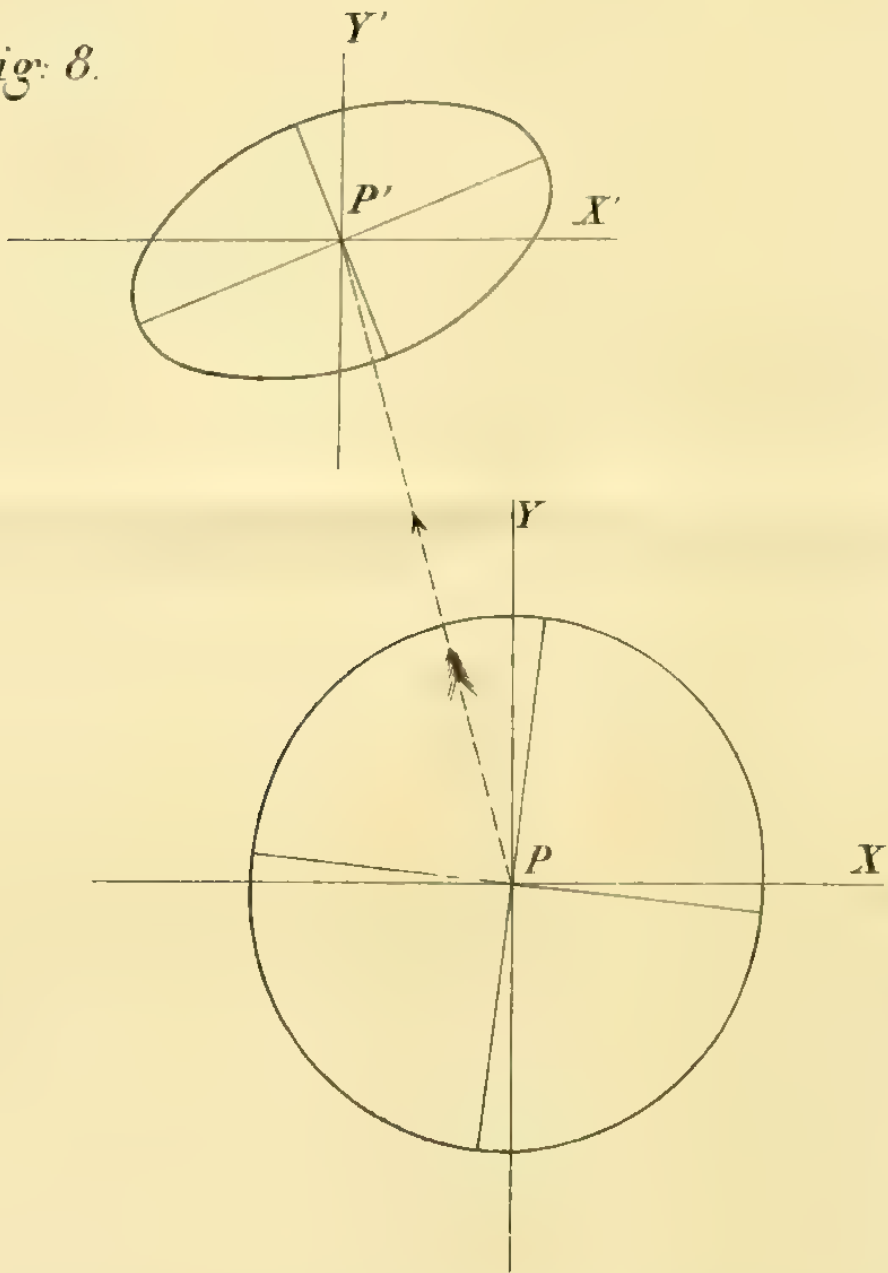
Tor Si Mite. S.80

Fig: 7.



Goenoeng Malintang. P. 41.

Fig: 8.



Sorik Marapi. S. 59.





# Over de merkwaardige punten van den driehoek

DOOR

W. KAPTEYN.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

Deel III. N<sup>o</sup>. 3.

AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
1895.



# Over de merkwaardige punten van den driehoek

DOOR

W. KAPTEYN.

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

Deel III. N<sup>o</sup>. 3.



AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
1895.





## Over de merkwaardige punten van den driehoek.

In het volgende stel ik mij voor eenige betrekkingen tusschen verschillende merkwaardige punten van den driehoek af te leiden door vergelijking hunner uitdrukkingen in complexe grootheden. De punten waarmede wij ons zullen bezighouden zijn in hoofdzaak die welke in de bekende verhandeling „Premier inventaire de la Géométrie du Triangle” van E. Vigarié <sup>1)</sup> zijn opgenomen. Ten einde het overzicht gemakkelijk te maken zullen we in de eerste paragraaf eenige opmerkingen over het complexe en zijn verband met het normale coördinatenstelsel ontwikkelen, in de tweede paragraaf de complexe uitdrukkingen van verschillende punten en de vergelijkingen van enkele merkwaardige rechte en kromme lijnen afleiden, in de derde paragraaf eenige gevolgen uit de gevonden formules vereenigen en eindelijk in de laatste paragraaf eenige betrekkingen opsporen tusschen een willekeurig punt en zijne poolpunten ten opzichte van de hoekpunten van den driehoek. Het onderwerp in de laatste paragraaf behandeld, vindt men uitvoeriger besproken in twee belangrijke verhandelingen, n.l.: „Ricerche sulla Geometria della forme binarie cubiche” van E. Beltrami <sup>2)</sup> en „On the coriant geometry of the triangle” van F. Morley <sup>3)</sup>. Onze behandelingswijze verschilt echter in menig opzicht van de hunne en leidt bovendien tot eenige nieuwe resultaten.

### § 1. Stellen we een punt waarvan de rechthoekige Cartesiaansche

<sup>1)</sup> Association Française. Congrès de Toulouse 1887.

<sup>2)</sup> Memorie della Accademia di Bologna Serie II t. IX (1869).

<sup>3)</sup> Quarterly Journal of Mathem. Vol XXV (1891).

coördinaten zijn  $x$  en  $y$ , voor door de complexe uitdrukking  $z = x + iy$ , waarin  $i$  de wortel uit de negatieve eenheid beteekent en veroorloven we ons dit punt korthedshalve het punt  $z$  te noemen.

Zij verder  $z'$  de complexe uitdrukking die met  $z$  geconjugueerd is, dan kan men elke vergelijking tusschen de coördinaten  $x$  en  $y$  in eene vergelijking tusschen  $z$  en  $z'$  die van denzelfden graad is als de oorspronkelijke, transformeeren en op deze wijze de geheele analytische meetkunde ontwikkelen. Eenige der resultaten die men op deze wijze verkrijgt zijn de volgende.

De vergelijking van eene reële rechte lijn is

$$Az + A'z' + B = 0 \quad (1)$$

waarin  $A$  eene complexe grootheid,  $A'$  hare geconjugeerde waarde en  $B$  eene reële grootheid voorstelt.

De vergelijking van eene lijn evenwijdig met de lijn (1) is

$$Az + A'z' + D = 0 \quad (2)$$

waarin  $D$  eene reële waarde heeft.

De vergelijking van eene lijn loodrecht op de lijn (1) is

$$Az - A'z' + F = 0 \quad (3)$$

waarin weêr  $F$  eene reële grootheid aanduidt.

De vergelijking van een cirkel waarvan de straal  $r$  en het middelpunt  $\theta = \alpha + i\beta$  is, wordt

$$zz' - \theta z - \theta' z' + \theta\theta' - r^2 = 0 \quad (4).$$

De vergelijking van elke kegelsnede neemt den vorm aan

$$S = Az^2 + 2Bzz' + A'z'^2 + 2Cz + 2C'z' + D = 0 \quad (5)$$

waarin  $B$  en  $D$  reële,  $A$  en  $C$  daarentegen complexe grootheden beteekenen.

Naar gelang  $AA' - B^2 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0$ , stelt de vergelijking (5) een ellips, parabool of hyperbool voor. Is

$$\Delta = AA'D + 2BC'C - AC'^2 - A'C^2 - B^2D = 0$$

dan stelt de vergelijking (5) twee rechte lijnen voor.

Het middelpunt  $M$  van den kegelsnede (5) vindt men door de waarde van  $z$  op te lossen uit de twee vergelijkingen

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dz} &= 2(Az + Bz' + C) = 0 \\ \frac{dS}{dz'} &= 2(Bz + A'z' + C') = 0. \end{aligned}$$

Derhalve is

$$M = \frac{BC' - CA'}{AA' - B^2} \quad (6).$$

De brandpunten van de kegelmede (5) zijn de wortels van de vergelijking

$$(AA' - B^2)z^2 + 2(CA' - BC')z + DA' - C'^2 = 0 \quad (7).$$

Onderzoeken we nu het verband dat bestaat tusschen de normale coördinaten  $\alpha, \beta, \gamma$  van een punt ten opzichte van de zijden van een driehoek  $ABC$  en de complexe uitdrukking  $z = x + iy$  behorende bij dit punt ten opzichte van een rechthoekig assensysteem waarvan de oorsprong met het hoekpunt  $A$ , de  $x$  as met de zijde  $AB$  samenvalt, terwijl de driehoek ligt aan de zijde van de positieve  $y$  as. Noemen we de hoeken van den driehoek  $A, B, C$ , de tegenoverstaande zijden  $a, b, c$ , de loodlijnen uit het punt  $z = x + iy$  op de zijden neêrgelaten  $u, v, w$  en de complexe uitdrukking behorende bij het hoekpunt  $C$ :  $p_1 + ip_2 = p$ .

Men heeft dan

$$u = t\alpha, \quad v = t\beta, \quad w = t\gamma$$

waarin  $t$  een factor is, die bepaald wordt door de vergelijking

$$au + bv + cw = t(a\alpha + b\beta + c\gamma) = cp_2.$$

Verder is

$$\begin{aligned} x \sin A - y \cos A &= t\beta \\ y &= t\gamma \end{aligned}$$

dus

$$x + iy = t \cdot \frac{\beta + \gamma(\cos A + i \sin A)}{\sin A}$$

of, daar

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{p_1}{b}, \quad \sin A = \frac{p_2}{b} \\ x + iy &= \frac{c(b\beta + p\gamma)}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \quad (8). \end{aligned}$$

Vervangt men in deze formule de complexe uitdrukking  $p$  van van het punt  $C$ , door  $C$ , dan wordt de vorige vergelijking

$$x + iy = \frac{c(b\beta + C\gamma)}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \quad (8_1)$$

waaruit volgt, zoo  $B$  als oorsprong en  $BC$  als  $x$  as gekozen wordt

$$x + iy = \frac{a(c\gamma + A\alpha)}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \quad (8_2)$$

en, zoo  $C$  als oorsprong en  $CA$  als  $x$  as gekozen wordt

$$x + iy = \frac{b(a\alpha + B\beta)}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \quad (8_3).$$

Kent men dus de normale coördinaten van een punt dan kan



men gemakkelijk de complexe uitdrukking of waarde van dit punt vinden; kent men daarentegen de complexe waarde, dan is het zeer eenvoudig daaruit de verhouding  $\alpha:\beta:\gamma$  af te leiden.

Bepalen we met behulp van de vergelijking (8) de complexe waarde van het inverse punt van het punt  $z$ .

Zijn de normale coördinaten van het punt  $z: \alpha, \beta, \gamma$ , dan zijn die van het inverse punt  $z_2: \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ . Derhalve is de complexe waarde van dit laatste punt

$$z_2 = \frac{c\alpha(b\gamma + p\beta)}{a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta}$$

stelt men hierin

$$\begin{aligned} \alpha : \beta : \gamma &= \frac{1}{a} [(c - p')z - (c - p)z' - c(p - p')] : \\ &: \frac{1}{b} (p'z - pz') : (z' - z) \quad (9) \end{aligned}$$

welke betrekkingen men gemakkelijk afleidt, dan komt

$$z_2 = pz' \cdot \frac{(c - p')(z - c) - (c - p)(z' - c)}{(p - p')zz' - (c - p)p'z - (c - p')pz'}, \quad (10).$$

Merkt men op dat de factor van  $pz'$  in het tweede lid dezer vergelijking reëel is, dan ziet men hieruit dat

$$\arg z_2 = \arg p - \arg z$$

of

$$\arg z_2 + \arg z = \angle A.$$

Voldoen omgekeerd de complexe waarden van twee punten  $z_2$  en  $z$  aan de voorwaarde

$$z_2 = pz' \times k$$

waarin  $k$  eene reële grootheid voorstelt, dan kan men besluiten dat deze punten invers zijn. Is het punt  $F_2$  complementair met  $F_1$ , dus  $F_1$  anti-complementair met  $F_2$ , dan bestaat tusschen de complexe waarden dezer punten en die van het zwaartepunt  $G$  van den driehoek de eenvoudige betrekking

$$F_1 = 3G - 2F_2 \quad (11).$$

Zijn twee driehoeken waarvan de hoekpunten door de complexe uitdrukkingen  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  en  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  bepaald zijn, gelijkvormig en neemt men aan dat de hoekpunten met gelijke indices gelijkstandig zijn, dan is

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} = 0 \\ \text{of} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' \\ \eta_1' & \eta_2' & \eta_3' \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

naar gelang de gelijkvormigheid rechtstreeks of bij tegenoverstand bestaat.

Hieruit volgt een gemakkelijk middel om een punt  $\xi$  te construeeren dat bepaald wordt door de vergelijking

$$\xi = \frac{h k}{l}$$

waarin  $h$ ,  $k$  en  $l$  gegeven complexe waarden voorstellen. Daartoe construeere men een driehoek  $O \xi k$  gelijkvormig met driehoek  $O h l$ , of een driehoek  $O \xi h$  gelijkvormig met  $O k l$ , zijnde  $O$  de oorsprong van coördinaten. Dan toch is

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \xi & k \\ 0 & h & l \end{vmatrix} = 0 \text{ of } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \xi & h \\ 0 & k & l \end{vmatrix} = 0$$

waaruit volgt

$$\xi = \frac{h k}{l}$$

Voegen wij hierbij nog de opmerking dat twee punten  $\xi_1 \xi_2$  die bepaald zijn door de vergelijking

$$A \xi^2 + 2 B \xi + C = 0$$

met twee andere punten  $\eta_1 \eta_2$  die voldoen aan de vergelijking

$$D \eta^2 + 2 E \eta + F = 0$$

harmonisch verwant zijn, indien

$$A F + C D = 2 B E (12).$$

zoals men terstond kan afleiden uit de voorwaarde

$$\frac{\xi_1 - \eta_1}{\xi_1 - \eta_2} : \frac{\xi_2 - \eta_1}{\xi_2 - \eta_2} = -1$$

§ 2. Gaan we nu de complexe waarden van verschillende merkwaardige punten van den driehoek bepalen. We zullen daarbij of de normale coördinaten bekend onderstellen en hieruit volgens formule (8) de complexe waarden afleiden of, waar dit eenvoudiger is, deze waarden bepalen uit de vergelijkingen van verschillende meetkundige plaatsen waarop deze punten gelegen zijn. Wat aangaat de notaties dezer punten zullen we dezelfde aannemen als E. Vigarié in zijne bovengenoemde verhandeling.

1. Zwaartepunt ( $G$ ) van den inhoud des driehoeks

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

$$G = \frac{1}{3} (c + p)$$

2. Middelpunt ( $I$ ) van den ingeschreven cirkel

$$\alpha : \beta : \gamma = 1 : 1 : 1$$

$$I = \frac{c(b+p)}{2s}$$

3. Middelpunten ( $I_a$   $I_b$   $I_c$ ) van de aangeschreven cirkels

$$\alpha : \beta : \gamma = -1 : 1 : 1$$

$$I_a = \frac{c(b+p)}{2(s-a)}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = 1 : -1 : 1$$

$$I_b = \frac{c(p-b)}{2(s-b)}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = 1 : 1 : -1$$

$$I_c = \frac{c(b-p)}{2(s-c)}$$

4. Punt ( $\nu$ ) van Nagel.

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{s-a}{a} : \frac{s-b}{b} : \frac{s-c}{c}$$

$$\nu = \frac{(s-b)c + (s-c)p}{s}$$

5. Overige punten ( $\nu_a$   $\nu_b$   $\nu_c$ ) van Nagel.

$$\alpha : \beta : \gamma = -\frac{s}{a} : \frac{s-c}{b} : \frac{s-b}{c}$$

$$\nu_a = \frac{(s-c)c + (s-b)p}{a-s}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{s-c}{a} : -\frac{s}{b} : \frac{s-a}{c}$$

$$\nu_b = \frac{-cs + (s-a)p}{b-s}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{s-b}{a} : \frac{s-a}{b} : -\frac{s}{c}$$

$$\nu_c = \frac{(s-a)c - sp}{c-s}$$

6. Punt ( $\Gamma$ ) van Gergonne.

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{a(s-a)} : \frac{1}{b(s-b)} : \frac{1}{c(s-c)}$$

$$\Gamma = \frac{(s-a)[(s-c)c + (s-b)p]}{ab + ac + bc - s^2}$$

7. Overige punten ( $\Gamma_a \Gamma_b \Gamma_c$ ) van Gergonue.

$$\alpha : \beta : \gamma = -\frac{1}{as} : \frac{1}{b(s-c)} : \frac{1}{c(s-b)}$$

$$\Gamma_a = \frac{s[(s-b)c + (s-c)p]}{s^2 - bc}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{a(s-c)} : -\frac{1}{bs} : \frac{1}{c(s-a)}$$

$$\Gamma_b = \frac{(s-c)[- (s-a)c + sp]}{s^2 - ac}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{a(s-b)} : \frac{1}{b(s-a)} : -\frac{1}{cs}$$

$$\Gamma_c = \frac{(s-b)[cs - (s-a)p]}{s^2 - ab}$$

8. Punt ( $K$ ) van Lemoine.

$$\alpha : \beta : \gamma = a : b : c$$

$$K = \frac{c(b^2 + cp)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

9. Het reciproke punt ( $H_o$ ) van het orthocentrum.

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a} : \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b} : \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c}$$

$$H_o = \frac{c(a^2 + c^2 - b^2) + (a^2 + b^2 - c^2)p}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

10. Eerste driehoek ( $A_1 B_1 C_1$ ) van Brocard.

$$\alpha : \beta : \gamma = a : \frac{c^2}{b} : \frac{b^2}{c}$$

$$A_1 = \frac{c^3 + b^2 p}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{c^2}{a} : b : \frac{a^2}{c}$$

$$B_1 = \frac{b^2 c + a^2 p}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{b^2}{a} : \frac{a^2}{b} : c$$

$$C_1 = \frac{a^2 c + c^2 p}{a^2 + b^2 + c^2}.$$



11. Orthocentrum ( $H$ ).

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}$$

De vergelijkingen van de loodlijnen uit de hoekpunten  $A$  en  $C$  op de overstaande zijden nêergelaten zijn

$$\begin{aligned}(c - p')z + (c - p)z' &= 0 \\ z + z' &= p + p'.\end{aligned}$$

Hieruit volgt voor het snijpunt

$$H = \frac{(p - c)(p + p')}{p - p'}.$$

12. Middelpunt ( $O$ ) van den omgeschreven cirkel

$$\alpha : \beta : \gamma = \cos A : \cos B : \cos C.$$

De vergelijking van een cirkel zijnde

$$zz' - \theta z - \theta' z' + \theta\theta' - r^2 = 0$$

zoo zal de cirkel door de punten  $o$ ,  $c$ ,  $p$  gebracht tot vergelijking hebben

$$zz' + \frac{p'(c - p)}{p - p'}z - \frac{p(c - p')}{p - p'}z' = 0$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned}O &= \frac{p(c - p')}{p - p'} \\ r^2 &= \frac{pp'(p - c)(c - p')}{(p - p')^2} = -\frac{a^2 b^2}{(p - p')^2}\end{aligned}$$

13. Middelpunt ( $O_9$ ) van den negenpuntscirkel.

$$\alpha : \beta : \gamma = \cos(B - C) : \cos(C - A) : \cos(A - B).$$

De cirkel door de middelpunten  $\frac{c}{2}$ ,  $\frac{p}{2}$ ,  $\frac{c+p}{2}$  van de zijden gebracht, heeft tot vergelijking

$$zz' + \frac{p'^2 - cp}{2(p - p')}z - \frac{p^2 - cp'}{2(p - p')}z' + \frac{c(p + p')}{4} = 0$$

derhalve

$$O_9 = \frac{p^2 - cp'}{2(p - p')}$$

en het kwadraat van den straal

$$-\frac{a^2 b^2}{4(p - p')^2} = \frac{r^2}{4}.$$

14. De punten ( $\Omega_1$   $\Omega_2$ ) van Brocard.

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{c}{b} : \frac{a}{c} : \frac{b}{a}$$

$$\Omega_1 = \frac{b^2 c (a^2 + cp)}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{b}{c} : \frac{c}{a} : \frac{a}{b}$$

$$\Omega_2 = \frac{c^2 (b^2 c + a^2 p)}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}.$$

Merkt men op dat

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - p) (c - p'), \quad b^2 = pp' \\ a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 &= (c^2 - cp + pp') (c^2 - cp' + pp') \\ b^2 c + a^2 p &= p (c^2 - cp + pp') \\ a^2 + cp &= c^2 - cp' + pp' \end{aligned}$$

dan kan men de vorige uitkomsten schrijven

$$\Omega_1 = \frac{b^2 c}{b^2 + c^2 - cp}$$

$$\Omega_2 = \frac{c^2 p}{b^2 + c^2 - cp'}.$$

15. Middelpunt ( $P$ ) van de lijn  $\Omega_1$   $\Omega_2$ .

$$\alpha : \beta : \gamma = a (b^2 + c^2) : b (c^2 + a^2) : c (a^2 + b^2).$$

Hier vindt men terstond

$$P = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} = cp \frac{(a^2 + c^2) p' + (a^2 + b^2) c}{2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}.$$

16. Gelijkvormigheidspunt ( $D$ ) van den eersten driehoek van Brocard en den driehoek  $ABC$ , of derde punt van Brocard.

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{a^3} : \frac{1}{b^3} : \frac{1}{c^3}$$

$$D = \frac{a^2 (c^3 + b^2 p)}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}.$$

17. Het reciproke punt ( $I_o$ ) van het middelpunt van den ingeschreven cirkel.

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2}$$

$$I_o = \frac{a (c^2 + bp)}{ab + ac + bc}.$$

18. Middelpunt ( $Q$ ) van gelijke parallellen.

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{ab + ac - bc}{a} : \frac{ab + bc - ac}{b} : \frac{ac + bc - ab}{c}$$

$$Q = \frac{(ab + bc - ac)c + (ac + bc - ab)p}{ab + ac + bc}.$$

19. Punten ( $J_s$ ,  $J_q$ ) van Jerabek.

$$\alpha : \beta : \gamma = b : c : a$$

$$J_s = \frac{c(bc + ap)}{ab + ac + bc}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = c : a : b$$

$$J_q = \frac{c(ab + bp)}{ab + ac + bc}.$$

20. Punt ( $R$ ) van Steiner.

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{a(b^2 - c^2)} : \frac{1}{b(c^2 - a^2)} : \frac{1}{c(a^2 - b^2)}$$

$$R = \frac{(c^2 - b^2)(c - p')}{c^2 - cp' + p'^2}.$$

21. De isobarische punten ( $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ) van het punt van Steiner.

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{a(a^2 - b^2)} : \frac{1}{b(b^2 - c^2)} : \frac{1}{c(c^2 - a^2)}$$

$$\rho_1 = \frac{(b^2 - a^2)p'}{c^2 - cp' + p'^2}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{a(c^2 - a^2)} : \frac{1}{b(a^2 - b^2)} : \frac{1}{c(b^2 - c^2)}$$

$$\rho_2 = \frac{(c^2 - a^2)c}{c^2 - cp' + p'^2}.$$

22. Punt ( $N$ ) van Tarry.

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{\cos(A + \omega)} : \frac{1}{\cos(B + \omega)} : \frac{1}{\cos(C + \omega)}$$

waarin  $\omega$  de hoek van Brocard voorstelt. Dit punt ligt op den omgeschreven cirkel, diametraal tegenover het punt van Steiner; derhalve is

$$N = O - (R - O) = 2O - R$$

of

$$N = \frac{(c - p')[p(c^2 - cp' + p'^2) + p'(c^2 - cp + p^2)]}{(p - p')(c^2 - cp' + p'^2)}.$$

23. Middelpunt  $M$  van den hyperbool van Kiepert.

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{(b^2 - c^2)^2}{a} : \frac{(c^2 - a^2)^2}{b} : \frac{(a^2 - b^2)^2}{c}$$

$$M = \frac{c(p'^2 + cp)}{2(c^2 - cp' + p'^2)}.$$

24. Tweede driehoek ( $A_2 B_2 C_2$ ) van Brocard.

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a} : b : c$$

$$A_2 = \frac{c(b^2 + c^2 - a^2)}{2b^2 + 2c^2 - a^2} = \frac{cp}{c + p}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = a : \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b} : c$$

$$B_2 = \frac{c(a^2 + c^2 - b^2 + cp)}{2a^2 + 2c^2 - b^2} = \frac{c^2}{2c - p}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = a : b : \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c}$$

$$C_2 = \frac{b^2c + (a^2 + b^2 - c^2)p}{2a^2 + 2b^2 - c^2} = \frac{p^2}{2p - c}$$

25. Derde driehoek ( $A_3 B_3 C_3$ ) van Brocard.

$$\alpha : \beta : \gamma = a : \frac{2c^2 - a^2}{b} : \frac{2b^2 - a^2}{c}$$

$$A_3 = \frac{(2c^2 - a^2)c + (2b^2 - a^2)p}{2b^2 + 2c^2 - a^2} = \frac{c^2 + p^2}{c + p}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{2c^2 - b^2}{a} : b : \frac{2a^2 - b^2}{c}$$

$$B_3 = \frac{b^2c + (2a^2 - b^2)p}{2a^2 + 2c^2 - b^2} = \frac{p(c - p)}{2c - p}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{2b^2 - c^2}{a} : \frac{2a^2 - c^2}{b} : c$$

$$C_3 = \frac{c(2a^2 - c^2 + cp)}{2a^2 + 2b^2 - c^2} = \frac{c(p - c)}{2p - c}$$

26. De isodynamische middelpunten ( $VW$ ).

$$(V) \alpha : \beta : \gamma = \sin(A + \frac{\pi}{3}) : \sin(B + \frac{\pi}{3}) : \sin(C + \frac{\pi}{3})$$

$$(W) \alpha : \beta : \gamma = \sin(A - \frac{\pi}{3}) : \sin(B - \frac{\pi}{3}) : \sin(C - \frac{\pi}{3}).$$

In plaats van deze waarden in te voeren in de formule (8) bepalen we de vergelijkingen van twee cirkels van Apollonius waarop deze punten gelegen zijn. De cirkel loodrecht op  $AB$  heeft tot middelpunt

$$\theta = \frac{b^2c}{b^2 - a^2}$$



en tot straal

$$r = \frac{abc}{b^2 - a^2}$$

derhalve is de vergelijking van dezen cirkel

$$zz' - \frac{b^2 c}{b^2 - a^2} (z + z') + \frac{b^2 c^2}{b^2 - a^2} = 0.$$

Voor het middelpunt en den straal van den tweeden cirkel vindt men de waarden

$$\theta = \frac{c^2 p}{c^2 - a^2} \quad r = \frac{abc}{c^2 - a^2}$$

derhalve is de vergelijking van dezen cirkel

$$zz' - \frac{c^2 p'}{c^2 - a^2} z - \frac{c^2 p}{c^2 - a^2} z' + \frac{b^2 c^2}{c^2 - a^2} = 0.$$

Elimineert men uit deze beide vergelijkingen  $z'$  dan verkrijgt men

$$(c^2 - cp + p^2) z^2 - cp(c + p)z + c^2 p^2 = 0.$$

Beschouwt men de derdemachtsvergelijking

$$z^3 - (c + p)z^2 + cpz = 0$$

waaraan de hoekpunten des driehoeks voldoen, dan ziet men dat de gevonden vergelijking tot eerste lid heeft de Hessische covariant van het eerste lid dezer derdemachtsvergelijking (Beltrami). Lost men de gevonden vergelijking op, dan vindt men

$$V = -\frac{\epsilon^2 cp}{p + \epsilon c}$$

$$W = -\frac{\epsilon cp}{p + \epsilon^2 c}$$

$$\text{Waarin } \epsilon = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \sqrt[3]{1}.$$

Ten einde de onzekerheid, welke der gevonden waarden met  $V$  overeenkomt weg te nemen, bepalen we

$$O - V = \frac{p(c-p)(p' + \epsilon c)}{(p-p')(p + \epsilon c)}$$

$$O - W = \frac{p(c-p)(p' + \epsilon^2 c)}{(p-p')(p + \epsilon^2 c)}$$

waaruit volgt

$$(O - V)(O' - V') = r^2 \cdot \frac{(p + \epsilon^2 c)(p' + \epsilon c)}{(p + \epsilon c)(p' + \epsilon^2 c)}$$

$$(O - W)(O' - W') = r^2 \cdot \frac{(p + \epsilon c)(p' + \epsilon^2 c)}{(p + \epsilon^2 c)(p' + \epsilon c)}$$

Nu is

$$\begin{aligned}(p + \varepsilon^2 c)(p' + \varepsilon c) &= b^2 + c^2 - cp_1 - cp_2 \sqrt{3} \\ (p + \varepsilon c)(p' + \varepsilon^2 c) &= b^2 + c^2 - cp_1 + cp_2 \sqrt{3}\end{aligned}$$

wanneer men als vroeger stelt  $p = p_1 + ip_2$ .

Het punt  $V$  ligt dus binnen, het punt  $W$  buiten den omgeschreven cirkel. Het eerste dezer punten komt dus overeen met het punt waarvan de normale coördinaten zijn  $\sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right)$  enz.

Tevens volgt uit deze berekening dat

$$\text{mod. } OV. \text{ mod. } OW = r^2.$$

27. De inverse punten  $(V_2 W_2)$  van de isodynamische middelpunten.

$$\begin{aligned}(V_2) \alpha : \beta : \gamma &= \frac{1}{\sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right)} : \frac{1}{\sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right)} : \frac{1}{\sin\left(C + \frac{\pi}{3}\right)} \\ (W_2) \alpha : \beta : \gamma &= \frac{1}{\sin\left(A - \frac{\pi}{3}\right)} : \frac{1}{\sin\left(B - \frac{\pi}{3}\right)} : \frac{1}{\sin\left(C - \frac{\pi}{3}\right)}.\end{aligned}$$

De complexe waarden dezer punten vindt men het eenvoudigst door de waarden van  $V$  en  $W$  te substitueeren in formule (10). Na eenige herleiding vindt men dan

$$\begin{aligned}V_2 &= \frac{c(p - \varepsilon^3 p')}{(\varepsilon - \varepsilon^3)(p' + \varepsilon^2 c)} \\ W_2 &= \frac{c(p - \varepsilon p')}{(\varepsilon^2 - \varepsilon)(p' + \varepsilon c)}.\end{aligned}$$

28. De Jacobische punten  $(S T U)$ .

$$\begin{aligned}\alpha : \beta : \gamma &= -a : 2b : 2c \\ S &= \frac{2cp}{c + p} \\ \alpha : \beta : \gamma &= 2a : -b : 2c \\ T &= \frac{cp}{2c - p} \\ \alpha : \beta : \gamma &= 2a : 2b : -c \\ U &= \frac{cp}{2p - c}.\end{aligned}$$

Deze drie punten zijn de wortels van de vergelijking die men verkrijgt door de kubische covariant van

$$z^3 - (c + p)z^2 + cpz$$

gelijk nul te stellen.

29. De reciproke punten  $(S_1 T_1 U_1)$  van de Jacobische.

$$\alpha : \beta : \gamma = -\frac{1}{a^3} : \frac{1}{2b^3} : \frac{1}{2c^3}$$

$$S_1 = \frac{a^2(c^3 + b^2 p)}{a^2 b^2 + a^2 c^2 - 2b^2 c^2}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{2a^3} : -\frac{1}{b^3} : \frac{1}{2c^3}$$

$$T_1 = \frac{a^2(-2c^3 + b^2 p)}{a^2 b^2 + b^2 c^2 - 2a^2 c^2}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{2a^3} : \frac{1}{2b^3} : -\frac{1}{c^3}$$

$$U_1 = \frac{a^2(c^3 - 2b^2 p)}{a^2 c^2 + b^2 c^2 - 2a^2 b^2}.$$

30. Vergelijkingen van eenige rechte lijnen.

De vergelijking van de lijn van Euler vindt men door de vergelijking te bepalen van eene rechte gaande door het punt  $G$  en het punt  $O$ .

Door invoering der complexe waarden dezer punten vindt men

$$(p'^2 + 2pp' - 2cp' - cp)z + (p^2 + 2pp' - 2cp - cp')z' + (c^2 - b^2)(p + p') = 0.$$

Legt men eene lijn door  $O$  en  $K$  zoo vindt men de vergelijking van den diameter van Brocard:

$$p'(c - p')(c^2 - cp + p^2)z + p(c - p)(c^2 - cp' + p'^2)z' + b^2 c(b^2 - c^2) = 0.$$

De vergelijking van de lijn van Lemoine vindt men het eenvoudigst door de normale vergelijking

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0$$

te transformeeren met behulp van de betrekkingen:

$$\begin{aligned} \alpha : \beta : \gamma &= \frac{1}{a} [(c - p')z - (c - p)z' - c(p - p')] : \\ &: \frac{1}{b} (p'z - p z') : z' : z. \end{aligned}$$

Op deze wijze vindt men

$$p'(c - p')(c^2 - cp + p^2)z - p(c - p)(c^2 - cp' + p'^2)z' + b^2 c^2 (p' - p) = 0.$$

Op dezelfde wijze handelende gaat de normale vergelijking van de rechte van Longchamps

$$a^3 \alpha + b^3 \beta + c^3 \gamma = 0$$

over in

$$(p'^2 + 2 p p' - 2 c p' - c p) z - (p^2 + p p' - 2 b p - c p') z' - + a^2 (p' - p) = 0.$$

31. Vergelijkingen van eenige cirkels.

De vergelijking van den omgeschreven cirkel

$$z z' + \frac{p'(c-p)}{p-p'} z - \frac{p(c-p')}{p-p'} z' = 0$$

en die van den negenpuntscirkel

$$z z' + \frac{p'^2(c-p)}{2(p-p')} z - \frac{p^2 - c p'}{2(p-p')} z' + \frac{c(p+p')}{4} = 0$$

werden reeds vroeger bepaald.

32. De vergelijkingen van eenige kegelsneden.

Transformeeren we de vergelijking van den diameter van Brocard

$$p' m' (c^2 - c p + p^2) \zeta + p m (p^2 - c p' + p'^2) \zeta' + + b^2 c (b^2 - c^2) = 0$$

waarin  $m = c - p$  is gesteld, door middel van de formule (10)

$$\zeta = p z \frac{m' z - m z' + c p' - c p}{(p - p') z z' + m p' z - m' p z'}$$

dan vindt men gemakkelijk voor de vergelijking van den hyperbool van Kiepert

$$(c^2 - c p' + p'^2) z^2 - (c^2 - c p + p^2) z'^2 - c (p'^2 + c p) z + + c (p^2 + c p') z' = 0.$$

Bepaling van de vergelijking der ellips die de zijden des driehoeks in hunne middelpunten aanraakt. Schrijven we de vergelijking van deze ellips

$$A z^2 + 2 B z z' + A' z'^2 + 2 C z + 2 C' z' + D = 0$$

dan geeft de voorwaarde dat de lijn  $z - z' = 0$  deze ellips in twee

met  $\frac{c}{2}$  samenvallende punten snijdt, de betrekkingen

$$D(A + 2 B + A') = (C + C')^2$$

$$\frac{c}{2} = - \frac{C + C'}{A + 2 B + A'}$$

of 
$$A + 2 B + A' = \frac{4 D}{c^2}$$

en 
$$C + C' = - \frac{2 D}{c}.$$

Evenzoo geeft de voorwaarde dat de lijn  $p' z - p z' = 0$  de



ellips snijdt in twee met  $\frac{p}{2}$  samenvallende punten de betrekkingen

$$A + 2 B \frac{p'}{p} + A' \frac{p'^2}{p^2} = \frac{4 D}{p^2}$$

en

$$C + C' \frac{p'}{p} = - \frac{2 D}{p}.$$

Hieruit vindt men

$$C = \frac{2(c - p')}{c(p' - p)} D \quad C' = \frac{2(p - c)}{c(p' - p)} D.$$

Drukt men nu uit dat de ellips gaat door het punt  $\frac{c + p}{2}$  en vervangt dan  $C$  en  $C'$  door bovenstaande waarden, dan verkrijgt men

$$A(c + p)^2 + 2 B(c + p)(c + p') + A'(c + p')^2 = 12 D.$$

Lost men nu uit de drie gevonden vergelijkingen  $A, B, A'$  op dan vindt men

$$\frac{A N}{4 D} = c(p' - p)(c^2 - c p' + p'^2)$$

$$\frac{2 B N}{4 D} = -c(p' - p)(2 c^2 - c p - c p' + 2 p p')$$

$$\frac{A' N}{4 D} = c(p' - p)(c^2 - c p + p^2)$$

waarin  $N$  beteekent  $c^3(p' - p)^3$ .

De gevraagde ellips heeft dus tot vergelijking

$$\begin{aligned} (c^2 - c p' + p'^2) z^2 - (2 c^2 - c p - c p' + 2 p p') z z' + \\ + (c^2 - c p + p^2) z'^2 + c(c - p')(p' - p) z + \\ + c(p - c)(p' - p) z' + \frac{1}{4} c^2 (p' - p)^2 = 0. \end{aligned}$$

De eerste poolkromme van een punt  $\xi$  ten opzichte van eene kromme  $U = 0$  die door invoering van eene grootheid  $y$  homogeen gemaakt is, heeft tot vergelijking

$$\xi \frac{dU}{dz} + \xi' \frac{dU}{dz'} + y \frac{dU}{dy} = 0.$$

Stelt men nu

$$\begin{aligned} U = p'(c - p') z^3 + (p'^2 + 2 p p' - c p - c p') z^2 z' - \\ - (p^2 + 2 p p' - c p - c p') z z'^2 - p(c - p) z'^3 + c p'(p' - p) z^2 y - \\ - c(p'^2 - p^2) z z' y + c p(p' - p) z'^2 y = 0 \end{aligned}$$

d. i. het produkt der vergelijkingen van de drie zijden van den driehoek, en  $\xi = G = \frac{1}{3}(c + p)$ , dan verkrijgt men, zoo na her-

herleiding  $y$  weer door de eenheid vervangen wordt, voor de vergelijking van de ellips van Steiner

$$(c^2 - cp' + p'^2)z^2 - (2c^2 - cp - cp' + 2pp')zz' + (c^2 - cp + p^2)z'^2 + c(c-p')(p'-p)z + c(p-c)(p'-p)z' = 0$$

§ 3. Leiden we nu uit de voorgaande formules eenige gevolgen af.

1. Algemeene constructie.

Volgens de formules  $(S_1)$   $(S_2)$   $(S_3)$  kan een punt met normale coördinaten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  in de coördinatenstelsels, waarin  $A$ ,  $B$  en  $C$  respectievelijk tot oorsprong genomen worden, uitgedrukt worden door de waarden:

$$\frac{c\gamma}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \left( C + \frac{b\beta}{\gamma} \right) \\ \frac{a\alpha}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \left( A + \frac{c\gamma}{\alpha} \right) \\ \frac{b\beta}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \left( B + \frac{a\alpha}{\beta} \right).$$

Hieruit volgt dat het punt  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  gelegen is op de drie lijnen die de volgende paren punten verbinden:

$$A \text{ en } L = C + \frac{b\beta}{\gamma} \\ B \text{ en } M = A + \frac{c\gamma}{\alpha} \\ C \text{ en } N = B + \frac{a\alpha}{\beta}.$$

Ten einde dit punt te construeeren trekke men door  $C$  eene lijn in de richting van  $A$  naar  $B$  en zette daarop uit den afstand  $f_1 = \frac{b\beta}{\gamma}$ , door  $A$  eene lijn in de richting van  $B$  naar  $C$  en zette daarop uit den afstand  $f_2 = \frac{c\gamma}{\alpha}$ , door  $B$  eene lijn in de richting van  $C$  naar  $A$  en zette daarop uit den afstand  $f_3 = \frac{a\alpha}{\beta}$ ; deze drie lijnen zullen dan door het gevraagde punt gaan.

Deze constructie geeft aanleiding tot de volgende opmerkingen.

*a.* De grootheden  $f_1$   $f_2$   $f_3$  zijn ieder gelijk aan eene der zijden met het positieve of negatieve teeken voor elk der punten  $G$ ,  $I$ ,  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$  en  $J_\rho$ .

Men kan dus deze punten op zeer eenvoudige wijze construeeren.

*b.* Men vindt dat  $f_1$  gelijk is voor de paren punten:

$\nu$  en  $\Gamma_a$ ,  $\nu_a$  en  $\Gamma$ ,  $\nu_b$ ,  $\Gamma_c$ ,  $\nu_c$  en  $\Gamma_b$ , dat  $f_2$  gelijk is voor de paren:

$\nu$  en  $\Gamma_b$ ,  $\nu_a$  en  $\Gamma_c$ ,  $\nu_b$  en  $\Gamma$ ,  $\nu_c$  en  $\Gamma_a$  dat  $f_3$  gelijk is voor de paren:

$\nu$  en  $\Gamma_c$ ,  $\nu_a$  en  $\Gamma_b$ ,  $\nu_b$  en  $\Gamma_a$ ,  $\nu_c$  en  $\Gamma$ . Hieruit kan men besluiten dat

$\Gamma$  ligt op  $A\nu_a$ ,  $B\nu_b$ ,  $C\nu_c$

$\Gamma_a$  „  $A\nu$ ,  $B\nu_c$ ,  $C\nu_b$

$\Gamma_b$  „  $A\nu_c$ ,  $B\nu$ ,  $C\nu_a$

$\Gamma_c$  „  $A\nu_b$ ,  $B\nu_a$ ,  $C\nu$ .

*c.* Daar  $f_1$  voor  $\Omega_1$  en  $C_1$  dezelfde waarde heeft gaat de lijn  $A\Omega_1$  door  $C_1$ .

*c.* Daar  $f_1$  voor  $\Omega_2$  en  $B_1$  dezelfde waarde heeft gaat de lijn  $A\Omega_2$  door  $B_1$ .

Door vergelijking van  $f_2$  en  $f_3$  vindt men evenzoo dat de lijnen  $B\Omega_1$  door  $A_1$ ,  $B\Omega_2$  door  $C_1$ ,  $C\Omega_1$  door  $B_1$  en  $C\Omega_2$  door  $A_1$  gaan.

*d.* Daar  $f_1$  dezelfde waarde bezit voor  $K$ ,  $A_2$  en  $S$  zoo gaat de lijn  $AK$  door  $A_2$  en  $S$ ; evenzoo gaat de lijn  $BK$  door  $B_2$  en  $T$  en  $CK$  door  $C_2$  en  $U$ .

*e.* Daar  $f_1$  gelijk is voor  $D_1$ ,  $A_1$  en  $S_1$  gaat de lijn  $AD$  door  $A_1$  en  $S_1$ ; evenzoo gaat de lijn  $BE$  door  $B_1$  en  $T_1$  en  $CD$  door  $C_1$  en  $U_1$ .

*f.* Kent men het punt  $\Omega_1$  dan kan men daaruit het punt  $I_0$  afleiden. Immers  $\Omega_1$  bekend zijnde, zoo kan men de lengten  $f_1 f_2 f_3$  behoorende bij dit punt construeeren. Bepaalt men nu met deze zelfde lengten echter in de volgorde  $f_3 f_1 f_2$  een nieuw punt, dan is dit het punt  $I_0$ .

2. Vergelijkt men de gevonden waarden dan vindt men de volgende betrekkingen

$$\nu = 3G - 2I$$

$$\nu_a = 3G - 2I_a$$

$$\nu_b = 3G - 2I_b$$

$$\nu_c = 3G - 2I_c$$

$$H_0 = 3G - 2K$$

$$O = 3G - 2O_9$$

$$D = 3G - 2P$$

$$R = 3G - 2M$$

$$A_3 = 3G - 2A_2$$

$$B_3 = 3G - 2B_2$$

$$C_3 = 3G - 2C_2$$

waaruit volgt dat het punt  $I$  complementair is met  $\nu$  enz. Boven-  
dien kan men hieruit afleiden betrekkingen als  $\frac{O-R}{M-O_9} = 2$  enz.

3. Uit de gevonden waarden leidt men ook af

$$\begin{aligned} A + B + C &= 3 G \\ A_1 + B_1 + C_1 &= 3 G \\ \Omega_1 + \Omega_2 + D &= 3 G \\ J_\delta + J_\rho + I_0 &= 3 G \\ R + \rho_1 + \rho_2 &= 3 G \\ R + N + H &= 3 G \end{aligned}$$

waaruit blijkt dat de driehoeken  $ABC$ ,  $A_1 B_1 C_1$ ,  $\Omega_1 \Omega_2 D$ ,  $J_\delta J_\rho I_0$ ,  $R \rho_1 \rho_2$  en  $RNH$  allen hetzelfde zwaartepunt bezitten.

4. Eveneens vindt men

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 &= 2 M \\ N + H &= 2 M \\ V_2 + W_2 &= 2 M \\ A + S &= 2 A_2 \\ B + T &= 2 B_2 \\ C + U &= 2 C_2 \\ J_\delta + J_\rho &= I_0 + Q \end{aligned}$$

welke vergelijkingen gemakkelijk te interpreteren zijn.

5. Constructie voor het punt  $O_9$ .

Uit

$$O_9 = \frac{p^2 - c p'}{2(p - p')} = \frac{p^2 - p p' + p p' - c p'}{2(p - p')} = \frac{p}{2} + \frac{p'(p - c)}{2(p - p')}$$

volgt

$$O_9 = \frac{1}{2}(p + O').$$

Deze betrekking geeft aanleiding tot de volgende constructie. Bepaal het spiegelbeeld  $O'_c$  van het middelpunt van den omgeschreven cirkel ten opzichte van de zijde  $c$ , dan ligt het middelpunt van den negenpuntscirkel juist in het midden der lijn die dit spiegelbeeld  $O'_c$  met het hoekpunt  $C$  verbindt.

Het is wel duidelijk dat hetzelfde punt gevonden wordt door de spiegelbeelden  $O'_a$  en  $O'_b$  van  $O'$  ten opzichte van de zijden  $a$  en  $b$  te verbinden met de hoekpunten  $A$  en  $B$  en deze verbindingslijnen middendoor te deelen.

6. Betrekkingen tusschen punten op de lijn van Euler.

Bepaalt men  $H - O = \frac{p^2 + 2 p p' - 2 c p - c p'}{p - p'}$



$$O_9 - O = \frac{p^2 + 2pp' - 2cp - cp'}{p - p'}$$

$$G - O = \frac{p^2 + 2pp' - 2cp - cp'}{p - p'}$$

dan ziet men dat

$$3(G - O) = 2(O_9 - O) = H - O$$

derhalve dat

$$3GO = 2O_9O = HO.$$

7. Betrekkingen tusschen de punten  $V$  en  $W$  en verschillende anderen.

Eene eenvoudige berekening doet zien dat

$$\frac{A - V}{A - W} = \varepsilon \frac{p + \varepsilon^2 c}{p + \varepsilon c} = - \frac{S - V}{S - W}$$

$$\frac{B - V}{B - W} = \varepsilon^2 \frac{p + \varepsilon^2 c}{p + \varepsilon c} = - \frac{T - V}{T - W}$$

$$\frac{C - V}{C - W} = \frac{p + \varepsilon^2 c}{p + \varepsilon c} = - \frac{U - V}{U - W}$$

$$\frac{O - V}{O - W} = \frac{(p + \varepsilon^2 c)(p' + \varepsilon c)}{(p + \varepsilon c)(p' + \varepsilon^2 c)} = - \frac{K - V}{K - W}$$

$$\frac{\Omega_1 - V}{\Omega_1 - W} = \varepsilon^2 \cdot \frac{(p + \varepsilon^2 c)(p' + \varepsilon c)}{(p + \varepsilon c)(p' + \varepsilon^2 c)}$$

$$\frac{\Omega_2 - V}{\Omega_2 - W} = \varepsilon \cdot \frac{(p + \varepsilon^2 c)(p' + \varepsilon c)}{(p + \varepsilon c)(p' + \varepsilon^2 c)}$$

$$\frac{G - V}{G - W} = \left( \frac{p + \varepsilon^2 c}{p + \varepsilon c} \right)^3 \quad ^1)$$

$$(G - V)(G - W) = \frac{1}{9}(c^2 - cp + p^2).$$

Hieruit volgt dat de punten  $A$  en  $S$ ,  $B$  en  $T$ ,  $C$  en  $U$  en  $O$  en  $K$  harmonisch verwant zijn met  $V$  en  $W$ .

Verder blijkt dat

$$\Omega_1 V : \Omega_1 W = \Omega_2 V : \Omega_2 W = OV : OW = KV : KW =$$

$$= \overline{AV}^2 : \overline{AW}^2 = \overline{BV}^2 : \overline{BW}^2 = \overline{CV}^2 : \overline{CW}^2$$

$$GV : GW = \overline{AV}^3 : \overline{AW}^3 = \overline{BV}^3 : \overline{BW}^3 = \overline{CV}^3 : \overline{CW}^3$$

en, zoo men onder  $\angle WTV$  den hoek verstaat welke de lijn  $WT$  in positieve richting moet doorloopen om met de lijn  $VT$  samen te vallen

<sup>1)</sup> Beltrami.

$$\angle W A V = \frac{2}{3} \pi + \angle W C V$$

$$\angle W B V = \frac{4}{3} \pi + \angle W C V$$

$$\angle W S V = \pi + \frac{2}{3} \pi + \angle W C V$$

$$\angle W T V = \pi + \frac{4}{3} \pi + \angle W C V$$

$$\angle W U V = \pi + \angle W C V$$

$$\angle W G V = 3 \angle W C V$$

$$\angle W \Omega_1 V = \frac{4}{3} \pi$$

$$\angle W \Omega_2 V = \frac{2}{3} \pi.$$

8. De Brocardsche punten  $\Omega_1$  en  $\Omega_2$  zijn de isodynamische middelpunten of de Hessische punten van  $V$ ,  $W$  en  $K$  (Morley).

Onderstellen we dat de driehoek  $o c p$  rechtstreeks gelijkvormig is met den driehoek  $z_1 z_2 z_3$ , dan is

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c & p \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

of

$$p = \frac{c(z_1 - z_3)}{z_1 - z_2}.$$

Hiermede wordt

$$V = \frac{c(z_1 - z_3)}{z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3}, \quad W = \frac{c(z_1 - z_3)}{z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3}.$$

Verplaatst men nu den driehoek totdat het punt  $o$  ( $A$ ) met het punt  $z_1$  en de lijn  $o c$  ( $A B$ ) met de lijn  $z_1 z_2$  samenvalt, dan ondergaat elk punt van den driehoek eene transformatie die voorgesteld kan worden door de vergelijking:

$$T = \frac{z_2 - z_1}{c} Z + z_1.$$

Vervangt men hierin  $Z$  door  $V$  en daarna door  $W$ , zoo vindt men voor de bepaling van deze punten voor een geheel willekeurig driehoek  $z_1 z_2 z_3$

$$V = - \frac{\tilde{z}_2 \tilde{z}_3 + \varepsilon^2 \tilde{z}_1 \tilde{z}_3 + \varepsilon \tilde{z}_1 \tilde{z}_2}{\tilde{z}_1 + \varepsilon^2 \tilde{z}_2 + \varepsilon \tilde{z}_3}$$

$$W = - \frac{\tilde{z}_2 \tilde{z}_3 + \varepsilon \tilde{z}_1 \tilde{z}_3 + \varepsilon^2 \tilde{z}_1 \tilde{z}_2}{\tilde{z}_1 + \varepsilon \tilde{z}_2 + \varepsilon^2 \tilde{z}_3}.$$

Stelt men hierin

$$z_1 = -\frac{\varepsilon^2 c p}{p + \varepsilon c} \quad z_2 = -\frac{\varepsilon c p}{p + \varepsilon^2 c} \quad z_3 = K$$

dan vindt men, kortheidshalve schrijvende

$$\begin{aligned} n &= (p + \varepsilon c) (p + \varepsilon^2 c): \\ V &= c p \cdot \frac{(2p - c) K - c p}{c p (p - 2c) + K n} \\ W &= c p \cdot \frac{(2c - p) K - c p}{c p (c - 2p) + K n}. \end{aligned}$$

Substitueert men hierin voor  $n$  en  $K$  hunne waarden, dan komt

$$\begin{aligned} V &= \frac{c^2 p}{c^2 - c p' + p p'} = \Omega_2 \\ W &= \frac{c p p'}{c^2 - c p + p p'} = \Omega_1. \end{aligned}$$

Op gelijke wijze vindt men dat de Hessische punten van  $V W A$ ,  $V W B$ ,  $V W C$ ,  $V W S$ ,  $V W T$ ,  $V W U$  respectievelijk zijn  $T$  en  $U$ ,  $U$  en  $S$ ,  $S$  en  $T$ ,  $B$  en  $C$ ,  $C$  en  $A$ ,  $A$  en  $B$ .

9. Verhoudingen van de afstanden van de punten  $\Omega_1$  en  $\Omega_2$  tot de hoekpunten van den driehoek.

Uit de verhoudingen

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_1 - A}{\Omega_2 - A} &= \frac{p'}{c} \cdot \frac{b^2 + c^2 - c p'}{b^2 + c^2 - c p} \\ \frac{\Omega_1 - B}{\Omega_2 - B} &= \frac{c}{c - p'} \cdot \frac{b^2 + c^2 - c p'}{b^2 + c^2 - c p} \\ \frac{\Omega_1 - C}{\Omega_2 - C} &= \frac{p' - c}{p'} \cdot \frac{b^2 + c^2 - c p'}{b^2 + c^2 - c p} \end{aligned}$$

volgt onmiddellijk, zoo men de moduli vergelijkt

$$\begin{aligned} \Omega_1 A : \Omega_2 A &= b : c \\ \Omega_1 B : \Omega_2 B &= c : a \\ \Omega_1 C : \Omega_2 C &= a : b \end{aligned}$$

10. Groepen punten die op eene rechte liggen.

$a$ . De punten  $R$ ,  $D$ ,  $O$  liggen op eene rechte. Om dit te bewijzen is het voldoende aan te toonen dat  $D - O : R - O$  eene reële waarde heeft. Nu is

$$\begin{aligned} D - O &= \frac{p' (p' - c) (c^2 - c p + p^2)^2}{(p - p') (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)} \\ R - O &= \frac{p' (p' - c) (c^2 - c p + p^2)}{(p - p') (c^2 - c p' + p'^2)} \end{aligned}$$

dus 
$$\frac{D - O}{R - O} = \frac{(c^2 - c p + p^2) (c^2 - c p' + p'^2)}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} = \text{reël.}$$

Natuurlijk ligt het punt  $N$  van Tarry ook op deze lijn.

*b.* De punten  $G$ ,  $V$ ,  $W_2$  liggen op eene rechte en evenzoo  $G$ ,  $V_2$ ,  $W$  en  $V_2$ ,  $K$ ,  $W_2$  want

$$G - V = \frac{(p + \varepsilon^2 c)^2}{3(p + \varepsilon c)}$$

$$G - W_2 = \frac{(p + \varepsilon^2 c)(p' + \varepsilon^2 c)}{3(p' + \varepsilon c)}$$

dus 
$$\frac{G - V}{G - W_2} = \frac{(p + \varepsilon^2 c)(p' + \varepsilon c)}{(p + \varepsilon c)(p' + \varepsilon^2 c)} = \text{reëel.}$$

Verder is

$$G - V_2 = \frac{(p + \varepsilon c)(p' + \varepsilon c)}{3(p' + \varepsilon^2 c)}$$

$$G - W = \frac{(p + \varepsilon c)^2}{3(p + \varepsilon^2 c)}$$

$$\frac{G - V_2}{G - W} = \frac{(p + \varepsilon^2 c)(p' + \varepsilon c)}{(p + \varepsilon c)(p' + \varepsilon^2 c)}$$

en 
$$\frac{K - V_2}{K - W_2} = - \frac{(p + \varepsilon^2 c)(p' + \varepsilon c)}{(p + \varepsilon c)(p' + \varepsilon^2 c)}.$$

Tevens volgt uit deze berekening

$$GV : GW_2 = GV_2 : GW = OV : OW = KV : KW = KV_2 : KW_2 \\ = \overline{AV}^2 : \overline{AW}^2 = \text{enz.}$$

*c.* De punten  $S_1$ ,  $T_1$ ,  $U_1$  liggen op eene rechte. Men mag dit besluiten uit de betrekking

$$\frac{T_1 - S_1}{U_1 - S_1} = - \frac{a^2 c^2 + b^2 c^2 - 2 a^2 b^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 - 2 a^2 c^2} = \text{reëel.}$$

Merken we tevens op dat de vergelijking der lijn door deze 3 punten gebracht, is

$$(p'^2 + 2 pp' - 2 c p' - c p) z - (p^2 + 2 pp' - 2 c p - c p') z' + \\ + a^2 (p' - p) = 0$$

*d. i.* de vergelijking van de lijn van Longchamps.

*d.* De punten  $A_1$ ,  $G$ ,  $A_2$  liggen op eene rechte en evenzoo de punten  $B_1$ ,  $G$ ,  $B_2$  en  $C_1$ ,  $G$ ,  $C_2$ .

Dit volgt uit de vergelijkingen

$$\frac{A_1 - G}{A_2 - G} = - \frac{2 b^2 + 2 c^2 - a^2}{a^2 + b^2 + c^2} = - \frac{K - A}{A_2 - A} \\ \frac{B_1 - G}{B_2 - G} = - \frac{2 a^2 + 2 c^2 - b^2}{a^2 + b^2 + c^2} = - \frac{K - B}{B_2 - B} \\ \frac{C_1 - G}{C_2 - G} = - \frac{2 a^2 + 2 b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = - \frac{K - C}{C_2 - C}$$



waaruit men tevens kan afleiden de verhoudingen

$$A_1 G : G A_2 = A K : A A_2$$

$$B_1 G : G B_2 = B K : B B_2$$

$$C_1 G : G C_2 = C K : C C_2$$

en de gelijkheden

$$\frac{A_1 - G}{A_2 - G} + \frac{B_1 - G}{B_2 - G} + \frac{C_1 - G}{C_2 - G} = -3$$

$$\frac{K - A}{A_2 - A} + \frac{K - B}{B_2 - B} + \frac{K - C}{C_2 - C} = 3.$$

11. We zagen reeds dat de punten  $A, K, S$  evenals  $B, K, T$  en  $C, K, U$ , drie aan drie op eene rechte liggen. Berekent men de verhoudingen

$$\frac{S - K}{S - A} = \frac{3 a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\frac{T - K}{T - B} = \frac{3 b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\frac{U - K}{U - C} = \frac{3 c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

dan volgt hieruit de betrekking

$$\frac{S - K}{S - A} + \frac{T - K}{T - B} + \frac{U - K}{U - C} = 3.$$

Op dezelfde wijze berekenende

$$\frac{D - A}{S_1 - A} = \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 - 2 b^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$$

$$\frac{D - B}{T_1 - B} = \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 - 2 a^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$$

$$\frac{D - C}{U_1 - C} = \frac{a^2 c^2 + b^2 c^2 - 2 a^2 b^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2},$$

komt

$$\frac{D - A}{S_1 - A} + \frac{D - B}{T_1 - B} + \frac{D - C}{U_1 - C} = 0.$$

12. Vergelijkt men de ellips van Steiner met de algemeene kegelsnede

$$A z^2 + 2 B z z' + A' z'^2 + 2 C z + 2 C' z' + D = 0$$

dan vindt men

$$A = c^2 - c p' + p'^2$$

$$B = -\frac{1}{2} (2 c^2 - c p - c p' + 2 p p')$$

$$C = \frac{1}{2} (c - p') (p' - p)$$

$$D = 0$$

waaruit volgt

$$A A' - B^2 = \frac{3}{4} c^2 (p' - p)^2$$

$$C A' - B C' = -\frac{1}{4} c^2 (c + p) (p' - p)^2$$

$$D A' - C'^2 = -\frac{1}{4} (c - p)^2 (p' - p)^2.$$

Hieruit is de vergelijking die de brandpunten bepaalt

$$3 z^2 - 2 (c + p) z - (c - p)^2 = 0.$$

Berekent men op dezelfde wijze de brandpunten van de tweede ellips die in § 2 werd bepaald, dan vindt men, aangezien  $A$ ,  $B$  en  $C$  dezelfde zijn, alleen eene andere waarde voor  $D A' - C'^2$  en wel is

$$D A' - C'^2 = \frac{1}{4} c^3 p (p' - p)^2.$$

De vergelijking der brandpunten wordt dus hier:

$$2 z^2 - 2 (c + p) z + c p = 0.$$

Noemt men de eerste brandpunten  $F_1$  en  $F_2$ , de laatste  $f_1$  en  $f_2$  dan is

$$F_1 - G = \frac{2}{3} \sqrt{c^2 - c p + p^2} = 2 (f_1 - G)$$

$$F_2 - G = -\frac{2}{3} \sqrt{c^2 - c p + p^2} = 2 (f_2 - G).$$

Deze brandpunten liggen dus op eene zelfde lijn, gaande door het zwaartepunt.

§ 4. De eerste poolpunten van een punt  $\zeta$  ten opzichte van de hoekpunten van een driehoek die voldoen aan de derde machts-vergelijking

$$a_0 z^3 + 3 a_1 z^2 + 3 a_2 z + a_3 = 0 \quad (1)$$

worden bepaald door de vergelijking

$$(a_1 + a_0 \zeta) z^2 + 2 (a_2 + a_1 \zeta) z + a_3 + a_2 \zeta = 0. \quad (2)$$

Men vindt deze vergelijking door de derde machts-vergelijking in homogenen vorm te schrijven

$$S = a_0 z_3 + 3 a_1 z^2 y + 3 a_2 z y^2 + a_3 y^3 = 0$$

$$\zeta \frac{dS}{dz} + \eta \frac{dS}{dy} = 0$$

te bepalen, en daarna  $y = \eta = 1$  te stellen. Zijn de wortels van

de vergelijking (1)  $z_1, z_2, z_3$  dan kan men de vergelijking (2) ook schrijven;

$$\frac{3}{z - \zeta} = \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - z_3}. \quad (3).$$

Vergelijkt men (2) met de vergelijking

$$(a_0 a_2 - a_1^2) z^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) z + a_1 a_3 - a_2^2 = 0$$

welke de Hessische punten bepaalt, dan blijkt uit formule (12) § 1, dat de eerste poolpunten van  $\zeta$  harmonisch verwant zijn met de Hessische punten en derhalve met deze op den omtrek van een cirkel gelegen zijn. Ter verdere bepaling dezer eerste poolpunten  $P_1$  en  $P_2$  van  $\zeta$  merken we op dat

$$y = \frac{P_1 + P_2}{2} = -\frac{a_1 \zeta + a_2}{a_0 \zeta + a_1} \quad (4).$$

We kunnen dus  $y$  uit  $\zeta$  afleiden door eene lineaire transformatie. De dubbele punten dezer transformatie  $f_1$  en  $f_2$  voldoen aan de vergelijking

$$a_0 f^2 + 2 a_1 f + a_2 = 0 \quad (5),$$

derhalve kan deze transformatie geschreven worden

$$\frac{y - f_1}{y - f_2} = -\frac{\zeta - f_1}{\zeta - f_2}.$$

Zijn dus de punten  $f_1, f_2$  en  $\zeta$  bekend, dan kan men het punt  $y$  dat met  $\zeta$  harmonisch verwant is ten opzichte van  $f_1$  en  $f_2$  construeeren.

Kiezen we het coördinatenstelsel evenals vroeger, dan wordt de vergelijking (1)

$$z^3 - (c + p) z^2 + c p = 0$$

en de vergelijking (5)

$$3 f^2 - 2 (c + p) f + c p = 0. \quad (6)$$

Deze punten zijn volgens de vorige paragraaf juist de brandpunten van de eerste ellips waarvan de vergelijking in § 2 werd bepaald. <sup>1)</sup>

Ten einde deze punten te construeeren, schrijve men

$$f_1 = \frac{c + p}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{c^2 - c p + p^2}$$

$$f_2 = \frac{c + p}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{c^2 - c p + p^2}$$

of

$$\begin{aligned} f_1 - G &= \sqrt{(G - V)(G - W)} \\ f_2 - G &= -\sqrt{(G - V)(G - W)}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> F. J. van den Berg, Nieuw Archief voor Wiskunde. Dl. IX.

Dus is

$$\frac{f - G}{V - G} = \frac{W - G}{f - G},$$

welke vergelijking geldt voor beide punten.

Hieruit ziet men dat de punten  $f$  gelegen zijn op de lijn die den hoek  $V G W$  midden door deelt, en wel ter weêrszijde van het punt  $G$  op een afstand van dit punt die middenevenredig is tusschen de afstanden van dit punt tot de punten  $V$  en  $W$ .

Vergelijkt men de punten (6) met de Hessische  $V$  en  $W$  welke bepaald worden door de vergelijking

$$(c^2 - c p + p^2) z^2 - c p (c + p) z + c^2 p^2 = 0$$

dan doet de formule (12) van § 1, ook zien dat de punten  $f$  harmonisch verwant zijn met de punten  $V$  en  $W$ .

Hieruit volgt een nieuwe constructie voor de punten  $f$ . Immers uit de harmonische ligging volgt dat de punten  $f$ ,  $V$  en  $W$  op een cirkel liggen. Het middelpunt van dezen cirkel ligt dus op de lijn die in  $G$  loodrecht op de deellijn van hoek  $V G W$  wordt opgericht en tevens op de loodlijn die de koorden  $V W$  midden door deelt. De punten  $f$  worden ook de brandpunten van Steiner genoemd (zie Casey Analyt. geom. of the point, line etc. sec. Ed. p. 455).

Heeft men nu de punten  $f_1$  en  $f_2$  geconstrueerd dan is derhalve het bij  $\xi$  behoorende punt  $y$  het snijpunt van den omgeschreven cirkel van den driehoek  $\xi f_1 f_2$  met de lijn, die den pool van  $f_1 f_2$  ten opzichte van dezen cirkel met het punt  $\xi$  verbindt.

De vraag is nu uit het punt  $y$  dat bekend is, de punten  $P_1$  en  $P_2$  af te leiden. Daartoe maken we gebruik van de eigenschappen dat deze beide punten harmonisch gelegen zijn met de punten  $V$  en  $W$  en dat deze beide punten op eene rechte lijn liggen gaande door  $y$ , terwijl zij evenver van  $y$  verwijderd zijn.

Uit het voorgaande volgt terstond deze constructie: deel den hoek  $V y W$  middendoor, richt in  $y$  eene loodlijn op deze deellijn op en construeer eene lijn die de lijn  $V W$  loodrecht middendoor deelt; beschrijf met het snijpunt dezer loodlijnen als middelpunt een cirkel die door  $V$  en  $W$  gaat, dan zullen de snijpunten van dezen cirkel met de deellijn van den hoek  $V y W$  de gevraagde punten  $P_1$  en  $P_2$  zijn.

Neemt men  $\xi$  op den omtrek van den cirkel die door  $f_1 f_2 V$  en  $W$  gaat dan zullen de punten  $P_1$  en  $P_2$  op een vasten cirkel liggen die door  $V$  en  $W$  gaat, waarvan het middelpunt een der snijpunten is van den eersten cirkel met de lijn die  $V W$  loodrecht middendoor deelt.



De eerste poolpunten van  $\xi$  liggen ook op twee gelijkzijdige hyperbolen. Wanneer men toch uit de vergelijking die deze poolpunten bepaalt

$$(a_1 + a_0 \xi) z^2 + 2(a_2 + a_1 \xi) z + a_3 + a_2 \xi = 0$$

afleidt

$$(a_1' + a_0' \xi') z'^2 + 2(a_2' + a_1' \xi') z' + a_3' + a_2' \xi' = 0$$

dan volgen door optelling en aftrekking deze vergelijkingen

$$(a_1 + a_0 \xi) z^2 + (a_1' + a_0' \xi') z'^2 + 2(a_2 + a_1 \xi) z + 2(a_2' + a_1' \xi') z' + a_3 + a_2 \xi + a_3' + a_2' \xi' = 0$$

$$(a_1 + a_0 \xi) z^2 - (a_1' + a_0' \xi') z'^2 + 2(a_2 + a_1 \xi) z - 2(a_2' + a_1' \xi') z' + a_3 + a_2 \xi - a_3' - a_2' \xi' = 0 \quad 1)$$

welke gelijkzijdige hyperbolen voorstellen met hetzelfde middelpunt

$$y = -\frac{a_2 + a_1 \xi}{a_1 + a_0 \xi}$$

terwijl de asymptoten van den tweeden hyperbool de hoeken gevormd door de asymptoten van den eersten middendoordeelen.

De richtingen van de asymptoten van den eersten hyperbool worden bepaald door

$$A z^3 + A' z'^2 = 0$$

waarin  $A = a_1 + a_0 \xi$ . Ontbindt men deze vergelijking in

$$(A - i \sqrt{AA'}) z - (A' + i \sqrt{AA'}) z' = 0$$

$$(A + i \sqrt{AA'}) z - (A' - i \sqrt{AA'}) z' = 0$$

dan blijkt de eerste lijn te zijn de verbindingslijn van het punt  $A' + i \sqrt{AA'}$  met den oorsprong van coördinaten. Men kan die richtingen dus gemakkelijk construeeren.

Het tweede poolpunt van een punt  $\xi$  ten opzichte van de hoekpunten van een driehoek wordt bepaald door de vergelijking

$$\xi^2 \frac{d^2 S}{dz^2} + 2 \xi \eta \frac{d^2 S}{dz dy} + \eta^2 \frac{d^2 S}{dy^2} = 0;$$

wanneer men na de bewerking  $y = \eta = 1$  stelt, wordt deze vergelijking

$$(a_0 \xi^2 + 2 a_1 \xi + a_2) z + (a_1 \xi^2 + 2 a_2 \xi + a_3) = 0 \quad (7)$$

welke zich ook laat schrijven

1) In normale coördinaten zijn de vergelijkingen dezer hyperbolen  
 $\alpha^2 (\gamma' \cos C - \beta' \cos B) + \beta^2 (\alpha' \cos A - \gamma \cos C) + \gamma^2 (\beta' \cos B - \alpha' \cos A) +$   
 $2 \beta \gamma (\gamma' \cos B - \beta' \cos C) + 2 \alpha \gamma (\alpha' \cos C - \gamma' \cos A) + 2 \alpha \beta (\beta' \cos A - \alpha' \cos B) = 0$   
 $\alpha^2 (\beta' \sin B + \gamma' \sin C) + \beta^2 (\alpha' \sin A + \gamma' \sin C) + \gamma^2 (\beta' \sin B + \alpha' \sin A) +$   
 $2 \beta \gamma (\beta' \sin C + \gamma' \sin B) + 2 \alpha \gamma (\alpha' \sin C + \gamma' \sin A) + 2 \alpha \beta (\beta' \sin A + \alpha' \sin B) = 0$   
 zoo  $\alpha' \beta' \gamma'$  de normale coördinaten van het punt  $\xi$  aanduiden.

$$\frac{z - z_1}{\zeta - z_1} + \frac{z - z_2}{\zeta - z_2} + \frac{z - z_3}{\zeta - z_3} = 0. \quad (8)$$

Vergelijkt men de vergelijking (7) met (2) dan ziet men dat men de eerste uit de laatste kan afleiden door  $z$  en  $\zeta$  te verwisselen. Hieruit volgt dat het hier gezochte punt  $z$  hetzelfde is voor de beide punten  $\zeta$  die voldoen aan de vergelijking (7); deze punten zijn echter volgens het voorgaande harmonisch verwant ten opzichte van de Hessische punten  $V$  en  $W$ . Noemt men dus  $\zeta_1$  het hier gegeven punt en  $\zeta_2$  het punt dat met  $\zeta_1$  harmonisch verwant is ten opzichte van  $V$  en  $W$ , dan vormen de punten  $\zeta_1 \zeta_2$  het systeem eerste poolpunten van  $z$ . Wil men dus  $z$  construeeren dan komt dit neêr op de bepaling van het punt  $z$ , waarvan de eerste poolpunten gegeven zijn. Volgens zooeven kan men dus  $z$  construeeren door eerst het punt  $y = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}$  te bepalen, daarna een cirkel te construeeren door de punten  $y, f_1$  en  $f_2$ , verder den pool te zoeken van de lijn  $f_1 f_2$  ten opzichte van den cirkel door  $y, f_1, f_2$  gebracht en eindelijk door dezen pool en het punt  $y$  eene lijn te trekken. Het tweede snijpunt dezer lijn men den cirkel door  $y, f_1, f_2$  is dan het gevraagde punt  $z$ .

Onderstellen we dat een punt  $\zeta$  den omgeschreven cirkel doorloopt en vragen we eens welke meetkundige plaats dan de eerste poolpunten beschrijven.

Uit de vergelijking (4) volgt dat indien  $\zeta$  een cirkel doorloopt ook  $y$  een cirkel zal doorloopen. Om te weten welken cirkel  $y$  beschrijft kiezen we als gewoonlijk

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -\frac{c+p}{3} \quad a_2 = \frac{cp}{3} \quad a_3 = 0$$

dan is

$$y = \frac{(c+p)\zeta - cp}{3\zeta - (c+p)}.$$

Heeft nu  $\zeta$  de waarde  $o, c$  of  $p$ , zoo vindt men voor  $y$  de waarden

$$\frac{cp}{c+p}, \quad \frac{c^2}{2c-p}, \quad \frac{p^2}{2p-c}$$

behoorende bij de punten  $A_2 B_2 C_2$ . De cirkel welke  $y$  doorloopt is dus juist de cirkel van Brocard (Morley).

Deelt men nu den hoek  $V y W$  middendoor dan gaat deze lijn door  $K$ . Richt men in  $y$  op deze deellijn eene loodlijn op dan gaat deze door het punt  $O$ . Men behoeft dus om  $P_1$  en  $P_2$  te vinden slechts het snijpunt  $E$  van de lijn  $Oy$  en de lijn die  $VW$  lood-

recht middendoor deelt te bepalen en uit  $E$  als middelpunt een cirkel te beschrijven die door  $V$  en  $W$  gaat. De snijpunten van dezen cirkel met de lijn  $yK$  zijn dan de gevraagde. Daar echter elke cirkel door  $V$  en  $W$  gebracht den omgeschreven cirkel snijdt volgens eene lijn gaande door  $K$  en deze lijn loodrecht staat op de lijn die  $O$  met  $E$  verbindt, zoo blijkt dat de gevraagde punten  $P_1$  en  $P_2$  juist op den omtrek van den omgeschreven cirkel gelegen zijn (Beltrami).

Ten slotte willen we nog eenige bijzonderheden uit de substitutie

$$z = \frac{(c+p)\zeta - cp}{3\zeta - (c+p)}$$

afleiden.

Wanneer men stelt voor  $\zeta: \frac{c+p}{2}, \frac{p}{2}, \frac{c}{2}$ , vindt men voor  $y$

$$\frac{c^2 + p^2}{c+p}, \quad \frac{p(c-p)}{2c-p}, \quad \frac{c(p-c)}{2p-c}.$$

welke waarden overeenkomen met die van den derden driehoek van Brocard. Doorloopt dus  $\zeta$  den negenpuntscirkel dan beschrijft  $y$  de omgeschreven cirkel van den derden driehoek van Brocard. Wanneer  $\zeta$  de rechte lijn  $AB$  doorloopt, beschrijft  $y$  den cirkel gaande door  $A_2B_2$  en  $C_3$ . Met het punt  $\infty$  op de lijn  $AB$  correspondeert het punt  $G$ ; de cirkel door  $A_2B_2$  en  $C_3$  gaat dus door  $G$ , evenzoo gaan de cirkels die corresponderen met de rechten  $BC$  en  $CA$  door het zwaartepunt.

Stelt men  $\zeta$  gelijk  $V$  dan wordt  $y$  gelijk  $W$  en stelt men  $\zeta$  gelijk  $W$  dan wordt  $y$  gelijk  $V$ . Elke cirkel dus gaande door  $V_3W$  wordt getransformeerd in een anderen die door dezelfde punten gaat. De cirkels van Apollonius die door  $VVW$ ,  $BVW$ ,  $CVW$  gaan, worden dus getransformeerd in cirkels die door  $A_2VW$ ,  $B_2VW$ ,  $C_2VW$  gaan. De rechte lijn door  $VW\infty$  gaat over in een cirkel door de punten  $VW$  en  $G$ .

Merkt men op dat voor  $\zeta = G = \frac{c+p}{3}$ ,  $y = \infty$  dan blijkt dat elke rechte door  $G$  overgaat in eene rechte.

De voorgaande substitutie kan eenvoudiger geschreven worden, immers heeft men

$$y - \frac{c+p}{3} = \frac{c^2 - cp + p^2}{9\left(\zeta - \frac{c+p}{3}\right)}$$

of opmerkende dat

$$(G - V)(G - W) = \frac{1}{9}(c^2 - cp + p^2)$$

zoo komt

$$y - G = \frac{(V - G)(W - G)}{\zeta - G}.$$

Stelt men achtereenvolgens

$$\zeta = A, B, C, \frac{B + C}{2}, \frac{A + C}{2}, \frac{A + B}{2}$$

en daarmede gelijktijdig

$$y = A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$$

dan heeft men

$$\Delta G V y \propto \Delta G \zeta W.$$

Neemt men  $G$  als oorsprong van coördinaten en de deellijn van hoek  $VGW$  als  $x$  as aan en stelt men

$$\text{mod. } (V - G)(W - G) = f^2$$

dan kunnen we de voorgaande substitutie schrijven

$$y = \frac{f^2}{\zeta}.$$

Doorloopt dus  $\zeta$  een cirkel met straal  $r$  uit den oorsprong van coördinaten beschreven, dan doorloopt  $y$  een daarmede concentrischen cirkel met straal  $\frac{f^2}{r}$ ; doorloopt  $\zeta$  eene lijn door den oorsprong getrokken, die eenen hoek  $\theta$  maakt met de positieve  $x$  as, dan doorloopt evenzoo  $y$  eene lijn door den oorsprong gaande welke eenen hoek  $-\theta$  met de positieve  $x$  as vormt.

Men kan dus elk punt gemakkelijk transformeeren door zoowel den cirkel waarvan de oorsprong het middelpunt is en welke door dit punt gaat, als den straal van dezen cirkel op welke dit punt ligt te transformeeren. Elke figuur kan dus getransformeerd worden door haar te invertceeren ten opzichte van een cirkel met straal  $f$  uit  $G$  beschreven en vervolgens de verkregen figuur te spiegelen in de lijn  $Gf_1$ .

Door deze transformatie gaat dus de cirkel uit den oorsprong van coördinaten met straal  $f$  beschreven in zich zelf over, terwijl elk punt buiten dezen cirkel in een punt binnen dezen cirkel en omgekeerd elk punt binnen dezen cirkel in een punt daarbuiten getransformeerd wordt.









Over de theorie der straling  
in verband met de voorstelling van  
Fourier

DOOR

**P. H. DOJES.**

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

**(EERSTE SECTIE)**

Deel III. N<sup>o</sup>. 4.

---

AMSTERDAM  
JOHANNES MÜLLER

1895





Over de theorie der straling  
in verband met de voorstelling van  
Fourier

DOOR

**P. H. D O J E S.**

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**)

Deel III. N<sup>o</sup>. 4.

---

AMSTERDAM  
JOHANNES MÜLLER

1895



## Over de theorie der straling in verband met de voorstelling van Fourier.

---

### INLEIDING.

§ 1. De tegenwoordig algemeen aangenomene voorstelling, betreffende de warmte- en licht-emissie van een stralend (gloeiend) lichaam is door Fourier het eerst duidelijk uiteengezet.<sup>1)</sup> Zijne „hypothèse du rayonnement particulaire” schijnt zelfs zoo beslist het wezen der zaak weer te geven, dat van het hypothetische zijner voorstelling nauwelijks meer sprake kan zijn.

Volgens de bedoelde voorstelling dragen de afzonderlijke deeltjes, ook de inwendige, van een stralend lichaam bij tot de totale hoeveelheid warmte en licht (stralende energie), die het lichaam uitzendt. Gaat men dus voor elk element van het lichaam na, welke de hoeveelheid stralende energie is, die van het element afkomstig is, dan is de in 't geheel geëmitteerde hoeveelheid stralende energie van het lichaam eenvoudig de som van al deze elementaire hoeveelheden. De stralende energie, afkomstig van een deeltje in het inwendige van een lichaam, plant zich van daar, onder gedeeltelijke absorptie, naar alle kanten door de massa van het stralende lichaam voort tot het oppervlak van het lichaam is bereikt en gaat dan uit het stralende lichaam in de omringende diathermane middenstof over. Is het oppervlak van het lichaam glad, dan gelden bij dien overgang de eenvoudige wetten der breking.

Verschillende verschijnselen laten zich aanstonds kwalitatief met behulp dezer voorstelling verklaren. Zoo bijv. het feit, door Arago<sup>2)</sup> ontdekt, dat het licht, hetwelk in schuine richting door gloeiende vaste of vloeibare lichamen wordt uitgezonden, partiël is gepolariseerd en dat het polarisatievlak loodrecht staat op het vlak van

---

<sup>1)</sup> Fourier, Mém. de l'Acad. des Sc. t IV en V. 1821 en 22.

<sup>2)</sup> Arago. Oeuvres Compl. VII, 403.



emissie. Immers, als zijnde *gebroken*, moet het geëmitteerde licht deze eigenschap vertoonen.

Ook kan men, zich grondende op de bedoelde voorstelling, aanstonds het vermoeden uitspreken, dat de diathermane middenstof, die een stralend lichaam omringt, van invloed moet zijn op de hoeveelheid stralende energie, door het lichaam in bepaalden tijd uitgezonden. Want het licht (of de warmte), uitgestraald door de deeltjes van het lichaam, zal, aan de (gladde) oppervlakte gekomen, deels worden teruggekaatst, deels worden gebroken en alleen dit laatste gedeelte beslist over de intensiteit van het geëmitteerde licht. De richtingsverandering bij de breking en de hoeveelheid gebroken licht zijn beide ook afhankelijk van den aard der omringende middenstof; deze moet dus van invloed zijn op de emissie.

Het is de verdienste van Clausius <sup>1)</sup> het eerst gewezen te hebben op den invloed van de omringende middenstof; niet door eene beschouwing als de voorafgaande echter, maar op werkelijk geheel verschillende wijze heeft hij dien invloed nagegaan.

§ 2. Om evenwel, behalve kwalitatieve gevolgtrekkingen ook quantitatieve resultaten te verkrijgen, moet men de voorstelling mathematisch uitwerken. In dit opzicht heeft de beroemde wiskundige, die vooral op het gebied der mathematische physica zich onsterfelijke lauweren heeft verworven, slechts weinig gedaan. In zijne berekeningen wordt zooveel verwaarloosd, dat van een wiskundig uitwerken der voorstelling nauwelijks sprake kan zijn. Ook van latere natuurkundigen vindt men geene strenge uiteenzetting; alleen Koláček <sup>2)</sup> heeft, met behulp van de electro-magnetische lichttheorie een onderzoek ingesteld naar de wiskundige uitkomsten van Fourier's voorstelling. Zijne methode verschilt geheel en al van die, welke hier gevolgd zal worden; zijn onderzoek betreft ook ten deele geheel andere grootheden.

Bij de toepassing van de mechanische warmte-theorie op de verschijnselen der emissie en absorptie is tot nu toe de voorstelling van Fourier niet in de beschouwingen opgenomen. Noch aan de beroemde onderzoekingen van Kirchhoff, noch aan die van Clausius ligt zij ten grondslag.

De theorie der straling, die door toepassing der mechanische warmte-theorie eene groote schrede voorwaarts deed, heeft in den laatsten tijd door de hulp der electro-magnetische licht-

---

<sup>1)</sup> Clausius, *Mech. Wärme-theorie*. 2te Aufl. Bd. 1 pag. 335.

<sup>2)</sup> Koláček-Wied. Ann. Bd. 39 pag. 246

theorie van Maxwell nogmaals vorderingen gemaakt (Boltzmann). <sup>1)</sup>

In deze verhandeling zal in de eerste plaats de voorstelling van Fourier worden uitgewerkt voor de straling van lichamen met gladde oppervlakte. Eene formule wordt daarbij afgeleid, die o. a. ook weergeeft den invloed van de omringende diathermane <sup>2)</sup> middenstof. Door toepassing der mechanische warmte-theorie heeft Clausius het eerst dien invloed opgemerkt en wiskundig uitgedrukt: het blijkt, dat de op zoo verschillende wegen verkregen resultaten met elkaar in overeenstemming zijn.

Hoe algemeen echter de resultaten ook zijn, die verkregen worden door toepassing der mechanische warmte-theorie, toch kleeft er aan de afleiding iets onbevredigends; het eigenlijke mechanisme van de verschijnselen blijft in het duister.

Daarentegen geven de hier volgende beschouwingen ook inzicht in het mechanisme van de straling; zij laten duidelijk zien, waarom het omringende medium van invloed is; zij leeren dus meer de directe oorzaken kennen, welke dien invloed bewerken.

Terwijl tot zoover de straling werd beschouwd, als er geen evenwicht van temperatuur bestaat, wordt dan verder de voorstelling van Fourier toegepast als alle uitstralende en ontvangende lichamen overal gelijke temperatuur hebben; hierbij wordt ook de toestand van den aether in de beschouwingen opgenomen. Door deze beschouwingen komen wij tot twee algemeene, voor zoover wij weten, nieuwe formules.

In overeenstemming met de resultaten, door Kirchhoff uit de mechanische warmte-theorie afgeleid, wordt verder ook met behulp van de in I afgeleide formule in het licht gesteld, waarom de totale emissie van stralende lichamen met gladde oppervlakte niet streng kan voldoen aan de stralingswet van Stefan. <sup>3)</sup> Eindelijk wordt ook nog de voorstelling van Fourier toegepast op de beroemde proef van Kirchhoff: de omkeering der natriumlijnen.

## I

§ 3. In de volgende beschouwingen worden alleen lichamen opgenomen, die alleen eigen warmte of licht uitstralen en door gladde oppervlakken worden begrensd, dus verwarmde lichamen

<sup>1)</sup> Wied. Ann. Bd 22 pag. 31 en 291.

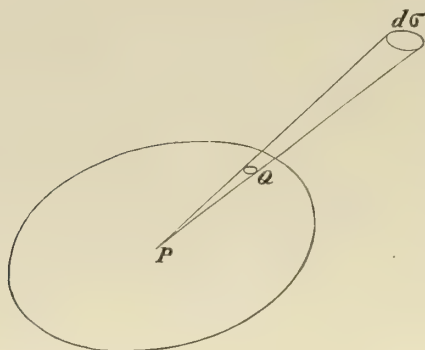
<sup>2)</sup> diathermaan sluit hier tevens in: volkomen doorzichtig.

<sup>3)</sup> Wiener Berichte. Bd 79. 1879.

van glas enz. met gepolijste oppervlakte en vloeistoffen of licht-emitterende gasmassa's, bijv. vlammen, die lichtgevend zijn door daarin aanwezige metaaldampen <sup>1)</sup> (natriumvlam). Zij worden verondersteld te zijn isotroop en homogeen (in al hunne deelen heerscht dus ook dezelfde temperatuur; het verlies van warmte door straling wordt dus op andere wijze geacht te worden gecompenseerd).

Ieder element van het stralende lichaam straalt dus licht en warmte uit; is het spectrum van het geëmaneerde licht continu, dan zendt ieder lichaamselement stralende energie uit van oneindig vele golflengten; de hoeveelheid stralende energie van eene golflengte tusschen  $\lambda$  en  $\lambda + d\lambda$  (in het luchtledige gemeten), die een lichaamselement  $dx dy dz$  naar alle kanten in de eenheid van tijd uitzendt, kan dan worden voorgesteld door  $Id\lambda \cdot dx dy dz$ , waarbij  $I$  eene constante voor het lichaam is, die, als wij met zuivere temperatuur-straling te doen hebben, alleen afhangt van de golflengte  $\lambda$ , van den aard en van de temperatuur van het stralende lichaam. Men kan aan  $I$  geschikt den naam geven van specifiek emitterend vermogen van het lichaam voor stralende energie van bepaalde golflengte.

Men kan nu in de eerste plaats vragen naar de *totale* hoeveelheid stralende energie van eene golflengte tusschen  $\lambda$  en  $\lambda + d\lambda$ , die een stralend lichaam van bepaalden vorm naar een vlak-element  $d\sigma$  zendt. De berekening van deze totale hoeveelheid zal hier alleen worden nagegaan voor het geval, dat men te doen heeft met eene stralende massa, waarvan de brekingsindex gelijk is aan die van het omringende diathermane medium en waarvan de absorptie-coëfficiënt nog die grootte heeft, dat bij den overgang uit de stralende massa in de omringende middenstof van de stralende energie geen merkbaar bedrag wordt teruggekaatst. De richtingsverandering door breking valt dus ook weg.



Zij bij het punt  $P(x, y, z)$  een lichaams-element  $dx dy dz$  aanwezig en zij  $d\omega$  de lichamelijke hoek, waaronder men in  $P$  het vlak-element  $d\sigma$  ziet, dan gaat van het element  $dx dy dz$  naar  $d\sigma$  in de eenheid van tijd eene hoeveelheid stralende energie, met eene golflengte tusschen  $\lambda$  en  $\lambda + d\lambda$ ,

$$= Id\lambda \cdot dx dy dz \cdot \frac{d\omega}{4\pi}.$$

<sup>1)</sup> De gewone gasvlam met hare lichtende kooldeeltjes blijft dus buiten beschouwing.



Over den weg  $PQ$ , langs welken deze hoeveelheid zich in het stralende lichaam voortplant, ondervindt zij absorptie, zoodat bij  $Q$  hare intensiteit

$$= Id\lambda \cdot dxdydz \cdot \frac{d\omega}{4\pi} \cdot e^{-\alpha r},$$

als  $\alpha$  de absorptie-coëfficiënt (voor de intensiteit),  $PQ = r$  en  $e$  de basis der natuurlijke logaritmen is. Zij  $\rho$  de afstand van  $P$  tot  $d\sigma$  en  $\varepsilon$  de hoek van de normaal op  $d\sigma$  met de verbindinglijn van  $P$  naar  $d\sigma$ , dan is:

$\rho^2 d\omega = d\sigma \cos \varepsilon$ , zoodat het element bij  $P$  naar  $d\sigma$  zendt:

$$\frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot d\sigma \cdot e^{-\alpha r} \frac{\cos \varepsilon}{\rho^2} \cdot dxdydz.$$

In 't geheel valt dus op  $d\sigma$  eene hoeveelheid energie met bepaalde golflengte  $= \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot d\sigma \cdot \iiint e^{-\alpha r} \frac{\cos \varepsilon}{\rho^2} dxdydz$ , waarbij de 3-voudige integraal over het geheele stralende lichaam uit te breiden is. Zijn nu  $\xi$ ,  $\eta$  en  $\zeta$  de coördinaten van het middelpunt van  $d\sigma$  en  $l$ ,  $m$  en  $n$  de hoeken van de normaal op  $d\sigma$  met de assen, dan is:

$$\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \text{ en} \\ \cos \varepsilon = \cos l \cdot \frac{\xi - x}{\rho} + \cos m \cdot \frac{\eta - y}{\rho} + \cos n \cdot \frac{\zeta - z}{\rho}.$$

Is verder  $F(x, y, z) = 0$  de vergelijking van het oppervlak van het stralende lichaam, dan moeten de coördinaten van  $Q$ ,  $x + r \frac{\xi - x}{\rho}$ ,  $y + r \frac{\eta - y}{\rho}$ ,  $z + r \frac{\zeta - z}{\rho}$  hieraan voldoen.

Deze vergelijking bepaalt  $r$  als functie van  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  en  $\zeta$ .

De moeilijkheid om zelfs voor lichamen van eenvoudige gedaante, bijv. een bol, de integratie uit te voeren, maakt dat de vraag naar de totale hoeveelheid, die een vlak-element van een stralend lichaam ontvangt, moeilijk te beantwoorden is. Toch schijnen de formules van eenig belang, omdat zij kunnen dienen om na te gaan, welken invloed de vorm van een (natrium-)vlam en de ruimte, die zij inneemt, heeft op de hoeveelheid licht, die zij uitzendt.

Een analoog probleem als dat van Gauss, betreffende het lichaam van maximale attractie bij gegebene massa, kan hierbij worden gesteld: hoe moet eene gegebene hoeveelheid, homogene, stralende massa worden begrensd om naar een element, met bepaalde grootte, van hare oppervlakte de maximale hoeveelheid energie te zenden;

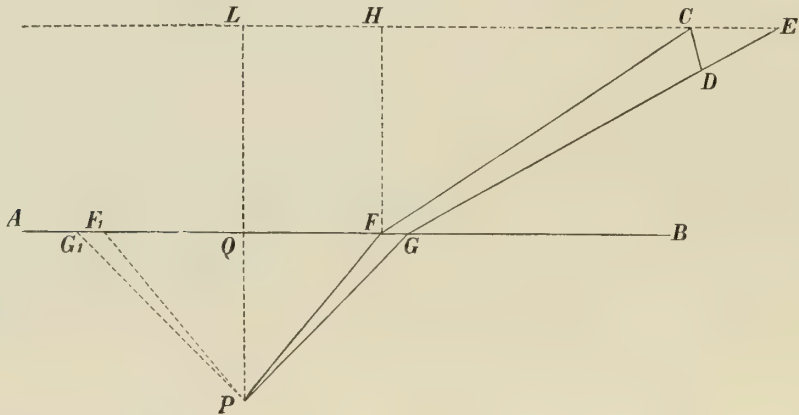
m. a. w., als  $\iiint dxdydz$  gegeven is,

wanneer wordt dan  $\iiint e^{-\alpha r} \frac{\cos \varepsilon}{\rho^2} dxdydz$  een maximum?



§ 4. In plaats van de hoeveelheid stralende energie, door een geheel lichaam geëmitteerd, zullen wij in het vervolg berekenen die hoeveelheid, welke door een oppervlakte-element  $dS$  van het stralende lichaam gaande, het vlak-element  $d\sigma$  bereikt. Door deze vraag te stellen nadert men tot de oude beschouwing, die alleen straling van oppervlakken kende; terwijl men echter, volgens de oude opvatting, bij de formule van Lambert dacht aan de stralende energie, uitgaande van een oppervlakte-element, mag men eigenlijk slechts spreken van de hoeveelheid stralende energie, die naar buiten treedt door een oppervlakte-element. Evenmin als de absorptie van licht of warmte plaats heeft in het geometrische oppervlak van een lichaam, kan ook de emissie daar hare oorsprong vinden.

Op de volgende wijze kan men de bedoelde hoeveelheid berekenen. Het stralende lichaam zij isotroop en in alle zijne deelen van dezelfde samenstelling en temperatuur. Men stelde zich verder voor, dat het lichaam door een plat vlak  $AB$  wordt begrensd, terwijl het zich aan de eene zijde van  $AB$  (naar beneden) tot in het oneindige uitbreidt. Deze zuiver mathematische aanname wordt physisch weergegeven door de onderstelling, dat de dikte van het lichaam (loodrecht op  $AB$  gemeten) zoo groot is, dat vermeerdering der dikte niet meer van invloed is op de intensiteit der straling, door  $AB$  uittredende.



Als voorbereiding berekenen wij eerst de hoeveelheid energie, die een vlak-element  $d\sigma$  ontvangt van een willekeurig lichaams-element, bij  $P$  aanwezig. Het vlak van tekening gaat door de normaal  $PQ$  en het middelpunt van het element  $d\sigma$ ;  $CD$  is de doorsnede van dit vlak-element met het vlak van tekening. De vlak-elementen zullen wij voorstellen door  $|CD|$ ,  $|CE|$  en  $|FG|$ . Een stralenbundel, van  $P$  uitgaande, gaat door  $|FG|$ , wordt daar gebroken en bereikt dan  $|CD|$ . Zij  $d\omega$  de lichamelijke hoek, waaronder

men in  $P$   $FG$  ziet, dan valt op  $|CD| : Id\lambda \cdot dxdydz \cdot \frac{d\omega}{4\pi} \cdot e^{-\alpha z} \times D$ ,

als  $PF = \rho$ ,  $\alpha$  de absorptie-coëfficiënt (voor de intensiteit) en  $D$  de doorlatingsfactor is. Wij zullen thans  $d\omega$  uitdrukken in  $PF(\rho)$ ,  $CF$ ,  $\angle QPF = i$ ,  $\angle CFH = i_1$  en  $\varepsilon$ , den hoek, dien de loodlijn op  $CD$  of  $d\sigma$  maakt met  $CF$ . Alle stralen, van  $P$  uitgaande, die hoeken van af  $\angle QPF$  tot  $\angle QPG$  maken met de loodlijn  $PQ$ , liggen binnen 2 kegel-oppeervlakken met  $P$  tot top. De platte ring  $FGF_1G_1$  heeft tot oppervlakte  $2\pi FQ \times FG$  (daar  $FG$  oneindig klein is). Het licht, van  $P$  uit door dien ring gaande, valt ten slotte op den ring  $CEC_1E_1$ , wiens oppervlakte  $= 2\pi CL \times CE$ .

Blijkbaar is nu:  $|CE| : |FG| = 2\pi CL \times CE : 2\pi FQ \times FG$  of daar  $|CE| \cos i_1 = |CD| \cos \varepsilon = d\sigma \cos \varepsilon$ ,

$\frac{d\sigma \cdot \cos \varepsilon}{\cos i_1} : |FG| = (FQ + CH) \times \left( FG + \frac{FC \cdot di_1}{\cos i_1} \right) : FQ \times FG$  waarbij  $i_1 + di_1$  de hoek van  $GE$  met de loodlijn op  $AB$  is. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \text{oppervlakte-element } |FG| &= \frac{d\sigma \cdot \cos \varepsilon}{\cos i_1} \cdot \frac{\rho \sin i \times \frac{\rho di}{\cos i}}{(\rho \sin i + FC \sin i_1) \left( \frac{\rho di}{\cos i} + \frac{FC di_1}{\cos i_1} \right)} \\ &= \frac{d\sigma \cdot \cos \varepsilon}{\cos i_1} \cdot \frac{\rho^2 \sin i \cos^2 i_1}{(\rho \sin i + FC \sin i_1) (\rho \cos^2 i_1 + FC \cdot \nu \cdot \cos^2 i)} \end{aligned}$$

waarbij  $\nu$  de brekingsverhouding  $\frac{\sin i_1}{\sin i}$  voorstelt.

Daar bovendien  $PF^2 \cdot d\omega = \rho^2 d\omega = |FG| \cos i$   
 is  $d\omega = \frac{d\sigma \cdot \cos \varepsilon \cdot \cos i \cdot \cos i_1}{(\rho + \nu FC) (\rho \cos^2 i_1 + \nu \cdot FC \cdot \cos^2 i)}$

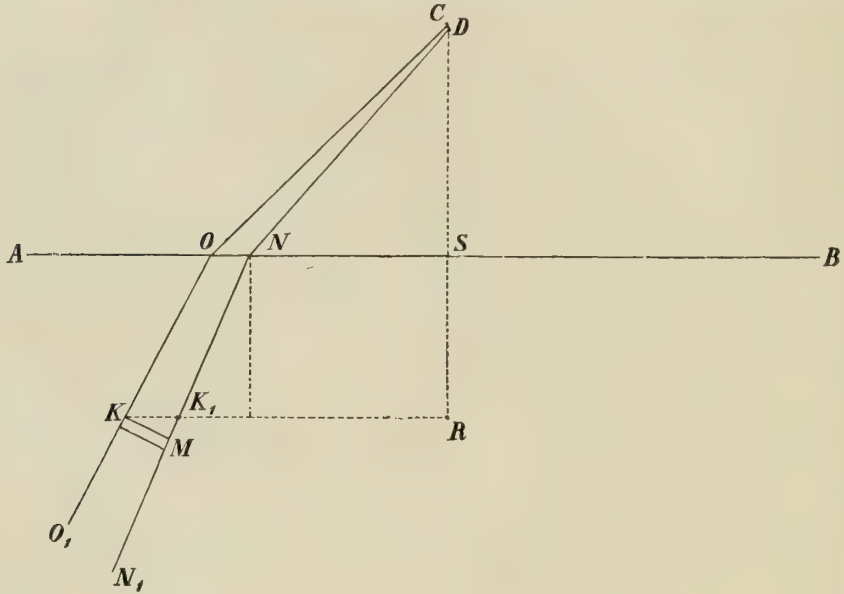
en de hoeveelheid stralende energie van eene golflengte tusschen  $\lambda$  en  $\lambda + d\lambda$ , die  $d\sigma$  in de eenheid van tijd van het lichaams-element  $dxdydz$ , bij  $P$  aanwezig, ontvangt, is dus

$$= dxdydz \cdot \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot e^{-\alpha z} \cdot \frac{d\sigma \cdot \cos \varepsilon \cdot \cos i \cdot \cos i_1}{(\rho + \nu FC) (\rho \cos^2 i_1 + \nu FC \cos^2 i)} \times D^1) \dots (1)$$

§ 5. Thans gaan wij over tot de berekening van de hoeveelheid energie, die door een oppervlakte-element  $dS$  van  $AB$  gaande, op een vlak-element valt. Daartoe moeten wij vooreerst uitmaken, welke lichaams-elementen, door  $dS$  heen, stralende energie zenden naar dat vlak-element.

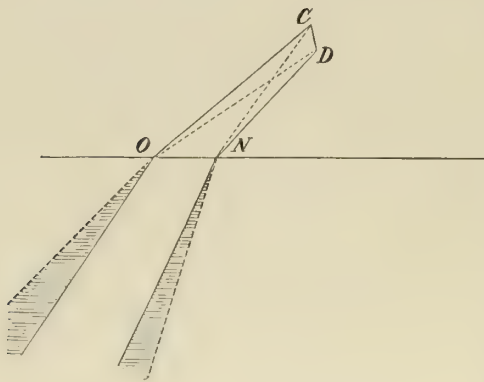
<sup>1)</sup> Valt dus in het stralende lichaam licht onder een invalshoek  $i$  op het grensvlak met eene intensiteit  $= 1$ , dan is de intensiteit van het doorgelaten of gebroken licht  $= D$ . Eene andere beteekenis van  $D$  komt voor in § 6.

Wij stellen nu voorop, dat  $dS$  of  $|ON|$  oneindig klein van de 1<sup>ste</sup> orde en  $|CD|$  oneindig klein van de 2<sup>de</sup> orde is, zoodat wij thans voor  $|CD|$ , in plaats van  $d\sigma$  als straks, zullen schrijven  $d_2\sigma$ .



Dan liggen alle elementen van het stralende lichaam, die licht door  $|ON|$  naar  $|CD|$  zenden binnen het regelrechte oppervlak, waarvan de beschrijvende lijnen gaan door den omtrek van  $|ON|$ .

( $|CD|$  wordt daarom oneindig klein van de 2<sup>de</sup> orde verondersteld om buiten beschouwing te kunnen laten de lichaams-elementen, die buiten dit regelrechte oppervlak liggen; ware n.l.  $|CD|$  oneindig klein van dezelfde orde als  $|ON|$ , dan zou men ook nog moeten



beschouwen de lichaams-elementen, gelegen in het gestreepte gedeelte, die ook nog stralende energie door  $|ON|$  naar  $|CD|$  zenden.

Bij de vooropgestelde aanname is echter de verhouding van het volume van het gestreepte deel tot dat binnen het regelrechte oppervlak gelegen, oneindig klein: ook de

emissie van dat gedeelte verdwijnt dus.

Beschouwen wij thans een lichaams-element  $KM$ , waarvan de 2 evenwijdige vlakken een afstand  $d\rho$  hebben, dan is het volume van dit element  $= |KM| \cdot d\rho$ . Is verder  $|KK_1|$  de doorsnede van

het zooveen vermelde regelrechte oppervlak met een plat vlak, evenwijdig aan  $AB$  en  $i$  de hoek van  $NK_1$  met de loodlijn op dat vlak  $AB$ , dan is het volume van het lichaams-element  $= |KK_1| \cdot \cos i \cdot d\rho$ .

Daar  $|CD|$  oneindig klein van de 2<sup>de</sup> orde, is ook nu:

$|KK_1| : |ON| = 2\pi K_1 R \times KK_1 : 2\pi NS \times ON$ , of als  $NK_1 = \rho$ ,  $DN = a$  en de hoeken van  $ND$ ,  $OC$ ,  $K_1N$  en  $OK$  met de loodlijn op  $AB$  respectievelijk  $i_1$ ,  $i_1 + di_1$ ,  $i$  en  $i + di$  zijn,

$$|KK_1| : dS = (\rho \sin i + a \sin i_1) \left( \frac{a di_1}{\cos i_1} + \frac{\rho di}{\cos i} \right) : a \sin i_1 \times \frac{a di_1}{\cos i_1}$$

dus:

$$|KK_1| = dS \frac{(\rho \sin i + a \sin i_1) \left( \frac{a}{\cos i_1} + \frac{\rho}{\cos i} \frac{di}{di_1} \right)}{a \sin i_1 \cdot \frac{a}{\cos i_1}}$$

of, daar  $\frac{\sin i_1}{\sin i} = \nu$ ,

$$|KK_1| = dS \frac{(\rho + \nu a) (\nu a \cos^2 i + \rho \cos^2 i_1)}{\nu^2 a^2 \cos^2 i}$$

en dus:

$$\text{vol. lichaams-element } KM = dS \frac{(\rho + \nu a) (\nu a \cos^2 i + \rho \cos^2 i_1)}{\nu^2 a^2 \cos^2 i} \cdot \cos i d\rho$$

Door nu in de formule (1) van § 4  $dx dy dz$  door deze uitdrukking te vervangen, vindt men voor de hoeveelheid stralende energie, die het lichaamselement  $KM$  naar  $d_2\sigma$  zendt:

$$\begin{aligned} & d\rho \cdot \cos i \cdot dS \cdot \frac{(\rho + \nu a) (\nu a \cos^2 i + \rho \cos^2 i_1)}{\nu^2 a^2 \cos^2 i} \cdot \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot e^{-a\epsilon} \\ & \quad \times \frac{d_2\sigma \cdot \cos \epsilon \cdot \cos i \cdot \cos i_1}{(\rho + \nu a) (\rho \cos^2 i_1 + \nu a \cos^2 i)} \cdot D \\ & = dS \cdot d_2\sigma \cdot \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{\cos \epsilon \cdot \cos i_1}{\nu^2 a^2} \cdot e^{-a\epsilon} d\rho \cdot D. \end{aligned}$$

Integreeren wij deze uitdrukking naar  $\rho$  over alle elementen, gelegen binnen het regelrechte oppervlak, dan varieert  $\rho$  van 0 tot  $x$  en voor de geheele hoeveelheid stralende energie met golflengte tusschen  $\lambda$  en  $\lambda + d\lambda$ , die door  $dS$  gaande, op  $d_2\sigma$  valt, vindt men:

$$dS \cdot d_2\sigma \cdot \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{\cos \epsilon \cdot \cos i_1}{\nu^2 a^2} D \int_0^\infty e^{-a\epsilon} d\rho = dS \cdot d_2\sigma \cdot \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{D \cos \epsilon \cdot \cos i_1}{\nu^2 a^2} (2).$$

Deze formule geldt ook <sup>1)</sup>, als het ontvangende element van de

<sup>1)</sup> Deze uitbreiding van de formule (2) werd door Prof. Lorentz aangegeven, wien ik hierbij voor deze en andere opmerkingen mijnen hartelijken dank betuig.



zelfde orde is als  $dS$ . Men ziet dit in, als men het ontvangende element in oneindig vele elementen, zooals  $d_2 \sigma$ , verdeelt, op elk daarvan de formule (2) toepast en dan optelt. Daar voor ieder van deze elementen van de 2<sup>de</sup> orde de factoren, waarmede  $d_2 \sigma$  wordt vermenigvuldigd, aan elkaar gelijk mogen worden gesteld, is de som van al deze uitdrukkingen, d. i. de hoeveelheid stralende energie, die  $d\sigma$  ontvangt

$$= dS \cdot d\sigma \cdot \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{D}{v^2\alpha} \frac{\cos \varepsilon \cdot \cos i_1}{a^2} \dots (2a).$$

§ 6. Bij het vergelijken dezer formule met die van Lambert

$$dS \cdot d\sigma \cdot E \cdot \frac{\cos \varepsilon \cdot \cos i_1}{a^2}$$

springt in het oog, dat de factor  $D$  het wezenlijke verschil uitmaakt van de beide formules en het is deze factor, die bewerkt dat de formule van Lambert niet doorgaat voor uitstralende lichamen met gladde oppervlakte. Dit stemt overeen met het experimentele resultaat, reeds lang geleden verkregen door de la Provostaye en Desains <sup>1)</sup>. Vooral voor lichamen, als de hier bedoelde, met niet te grooten absorptie-coëfficiënt, waarbij  $D$  sterk met den invalshoek verandert, bijv. voor glas, is de afwijking van Lambert's formule zeer groot, zooals ook uit de waarnemingen der genoemde twee natuurkundigen gebleken is.

Bij sterk absorbeerende stoffen is ook  $\nu$  afhankelijk van den invalshoek. De hier gegeven beschouwingen zijn echter op dergelijke lichamen niet nauwkeurig van toepassing. De wetten van de voortplanting in absorbeerende media en die voor den overgang uit zulk een medium in een andere middenstof zijn geheel andere dan die voor doorschijnende stoffen. Een afzonderlijk onderzoek naar de voortplanting van spherische golven in een absorbeerend medium en den overgang in eene doorschijnende middenstof zou noodig zijn om deze beschouwingen aan te vullen.

$D$  is aldus experimenteel te bepalen. Valt stralende energie van eene golflengte tusschen  $\lambda$  en  $\lambda + d\lambda$  in vlakke golven onder een invalshoek  $i_1$  op het grensvlak van het stralende lichaam, terwijl de intensiteit van de invallende energie 1 is, dan is die van de teruggekaatste  $1 - D$ . <sup>2)</sup> De invallende en de teruggekaatste energie plant zich daarbij voort door het diathermane medium.

<sup>1)</sup> Ann. de Chimie et de Physique. 3<sup>e</sup> Sér. T. XXII en XXX.

<sup>2)</sup> Hierbij is reeds gebruik gemaakt van de bekende reciprociteitswet.

$D$  wordt verder gegeven door de lichttheorie. Met behulp van de electro-magnetische lichttheorie heeft, voor het eerst H. A. Lorentz <sup>1)</sup> de waarde van  $D$  aldus uitgedrukt:

$$D = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4m \cos(\tau + \omega)}{1 + 2m \cos(\tau + \omega) + m^2} + \frac{4m_1 \cos(\tau - \omega)}{1 + 2m_1 \cos(\tau - \omega) + m_1^2} \right\}^2$$

Deze uitdrukking voor  $D$  stemt ook overeen met die, door Mac Cullagh en Cauchy uit de elastische theorie van den aether afgeleid. Wij komen op de waarde van  $D$  straks terug.

Daar de uitdrukking  $\frac{dS \cdot d_2 \sigma}{a^2} \cdot \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{D}{\nu^2 a} \cos i_1$  te beschouwen is als de maat voor de emissie der onder een hoek met de normaal  $i_1$  door  $dS$  uittredende stralen, kan men in verband met een formule, die in § 8 wordt afgeleid, n.l.  $\frac{I}{\nu^2 a} = \frac{I_1}{\nu_1^2 a_1}$ , het volgende algemeene resultaat afleiden:

De emissie van stralende energie van bepaalde golflengte uit een oppervlakte-element van een stralend lichaam is voor alle homogene isotrope lichamen met gladde oppervlakte en zoo groote dikte, dat vermeerdering der dikte geen (waarneembaren) invloed meer heeft op de grootte der emissie, bij dezelfde temperatuur, evenredig met de intensiteit van het gebroken licht van die golflengte of m. a. w. evenredig met  $D = 1 - R$ , waarbij, als de intensiteit van invalend natuurlijk (niet gepolariseerd) licht van die golflengte gelijk 1, die van het teruggekaatste licht gelijk  $R$  is. Deze terugkaatsing wordt dan geacht plaats te hebben in het diathermane medium.

Deze algemeene stelling, die hier het eerst wordt afgeleid uit de voorstelling van Fourier, kan aan de waarnemingen nog moeilijk worden getoetst. Wel stemt de *volgorde* der lichamen, wat het bedrag hunner emissie betreft, met deze stelling overeen. <sup>3)</sup> Gewoonlijk heeft men echter geen lichamen met gladde oppervlakte onderzocht. Verder geldt de stelling voor stralende energie van bepaalde golflengte; bij de photometrische waarnemingen kan men betrekkelijk gemakkelijk de licht-intensiteit voor de verschillende kleuren bepalen: deze waarnemingen zijn echter onnauwkeuriger dan de calorimetrische, die van den anderen kant het bezwaar hebben, dat zij alleen

<sup>1)</sup> H. A. Lorentz. Over de theorie der terugkaatsing en breking van het licht. Dissertatie pag. 165 en 166.

<sup>2)</sup> Hierbij is ook gebruik gemaakt van de bekende reciprociteitswet. (Zie pag. 16).

<sup>3)</sup> De verschillen in temperatuur door Emden (Wied. Ann. 36 pag. 214) waargenomen bij verschillende metalen, wat betreft hunne beginnende licht-emissie bij nadering hunner temperatuur tot de gloeihitte, zijn zeer waarschijnlijk op rekening te stellen van de verschillende waarden van  $D$ .

de totale hoeveelheid stralende energie, van zeer verschillende golflengte bepalen.

§ 7. Wij zullen nu verder met behulp der formule (2) van § 5 den invloed nagaan van het omringende, diathermane medium. Het zijn de factoren  $D$  en  $\nu$  in die formule, welke ook van dit medium afhankelijk zijn. Laten  $D'$  en  $D''$ ,  $\nu'$  en  $\nu''$  de grootheden voorstellen, die afhangen van den aard der beide diathermane media, terwijl  $dS$ ,  $d\sigma$ ,  $I$ ,  $\alpha$ ,  $\cos \varepsilon$  en  $\cos i_1$  onveranderd blijven. Van beide brekingsverhoudingen  $\nu'$  en  $\nu''$  is  $\sin i_1$  de teller.

De onder een gelijken hoek  $i_1$  met de normaal, in twee diathermane middenstoffen uitgestraalde hoeveelheden, verhouden zich dus als:  $\frac{D'}{(\nu')^2} : \frac{D''}{(\nu'')^2}$ .

Voor  $\frac{\nu''}{\nu'}$  kan men schrijven  $\frac{n_0'}{n_0''}$ , als  $n_0'$  en  $n_0''$  de absolute brekingsindices van de twee media voorstellen.

De verhouding der emissies in die twee middenstoffen is dan:

$$D' (n_0')^2 : D'' (n_0'')^2.$$

Voor een volkomen zwart lichaam zouden  $D'$  en  $D''$  beide gelijk 1 zijn; de verhouding wordt dan:  $(n_0')^2 : (n_0'')^2$ .

Beide resultaten zijn in volkomen overeenstemming met de door Clausius <sup>1)</sup> op geheel andere wijze afgeleide.

Het laatste resultaat is ook door Von Quintus Icilius <sup>2)</sup> experimenteel geverifieerd.

Men zou tegen de berekeningen in de vorige §§ uitgevoerd, eenige bedenkingen kunnen aanvoeren. Moet men n.l. niet, zooals bijv. Koláček <sup>3)</sup> doet, de berekening van de hoeveelheid stralende energie, die op  $d_2 \sigma$  valt, beschouwen als een diffractie-probleem. Ofschoon de resultaten er niet door gewijzigd zouden worden, is het o. i. onnoodig de berekening aldus uit te voeren. Immers  $dS$  moet klein zijn, vergeleken met den afstand  $\alpha$ , maar niet ten opzichte van de golflengte. Daardoor zullen diffractie-verschijnselen niet storend optreden.

Zooals ook reeds is opgemerkt, gelden verder de bovenstaande berekeningen niet streng voor lichamen met groote absorptie-coëfficiënten, zooals de metalen. De beschouwingen, gebaseerd op de mechanische warmte-theorie maken het echter waarschijnlijk, dat de uitkomsten ook voor sterk absorbeerende lichamen gelden.

<sup>1)</sup> l. c. pag. 336.  $D'$  en  $D''$  zijn de in de laatste alinea bedoelde absorptie-coëfficiënten.

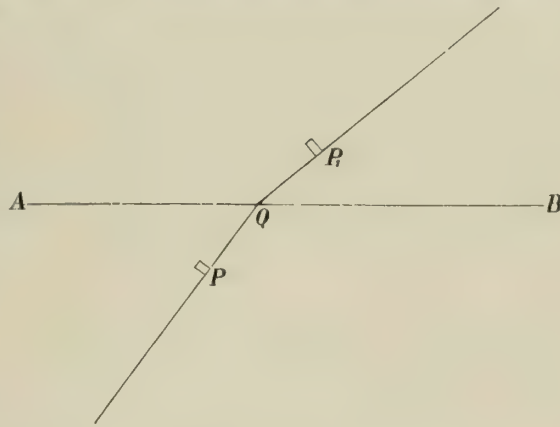
<sup>2)</sup> Pogg. Ann. Bd 127.

<sup>3)</sup> L. c. pag. 250 en 251.

## II.

§ 8. In dit gedeelte zal de voorstelling van Fourier worden toegepast, tegelijk met het principe van Prévost, dat door Kirchhoff <sup>1)</sup> scherper geformuleerd is. Wij zullen dus onderstellen, dat een systeem van lichamen overal gelijke temperatuur heeft, m. a. w. dat er overal evenwicht van temperatuur bestaat. Ook dan zenden de lichamen elkaar wederkeerig stralende energie toe, terwijl toch de temperatuur overal dezelfde blijft. Opdat dit laatste het geval is, zullen blijkbaar ook twee lichaams-elementen steeds dezelfde temperatuur hebben; de eenvoudigste aanname is nu deze, dat de hoeveelheid stralende energie, die het 1<sup>ste</sup> element van het 2<sup>de</sup> ontvangt, gelijk moet zijn aan die, welke het 2<sup>de</sup> van het 1<sup>ste</sup> ontvangt. Brengen wij deze gelijkheid in eene wiskundige formule. Zij  $AB$  thans het scheidingsvlak van twee stralende lichamen, met verschillend specifiek emitteerend vermogen  $I$  en  $I_1$  en de absorptie-coëfficiënten  $\alpha$  en  $\alpha_1$ .

$PQ$  make met de loodlijn op het grensvlak den



hoek  $i$ ,  $P_1Q$  den hoek  $i_1$ , terwijl  $\nu = \frac{\sin i_1}{\sin i}$  de brekingsverhouding der twee stoffen is.

Beschouwen wij twee lichaams-elementen, bij  $P$  en  $P_1$ , waarvan twee der evenwijdige zijvlakken loodrecht staan op  $PQ$ , resp.  $P_1Q$ . Zij verder  $PQ = \rho$ , een zijvlak, loodrecht op  $PQ = dS$ ,  $P_1Q = \rho_1$  en een zijvlak, loodrecht op  $P_1Q = dS_1$ . De twee lichaams-elementen hebben dus tot volume  $dS \cdot d\rho$ , resp.  $dS_1 \cdot d\rho_1$ . Volgens de formule (1) van § 4 is nu de hoeveelheid stralende energie van golflengte tusschen  $\lambda$  en  $\lambda + d\lambda$ , die het lichaams-element bij  $P$  in de eenheid van tijd naar het lichaams-element bij  $P_1$  doet toekomen

$$= dS \cdot d\rho \cdot \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot e^{-\alpha\rho} e^{-\alpha_1\rho_1} \frac{dS_1 \cdot \cos i \cdot \cos i_1}{(\rho + \nu \rho_1)(\rho \cos^2 i_1 + \nu \rho_1 \cos^2 i)} \times D$$

daar  $\cos \varepsilon = 1$ .

<sup>1)</sup> Kirchhoff, Gesammelte Abhandl. pag. 571.



Hiervan wordt door dit element bij  $P_1$  geabsorbeerd:

$$dS \cdot d\rho \cdot \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot e^{-a\rho} \cdot e^{-a_1\rho_1} \cdot \alpha_1 d\rho_1 \cdot \frac{dS_1 \cdot \cos i \cdot \cos i_1}{(\rho \times \nu \rho_1)(\rho \cos^2 i_1 + \nu \rho_1 \cos^2 i)} \times D..(a)$$

Evenzoo zal men vinden voor de geabsorbeerde hoeveelheid, die  $dS \cdot d\rho$  in de eenheid van tijd van  $dS_1 \cdot d\rho_1$  verkrijgt:

$$dS_1 \cdot d\rho \cdot \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot e^{-a_1\rho_1} \cdot e^{-a\rho} \cdot \alpha d\rho \cdot \frac{dS \cos i_1 \cdot \cos i}{\left(\rho_1 + \frac{\rho}{\nu}\right)(\rho_1 \cos^2 i + \frac{\rho}{\nu} \cos^2 i_1)} \times D..(b)$$

Daar deze hoeveelheden, bij temperatuurs-evenwicht, volgens onze onderstelling, gelijk zijn, vindt men, na weglating der gelijke factoren:

$$I\alpha_1 = I_1\alpha\nu^2$$

of 
$$\frac{I \sin^2 i}{\alpha \sin^2 i_0} = \frac{I_1 \sin^2 i_1}{\alpha_1 \sin^2 i_0}, \text{ dus ook: } \frac{I}{\alpha\nu_0^2} = \frac{I_1}{\alpha_1(\nu_0^1)^2}$$

als  $\nu_0$  en  $\nu_0^1$  de absolute brekings-indices zijn van de twee lichamen. Het is van deze gelijkheid, dat in § 6 gebruik gemaakt is.

Daar nu, volgens de lichttheorie,  $\frac{\nu_0}{\nu_0^1} = \frac{V_1}{V}$ , als  $V_1$  en  $V$  de snelheden van het licht in de twee middenstoffen voorstellen, kan men voor deze formule schrijven:

$$\frac{I}{\alpha} V^2 = \frac{I_1}{\alpha_1} V_1^2.$$

Men heeft dus deze eigenschap bewezen:

Voor alle lichamen met emissie-vermogen voor stralende energie van bepaalde golflengte, is bij dezelfde temperatuur het produkt van het kwadraat der voortplantingssnelheid en het quotiënt van specifiek emitterend vermogen en absorptie-coëfficiënt eene constante.

Deze formule, hoewel in vorm verschillende van die van Kirchhoff  $\frac{E}{A} = \text{constante}^1$ ), is daarmede volstrekt niet in tegenspraak; de hier voorkomende grootheden zijn andere dan bij Kirchhoff.  $I$ ,  $\alpha$  en  $V$  zijn zoogenaamde „inwendige” constanten, d. i. om ze te definiëren behoeft men alleen het eene lichaam te beschouwen; zij hangen, bij zuivere temperatuurstraling, alleen af van de golflengte  $\lambda$ , van den aard der stof en van de temperatuur.

Bij het afleiden van deze formule:  $\frac{I}{\alpha} V^2 = \frac{I_1}{\alpha_1} V_1^2$ , hebben wij in de uitdrukkingen (a) en (b) voor den „doorlatingsfactor” denzelfden letter  $D$  genomen. Dit is in overeenstemming met de resul-

<sup>1)</sup> l. c. pag. 575.

taten der lichttheorie, volgens welke de intensiteiten van het door-  
gelaten (of gebroken) en gereflecteerde licht, bij de terugkaatsing  
op het grensvlak van twee middenstoffen, doorzichtige of absor-  
beerende, onafhankelijk zijn van de volgorde, in welke het licht  
de beide middenstoffen doorloopt. Dit geldt ook afzonderlijk voor  
licht, gepolariseerd in het vlak van inval en voor dat, loodrecht  
daarop gepolariseerd. Mathematisch wordt dit door de formules voor  
de intensiteiten daardoor weergegeven, dat hierin de beide absorp-  
tie-coëfficiënten en de beide hoeken  $i$  en  $i_1$  symmetrisch voorkomen.  
In algemeeneren vorm is die onafhankelijkheid van de volgorde  
afgeleid door Helmholtz en Kirchhoff. <sup>1)</sup>

Ware het eene stralende lichaam anisotroop en wel van het een-  
assige systeem, terwijl de as evenwijdig is met het grensvlak der  
2 stralende lichamen, zijn verder  $I_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $V_0$  en  $I_e$ ,  $\alpha_e$ ,  $V_e$  de  
verschillende grootheden, dan is:

$$\frac{I_0}{\alpha_0} V_0^2 = \frac{I_e}{\alpha_e} V_e^2 = \frac{\frac{1}{2} I_1 V_1^2}{\alpha_1}.$$

Kirchhoff heeft bij een tourmalijnplaat eene dergelijke betrekking  
ook experimenteel aangetoond. <sup>2)</sup>

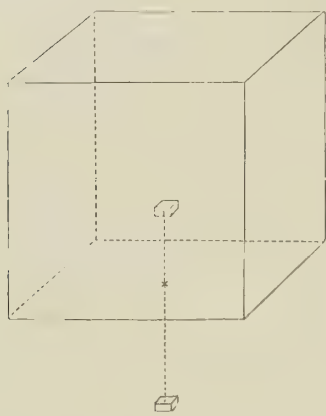
§ 9. Wij zullen thans ook in de beschouwingen opnemen den  
aether, wat betreft zijn toestand, als er temperatuursevenwicht be-  
staat. Stellen wij ons daartoe in het inwendige van een stralend  
lichaam, dat zich tot in het oneindige uitbreidt, eene ruimte voor,  
bijv. begrensd door vlakke wanden, die alleen aether bevat. Als  
overal dezelfde temperatuur heerscht, zal de aether in die ruimte  
per volume-eenheid overal eene gelijke hoeveelheid stralende energie  
van bepaald bedrag bezitten. Zij, voor de volume-eenheid, de hoe-  
veelheid stralende energie, waarvan de golflengte tusschen  $\lambda$  en  
 $\lambda + d\lambda$  ligt  $= E_0 d\lambda$ . De stralende energie plant zich door den  
aether voort met de snelheid  $V_0$ , de genoemde hoeveelheid  $E_0 d\lambda$   
beweegt zich telkens in alle richtingen uit de volume-eenheid om  
telkens door eene nieuwe, even groote hoeveelheid vervangen te  
worden.

Beschouwen wij nu een volume-element in den aether en tevens  
een element van het stralende lichaam. Korthedshalve zullen wij  
aannemen, dat de verbindingslijn van de middelpunten der beide  
elementen loodrecht staat op een der grensvlakken van het lichaam.

<sup>1)</sup> I. c. pag. 586.

<sup>2)</sup> I. c. pag. 596.

Is  $b$  de afstand van het lichaams-element  $dx dy dz$  tot dat grensvlak en  $a$  die van het volume-element in den aether,  $d\xi d\eta d\zeta$ , tot dit-



zelfde vlak, dan zendt, blijkens formule (1) van § 4, daar  $\cos \varepsilon = 1$ ,  $\cos i = 1$ ,  $\cos i_1 = 1$ ,  $\rho = b$ ,  $FC = a$  en  $d\sigma = d\xi d\eta$  en voor  $\nu = n$  gesteld wordt, in den tijd  $dt$  het lichaams-element  $dx dy dz$  op het vlak-element  $d\xi d\eta$  een bedrag aan stralende energie van eene golflengte tusschen  $\lambda$  en

$$\lambda + d\lambda = \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot e^{-ab} \frac{1}{(b + an)^2} \times \\ \times d\xi \cdot d\eta \cdot D_n \times dt.$$

Deze hoeveelheid stralende energie plant zich door den aether met de snelheid  $V_0$  voort, zij gaat loodrecht door het vlak-element  $d\xi d\eta$ ; op zeker oogenblik zal nu die, in den tijd  $dt$  uitgezondene hoeveelheid zich bevinden in eene ruimte  $d\xi \cdot d\eta \cdot V_0 dt$ . Nemen wij nu  $d\zeta = V_0 dt$  dan is dus op ieder oogenblik in het volume-element  $d\xi d\eta d\zeta$  aanwezig eene hoeveelheid stralende energie.

$$= \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot dx dy dz \cdot e^{-ab} \frac{1}{(b + an)^2} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot D_n \cdot dt,$$

die afkomstig is van het lichaams-element  $dx dy dz$ . Deze hoeveelheid is dus de bijdrage, die het element  $dx dy dz$  in den tijd  $dt$  levert tot de geheele hoeveelheid stralende energie, die het aether-element  $d\xi d\eta d\zeta$  bevat.

Omgekeerd stroomt er ook telkens uit het volume-element van den aether naar alle kanten stralende energie; van deze stralende energie bereikt ook een deel het lichaams-element  $dx dy dz$ ; de eenvoudigste onderstelling is nu weer deze, dat, wil er evenwicht van temperatuur zijn, de hoeveelheid energie, die het stoffelijk element  $dx dy dz$  in den tijd  $dt$  hiervan opneemt, gelijk is aan de zooeven berekende hoeveelheid, die  $dx dy dz$  in den tijd  $dt$  aan het volume-element  $d\xi d\eta d\zeta$  doet toekomen.

Zij de ruimte-hoek, waaronder men van  $d\xi d\eta d\zeta$  uit het vlak-element  $dx dy$  ziet  $= d\omega$ ; van de geheele hoeveelheid stralende energie, die uit het volume-element  $d\xi d\eta d\zeta$  wegstroomt, beweegt zich dan binnen dien hoek  $d\omega$  een breukdeel  $= \frac{d\omega}{4\pi}$ . Dit gedeelte

beweegt zich loodrecht op  $d\xi d\eta$ ; in den tijd  $\frac{d\zeta}{V_0}$  zal het uit het volume-element  $d\xi d\eta d\zeta$  zijn weggestroomd; daar  $d\zeta = V_0 dt$ , zal

juist in den tijd  $dt$  de hoeveelheid stralende energie  $E_0 d\lambda \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \cdot \frac{d\omega}{4\pi}$  uit het volume-element  $d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$  naar  $dx dy$  worden uitgezonden. Hiervan bereikt het vlak-element  $dx dy = E_0 \cdot d\lambda \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \cdot \frac{d\omega}{4\pi} \cdot e^{-\alpha b} \cdot D_n$

of, daar  $d\omega = \frac{dx dy}{\left(a + \frac{b}{n}\right)^2}$ ,

$$\frac{E_0 d\lambda}{4\pi} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \cdot e^{-\alpha b} \cdot \frac{dx dy}{\left(a + \frac{b}{n}\right)^2} \cdot D_n.$$

Van deze hoeveelheid energie absorbeert het stoffelijk element  $dx dy dz$  een breukdeel  $\alpha dz$ ;  $dx dy dz$  krijgt dus in den tijd  $dt$  van het aether-element  $d\xi d\eta d\zeta$  terug eene hoeveelheid energie

$$= \frac{E_0 d\lambda}{4\pi} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \cdot e^{-\alpha b} \cdot \frac{\alpha dx dy dz}{\left(a + \frac{b}{n}\right)^2} \cdot D_n.$$

Daar het lichaams-element  $dx dy dz$  in denzelfden tijd  $dt$  tot de hoeveelheid energie, in het aether-element aanwezig, eene bijdrage levert,

$$= \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot dx dy dz \cdot e^{-\alpha b} \cdot \frac{1}{(b + \alpha n)^2} d\xi \cdot d\eta \cdot D_n \cdot dt$$

moet dus, volgens onze onderstelling:

$$\begin{aligned} \frac{E_0 d\lambda}{4\pi} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \cdot e^{-\alpha b} \cdot \frac{\alpha dx dy dz}{\left(a + \frac{b}{n}\right)^2} \cdot D_n = \\ = \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot dx dy dz \cdot e^{-\alpha b} \cdot \frac{1}{(b + \alpha n)^2} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot D_n dt \end{aligned}$$

en daar  $d\zeta = V_0 dt$ ,

vindt men, na weglating der gelijke factoren in beide leden:

$$E_0 V_0 = \frac{I}{\alpha n^2} = \frac{I}{\alpha V_0^2} V^2 \text{ of } E_0 V_0^3 = \frac{I}{\alpha} V^{2-1}).$$

Daar, zooals wij in § 8 vonden,  $\frac{I}{\alpha} V^2$  voor alle stralende lichamen bij dezelfde temperatuur dezelfde waarde heeft, is ook  $E_0 V_0^3$  constant; de aether heeft dus per volume-eenheid bij temperatuurs-evenwicht en gelijke temperatuur altijd dezelfde hoeveelheid stralende energie van bepaalde golflengte, onafhankelijk van de lichamen die uitstralen, mits zij slechts stralen van die golflengte emitteeren.

<sup>1)</sup> Deze gelijkheid is te beschouwen als de voorwaarde voor het evenwicht van temperatuur tusschen aether en stof.



Dit resultaat is in volkomen overeenstemming met het bekende, door Kirchhoff afgeleide. <sup>1)</sup>

De constante uitdrukking  $\frac{I}{\alpha} V^2$  heeft dus ook eene eigenaardige beteekenis; zij is gelijk aan de hoeveelheid energie, in den aether per kubieke voortplantingssnelheid aanwezig.

Hadden wij niet te doen met aether, maar met eene diathermane stof, dan zou men op gelijke wijze vinden:

$E_1 V_1^3 = \frac{I}{\alpha} V^2$ , waarbij  $E_1$  en  $V_1$  voor de diathermane middenstof

gelden. Uit  $E_0 V_0^3 = \frac{I}{\alpha} V^2$  en  $E_1 V_1^3 = \frac{I}{\alpha} V^2$ , volgt ook:

$E_0 V_0^3 = E_1 V_1^3$ , dus:

de aether en de diathermane middenstof bevatten bij evenwicht van temperatuur per kubieke voortplantingssnelheid dezelfde hoeveelheid stralende energie.

Men kan dezelfde beschouwingen ook nog uitbreiden op de stralende lichamen zelf. Immers in het stralende lichaam zelf is op ieder oogenblik ook stralende energie voorhanden. De hoeveelheid stralende energie, die door een lichaams-element in een bepaalden tijd wordt *geabsorbeerd*, correspondeert met een *gelijke* hoeveelheid, die in denzelfden tijd door dat element wordt *uitgezonden* (daar anders de temperatuur van het element niet constant zou blijven). Daarom gedraagt zich ook het stralende lichaam, ten opzichte van de beweging der stralende energie, trots de absorptie, analoog met een diathermaan medium, wanneer er slechts evenwicht van temperatuur bestaat. Voor de voortplanting der stralende energie in het stralende lichaam is dus ook de voortplantingssnelheid karakteristiek. Onderzoekt men nu, onder welke voorwaarde er evenwicht is tusschen de hoeveelheden stralende energie in den aether en in het stralende lichaam, dan vindt men ook nu:  $E_0 V_0 = E V^3$ . De straks uitgesproken stelling luidt dus algemeen: Als er evenwicht van temperatuur bestaat, hebben alle lichamen (*diathermane* en *stralende*) en ook de *aether* per kubieke voortplantingssnelheid dezelfde hoeveelheid stralende energie van bepaalde golflengte.

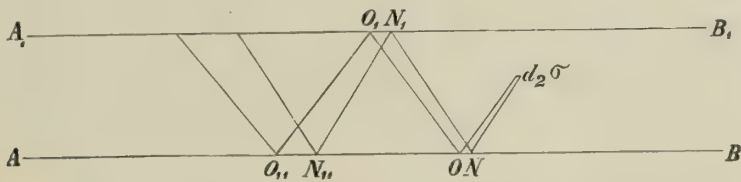
Naast de hoeveelheid moleculaire energie, die in een stralend lichaam aanwezig is, bevat dus iedere volume-eenheid van het lichaam eene hoeveelheid stralende (electro-magnetische energie) van eene

<sup>1)</sup> l. c. pag. 597.

golflengte tusschen  $\lambda$  en  $\lambda + d\lambda$ , waarvan het bedrag per volume-eenheid gegeven wordt door:  $E d\lambda = \frac{I d\lambda}{\alpha V}$ .

§ 10. Omgekeerd kan men ook, uitgaande van het door Kirchhoff bewezen resultaat, dat bij temperatuursevenwicht de aether per volume-eenheid steeds dezelfde hoeveelheid stralende energie van bepaalde golflengte bezit, onafhankelijk van de lichamen, die uitstralen, mits zij slechts stralen van die golflengte emitteeren, de formule  $\frac{I}{\alpha} V^2 = \frac{I_1}{\alpha_1} V_1^2$  strenger afleiden.

Laten daartoe  $AB$  en  $A_1B_1$  de begrenzende (platte) vlakken voorstellen van twee gelijke, homogene, isotrope stralende massa's, die zich tot in het oneindige uitstrekken en alleen eene ruimte openlaten, waarin zich alleen aether bevindt. Zij het evenwicht van temperatuur bereikt en gaan wij na, hoeveel stralende energie de aether per volume-eenheid bevat.



Berekenen wij daartoe eerst welke hoeveelheid stralende energie, met  $|ON| = dS$  overeenkomende, *thans* op  $d_2\sigma$  valt. Zij  $\cos \varepsilon = 1$ , dan valt, volgens formule, in de eerste plaats op  $d_2\sigma$ :

$$\frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{d_2\sigma}{\nu_2 \alpha} \cdot \frac{dS \cos i_1}{a^2} \left( \frac{1}{2} d_1 + \frac{1}{2} d_{11} \right),$$

waarbij  $\frac{1}{2} d_1 + \frac{1}{2} d_{11} = D$  is.  $d_1$  en  $d_{11}$  zijn dus de intensiteiten van het doorgelaten licht, gepolariseerd *in*, resp. *loodrecht op* het invalsvlak.

Behalve deze hoeveelheid ontvangt echter in dit geval (bij temperatuursevenwicht)  $d_2\sigma$  ook stralende energie van een oppervlakte-element  $|O_1N_1|$  van  $A_1B_1$ , die na door  $|ON|$  te zijn teruggekaatst, ook van  $|ON|$  schijnt te komen. Evenzoo na eene 2-malige reflectie van  $|O_{11}N_{11}|$  enz.

$$\text{Daar nu: } \frac{|ON| \cos i_1}{a^2} = \frac{|O_1N_1| \cos i_1}{a_1^2} = \frac{|O_{11}N_{11}| \cos i_1}{a_{11}^2},$$

(daar  $d_2\sigma$  oneindig klein van de 2<sup>de</sup> orde is), is de totale hoeveelheid stralende energie van bepaalde golflengte, die *thans* van  $|ON| = dS$  komende op  $d_2\sigma$  valt:

$$\frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{d_2\sigma}{v^2\alpha} \cdot \frac{dS \cos i_1}{a^2} \left( \frac{1}{2} d_1 + \frac{1}{2} r_1 d_1 + \frac{1}{2} r_1^2 d_1 + \dots \dots \dots \right. \\ \left. \dots \dots \dots + \frac{1}{2} d_{11} + \frac{1}{2} r_{11} d_{11} + \frac{1}{2} r_{11}^2 d_{11} + \dots \dots \dots \right)$$

waarbij  $d_1 + r_1 = 1$  en  $d_{11} + r_{11} = 1$  is. De geheele som dezer 2 meetkundige reeksen is dus juist gelijk 1, zoodat de vorige uitdrukking wordt:

$$= \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{1}{v^2\alpha} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{dS \cos i_1}{a^2} \dots \dots \dots (3).$$

Beschouwen wij nu in plaats van het element  $d_2\sigma$  een oneindig klein afgeknot kegeloppervlak, waarvan de loodlijn in het middelpunt van  $|ON|$  de as is, dan is de grootte hiervan  $= 2\pi a^2 \cdot \sin i_1 \cdot di_1$ .

De hoeveelheid stralende energie, die in de eenheid van tijd van  $dS$  komt en begrepen is tusschen 2 kegeloppervlakken, overeenkomende met de hoeken  $i_1$  en  $i_1 + di_1$  bedraagt dus:

$$\frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{1}{v^2\alpha} \cdot 2\pi a^2 \sin i_1 \cdot di_1 \cdot \frac{dS \cos i_1}{a^2} = \frac{Id\lambda}{2v^2\alpha} dS \cdot \cos i_1 \cdot \sin i_1 \cdot di_1.$$

Op het voorbeeld van Boltzmann <sup>1)</sup> berekenen wij nu aldus de grootheid  $E_0$ . Als  $b$  den loodrechten afstand tusschen de twee evenwijdige vlakken  $AB$  en  $A_1B_1$  voorstelt, dan moet de laatst gevondene uitdrukking met  $\frac{b}{V_0 \cos i_1}$  worden vermenigvuldigd, om daarna te integreeren van  $i_1 = 0$  tot  $i_1 = \frac{\pi}{2}$ .

In 't geheel draagt dus  $dS$  bij tot de hoeveelheid stralende energie, die de aether tusschen de beide vlakken bevat, voor een bedrag

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Id\lambda}{2v^2\alpha} \cdot dS \cdot \cos i_1 \cdot \sin i_1 \cdot \frac{b}{V_0 \cos i_1} \cdot di_1 = \frac{Id\lambda}{2v^2\alpha} \frac{b}{V_0} \cdot dS.$$

Het oneindig groote vlak  $S$  van  $AB$  levert dus:  $\frac{Id\lambda}{2v^2\alpha} \cdot \frac{b}{V_0} \cdot S$ ,  
een even groot vlak  $S$  van  $A_1B_1$  levert evenzoo:  $\frac{Id\lambda}{2v^2\alpha} \cdot \frac{b}{V_0} \cdot S$ .

Deze som  $\frac{Id\lambda}{v^2\alpha} \cdot \frac{b}{V_0} S$  is aanwezig in het volume  $bS$ ; per volume-eenheid is dus aanwezig:

$$E_0 d\lambda = \frac{Id\lambda}{v^2\alpha} \frac{1}{V_0}; \text{ dus is: } E_0 = \frac{I}{\alpha v_0^3} V^2 \text{ of } E_0 V_0^3 = \frac{I}{\alpha} V^2.$$

Volgens Kirchhoff is nu  $E_0 V_0^3$  constant, zoodat  $\frac{I}{\alpha} V^2 = \frac{I_1}{\alpha_1} V_1^2$ .

<sup>1)</sup> Wied. Ann. Bd 22 pag. 35.

De formule (3, pag. 22) leert nog dit: Is de ruimte tussen  $AB$  en  $A_1B_1$  achtereenvolgens gevuld met 2 diathermane media, dan ontvangt bij evenwicht van temperatuur het element  $d_2\sigma$  eerst van  $dS$ :  $\frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{1}{\nu_1^2 a} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{dS \cos i_1}{a^2}$ , vervolgens

$\frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{1}{\nu_{11}^2 a} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{dS \cos i_1}{a^2}$ . Deze hoeveelheden verhouden zich als:  $(n_0^{11})^2 : (n_0^{11})^2$ , ofschoon wij hier niet met volkomen zwarte lichamen te doen hebben.  $n_0^1$  en  $n_0^{11}$  zijn hierbij de absolute brekingsindices der twee diathermane media.

§ 11. De voorstelling van Fourier leert ook, in overeenstemming met de mechanische warmte-theorie, dat de emissie van stralende lichamen met gladde oppervlakte afwijkt van de stralingswet van Stefan. Uit de theoretische beschouwingen van Boltzmann, <sup>1)</sup> die berusten op de mechanische warmte-theorie en op de electro-magnetische licht-theorie van Maxwell, volgt, dat de hoeveelheid stralende energie van den aether, die zich in evenwicht van temperatuur bevindt met stralende lichamen, die emissie-vermogen hebben voor warmte en licht van alle golflengten, evenredig is met de 4<sup>de</sup> macht van de absolute temperatuur. Die totale hoeveelheid stralende energie, per volume-eenheid in den aether aanwezig, is, volgens de notatie in § 9 =  $\int E_0 d\lambda$ , waarbij de integratie is uit te breiden over alle golflengten van de geëmitteerde energie. Volgens dezelfde § is:

$$E_0 V_0^3 = \frac{I}{a} V^2, \text{ dus } V_0^3 \int E_0 d\lambda = \int \frac{I}{a} V^2 \cdot d\lambda.$$

Daar nu, volgens Boltzmann,  $\int E_0 d\lambda$  evenredig is met de 4<sup>de</sup> macht van de absolute temperatuur, is ook:

$\int \frac{I}{a} V^2 \cdot d\lambda = cT^4$ , waarbij  $c$  eene constante is, die voor alle stralende lichamen met een continu spectrum dezelfde is.

Gaan wij nu na, welke uitdrukking door de experimenten wordt opgeleverd. Nemen wij lichamen van voldoende dikte, dan bepaalt men, volgens § 5 bij loodrechte emissie en loodrechten inval op het opvangende vlak-element:

$$\int \frac{dS \cdot d_2\sigma}{a^2} \cdot \frac{Id\lambda}{4\pi n^2 a} \cdot D_n \text{ of } \frac{dS \cdot d_2\sigma}{a^2} \cdot \frac{1}{4\pi V_0^2} \int \frac{IV^2}{a} \cdot D_n \cdot d\lambda.$$

Volgens de theorie is  $\int \frac{IV^2}{a} d\lambda = cT^4$ , de waarnemingen geven

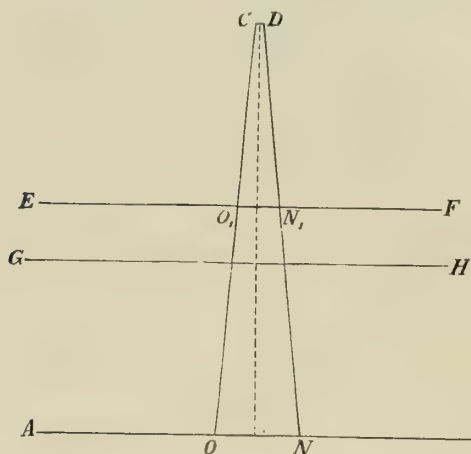
<sup>1)</sup> Boltzmann, Wied. Ann. 22 pag. 31 en 291.



evenwel, van constante factoren afgezien:  $\int \frac{IV^2}{\alpha} D_n \cdot d\lambda$  en daar

$D_n$  geene constante is, maar met  $\lambda$  verandert, kan dus de, bij straling van lichamen met gladde oppervlakte, waargenomene emissie niet nauwkeurig evenredig zijn met de 4<sup>de</sup> macht van de absolute temperatuur. Is echter  $D_n = 1$ , dan gaat de evenredigheid streng door. Zijn de temperaturen, waarover de waarnemingen loopen, niet te zeer uiteenlopende, dan zal ook  $D_n$  nog weinig variëren: ook dan zal de evenredigheid met de 4<sup>de</sup> macht der absolute temperatuur vrij nauwkeurig doorgaan. Met behulp van de algemeene stelling van § 6 is het gemakkelijk in te zien, dat de constanten in de Stefan'sche stralingswet voor verschillende lichamen onderling een zeer eenvoudig verband hebben.

§ 12. Ten slotte zal nog behandeld worden de uitstraling van eene vlakke laag van eene stralende massa, waarvan de dikte nog van invloed is op de hoeveelheid uitgezondene energie. Wij zullen de berekening uitvoeren bij de bespreking van Kirchhoff's beroemde proef: de omkeering der natriumlijnen.



Zij  $AB$  weer het grensvlak van een stralend lichaam, dat zich naar beneden tot in het oneindige moge uitstrekken of anders gezegd, zoo groote dikte, loodrecht op  $AB$  gemeten, heeft, dat vermeerdering dier dikte geen invloed meer heeft op de uitstraling.

Zij  $dS = |ON|$  een oppervlakte-element, oneindig klein van de 1<sup>ste</sup> orde, terwijl weer het opvangende vlak-element  $|CD| = d_2\sigma$  oneindig klein van de 2<sup>de</sup> orde is. Korteidshalve zullen wij aannemen, dat de verbindingslijn van de middelpunten dezer elementen, welker lengte  $= a$  is, loodrecht staat op  $AB$  en op  $|CD|$ . De formule (2) van § 5 gaat dan over in:  $\frac{|ON| d_2\sigma}{a^2} \cdot \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{D_n}{n^2\alpha}$ ; 1) dit is dus de hoeveelheid stralende energie met eene golflengte tusschen  $\lambda$  en

1) Deze formule kan direct veel eenvoudiger worden afgeleid.  $D_n$  heeft betrekking op den overgang uit het stralende, vaste lichaam in de omringende middenstof.

$\lambda + d\lambda$ , die door  $|ON|$  gaat en op  $|CD| = d_2\sigma$  invalt. Nu worde tusschen  $|ON|$  en  $|CD|$  eene laag geplaatst van eene stralende massa, begrensd door 2 vlakken  $EF$  en  $GH$ , beide evenwijdig aan  $AB$ , die den onderlingen afstand  $p$  hebben, terwijl de afstand tusschen  $|CD|$  en  $EF = q$  is. De brekingsindex van deze stralende massa zij gelijk aan dien van de omringende, diathermane middenstof en hare absorptie-coëfficiënt van die grootte, dat de intensiteit van het teruggekaatste licht, bij den doorgang door  $GH$  of  $EF$  te verwaarloozen is. De stralende massa van eene gekleurde vlam, bijv. eene natriumvlam, voldoet nagenoeg aan deze voorwaarden.

Het element  $|CD| = d_2\sigma$  ontvangt door het oppervlakte-element  $|O_1N_1|$  heen, van deze laag eene hoeveelheid energie

$$= \frac{|O_1N_1|}{q^2} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{I_1 d\lambda}{4\pi} \cdot \int_0^p e^{-\alpha_1 \rho} d\rho = \frac{|O_1N_1|}{q^2} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{I_1 d\lambda}{4\pi \alpha_1} (1 - e^{-\alpha_1 p}),$$

waarbij  $I_1$  en  $\alpha_1$  betrekking hebben op de massa van de laag  $EF'GH$ .

Daarentegen valt nu niet meer op  $|CD| = d_2\sigma$ , de straks berekende hoeveelheid  $\frac{|ON|}{a^2} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{D_n}{n^2\alpha}$ , omdat van deze hoeveelheid bij den doorgang door de laag  $EF'GH$  een gedeelte geabsorbeerd wordt; de hoeveelheid, die thans  $d_2\sigma$  bereikt, is:

$$\frac{|ON|}{a^2} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{Id\lambda}{4\pi} \cdot \frac{D_n}{n^2\alpha} e^{-\alpha_1 p}.$$

Eindelijk valt nog op  $d_2\sigma$  eene hoeveelheid energie, afkomstig van een deel der laag  $EF'GH$  en door  $AB$  teruggekaatst.

Deze hoeveelheid is gemakkelijk te berekenen en blijkt, (daar  $d_2\sigma$  oneindig klein is van de 2<sup>de</sup> orde) te zijn

$$= \frac{|ON|}{a^2} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{I_1 d\lambda}{4\pi \alpha_1} (1 - e^{-\alpha_1 p}) R_n \cdot e^{-\alpha_1 p}, \text{ waarbij } R_n + D_n = 1 \text{ is.}$$

In 't geheel valt dus thans op  $d_2\sigma$ :

$$\frac{|ON|}{a^2} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{1}{4\pi} \left( \frac{Id\lambda}{n^2\alpha} D_n \cdot e^{-\alpha_1 p} + \frac{I_1 d\lambda}{\alpha_1} (1 - e^{-\alpha_1 p} + R_n e^{-\alpha_1 p} - R_n e^{-2\alpha_1 p}) \right)$$

Heeft men met zuivere temperatuurstraling te doen, dan is, volgens § 8  $\frac{I}{\alpha} = \frac{I_1}{\alpha_1} n^2$ .

De laatste uitdrukking gaat dan over in:

$$\frac{|ON|}{a^2} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{Id\lambda}{4\pi n^2\alpha} (1 - e^{-2\alpha_1 p} + D_n e^{-2\alpha_1 p}), \text{ terwijl zonder de}$$

tusschengevoegde laag op  $d_2\sigma$  invalt:  $\frac{|ON|}{a^2} \cdot d_2\sigma \cdot \frac{Id\lambda}{4\pi n^2\alpha} \cdot D_n$ .

Het hangt dus van de verhouding:  $\frac{1 - e^{-2\alpha_1 p} + D_n e^{-2\alpha_1 p}}{D_n}$

af, welken invloed de tusschengevoegde laag *EFGH* heeft: is de verhouding  $= 1$ , dan blijft het deel van het spectrum, waarop *I* betrekking heeft, volkomen gelijk; is zij  $> 1$ , dan veroorzaakt de tusschengevoegde laag eene vermeerdering der licht-intensiteit; is zij kleiner dan 1, dan wordt door de tusschengevoegde laag dit deel van het spectrum verzwakt, m. a. w. er treedt eene relatieve verduistering op in dit deel van het spectrum: men ziet in het overigens continue spectrum eene donkere streep.

Daar  $D_n$  en  $e^{-2\alpha_1 p}$  beide echte breuken zijn, is het gemakkelijk in te zien, dat deze verhouding altijd  $> 1$  is. <sup>1)</sup>

Onder de beschreven omstandigheden kan men dus niet de omkeering der lijnen verkrijgen; om dit te bereiken moet de temperatuur van de tusschengevoegde (gas-) laag beneden die van het (vaste) stralende lichaam zijn gelegen. Daartoe is niet voldoende, dat zij lager is: *hoeveel* zij lager moet zijn hangt o. a. ook van  $e^{-\alpha_1 p}$  en van  $D_n$  af. <sup>2)</sup>

De emissie van een stralend lichaam van geringe dikte, met aanmerkelijk reflecteerend vermogen en begrensd door twee evenwijdige platte vlakken, laat zich ook zonder moeilijkheid behandelen door bij de berekeningen ook te letten op de herhaalde reflecties aan de beide begrenzende vlakken.

Daarentegen blijft voor later overgelaten de uitwerking van Fourier's voorstelling voor dubbel-brekende stralende lichamen; ook experimenteel is de uitstraling van dergelijke lichamen nog weinig of niet onderzocht.

*Amsterdam*, Januari 1895.

P. H. DOJES.

<sup>1)</sup> Ware  $D_n = 1$  dan is de verhouding  $= 1$ , onafhankelijk van  $e^{-\alpha_1 p}$ ; in dit geval is wel de temperatuur alleen beslissend.

<sup>2)</sup> De onderzoekingen van Pringsheim (Wied. Ann. 45 pag. 428) maken het waarschijnlijk, dat men bij de gekleurde vlammen niet met zuivere temperatuur-straling te doen heeft; dan gaat de formule  $\frac{I}{a} = \frac{I_1}{a_1} n^2$  niet meer door en moet men de discussie beginnen met:

$$\frac{I d\lambda}{n^2 a} D_n e^{-\alpha_1 p} + \frac{I_1 d\lambda}{a_1} \left( 1 - D_n e^{-\alpha_1 p} - R_n e^{-2\alpha_1 p} \right) \text{ en } \frac{I d\lambda}{n^2 a} \cdot D_n$$

Door Rizzo (Atti. R. Acc. delle Sc. Torino 29, pag. 292—301, 1893/94) zijn proeven genomen met rood-gloeïend kobaltglas om de juistheid van Kirchhoff's wet te onderzoeken. Het korte referaat in Beiblätter. Bd 18 N<sup>o</sup>. 8 pag. 835 en 836 laat misschien niet toe te beslissen omtrent de juistheid van Rizzo's conclusie, dat de wet van Kirchhoff voor gloeiend kobaltglas niet zou doorgaan. Uit dit referaat echter moet men opmaken, dat deze conclusie overijld is.











# RECHERCHES

sur l'orbite de la comète périodique de HOLMES et sur les  
perturbations de son mouvement elliptique

PAR

**H. J. ZWIERS**

de l'Observatoire de Leyde.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

Deel III. N<sup>o</sup>. 5.

AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
1895.





# RECHERCHES

sur l'orbite de la comète périodique de HOLMES et sur les  
perturbations de son mouvement elliptique

PAR

**H. J. ZWIERS**

de l'Observatoire de Leyde.

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**).

Deel III. N<sup>o</sup>. 5.

---

AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
1895.



# Recherches sur l'orbite de la comète périodique de Holmes et sur les perturbations de son mouvement elliptique

PAR

H. J. ZWIERS.

## I. INTRODUCTION.

### § 1. *Précis historique.*

Dans l'après-midi du 8 novembre 1892 le Bureau Central à *Kiel* reçut la dépêche télégraphique suivante (sans signature): „A bright comet was discovered by HOLMES, Nov. 6.531 M. T. Greenw. AR. =  $11^{\circ}42'$ , PD. =  $51^{\circ}28'$ ." Le même soir, à  $6^{\text{h}}\frac{3}{4}$  M. le prof. LAMP de l'Observatoire de *Kiel*, vit la comète à travers des nuages, et les autres astronomes furent avertis par des dépêches télégraphiques, de la nouvelle découverte. Une *Edinburg Circular* de 11 nov. donnait plus de détails: „At  $11^{\text{h}}45^{\text{m}}$  Gr. M. T. on the 6<sup>th</sup> inst., Mr. EDWIN HOLMES, of *London*, discovered a bright comet in the constellation of Andromeda. He describes it as 5' in diameter, with a bright nucleus, but no tail. Its closely approximate mean place as determined by Mr. HOLMES was  $\alpha = 0^{\text{h}}47^{\text{m}}28^{\text{s}}$ ,  $\delta = +38^{\circ}35'7''$ ... The comet was independently found on the night of the 8<sup>th</sup> by Dr. T. D. ANDERSON, the discoverer of the New Star in Auriga." M. J. EWAN DAVIDSON à *Mackay* (Queensland) la découvrit le 9 novembre, d'après une lettre à M. H.-C. RUSSELL, communiquée dans le n<sup>o</sup> 3143 des *Astronomische Nachrichten*.

Il semble, que dès le premier jour M. BERBERICH, du *Recheninstitut* à *Berlin*, conçut l'idée de l'identité de la nouvelle comète avec celle de BIÉLA, qui a disparu, on le sait, depuis son apparition en 1852. Le 9 nov. M. BERBERICH télégraphia à la *Centralstelle*: „Kann der Comet HOLMES in Beziehung zum BIÉLA'schen



Cometen stehen? Perihel Dec. 28, Bewegung Südwest," et le jour suivant il envoya une nouvelle dépêche avec des éléments paraboliques, qui montraient réellement une certaine ressemblance avec ceux de la comète de BIÉLA. D'autres astronomes ayant prononcé la même opinion, on lut bientôt dans les journaux, que la célèbre comète avait été retrouvée, et qu'elle alla passer tout près de la Terre le 27 novembre; on craignait même, que la Terre n'allât se perdre dans une collision avec la comète dans le noeud descendant de l'orbite. Mais bientôt on reconnut la fausseté de cette supposition. La ressemblance des premières orbites avec celle de la comète BIÉLA provenait d'une position fortement erronée, que M. le P. DENZA, de l'Observatoire du Vatican, avait télégraphiée à M. KRUEGER et que celui-ci avait communiquée aux membres de la *Centralstelle*. M. BERBERICH calcula de nouveaux éléments paraboliques, qui se trouvent dans le n° 3129 des *Astr. Nachrichten* (ainsi que ceux de MM. WEISS et KREUTZ), d'après lesquels la comète devait s'éloigner de la Terre et du Soleil.

Mais quelques jours déjà après la dernière date de leurs calculs les écarts entre l'éphéméride et les observations devenaient d'une telle grandeur, que les habiles calculateurs tels que MM. SCHULHOF et BERBERICH devaient être convaincus, qu'aucune parabole ne pouvait représenter les observations. MM. KREUTZ, SCHULHOF et le P. SEARLE reconnurent les premiers le caractère elliptique de l'orbite, et ils avaient la satisfaction, que dès lors il s'établit une belle harmonie entre les calculs et les observations.

Ces éléments elliptiques montraient, que la comète HOLMES était des plus remarquables. L'orbite peu excentrique aurait fait penser à une petite planète, si l'aspect nébuleux n'avait pas trahi la nature cométaire de l'astre. La distance aphélie ne surpasse pas l'orbite de Jupiter, et le périhélie est encore situé en dehors de l'orbite de Mars. L'inclinaison, quoique plus grande que celle de la plupart des comètes à courte période, ne s'élève qu'à  $21^{\circ}$  à peu près, et reste donc au dessous de celles des orbites de plusieurs astéroïdes. On espérait, qu'un astre aussi brillant, qui ne s'éloignait que très lentement de la Terre, pourrait être suivi encore longtemps, et M. SCHULHOF osait même, en vertu de la faible excentricité, exprimer l'espérance un peu hardie, qu'il serait observé, avec les instruments puissants de notre temps dans tous les points de son orbite.

A ces conditions remarquables de l'orbite, la comète a marié des phénomènes aussi extraordinaires d'un point de vue physique. Dans les premiers jours après la découverte elle présentait une nébulosité

brillante, un peu allongée, avec une forte condensation centrale, mais sans noyau distinct. Elle était alors visible à l'œil nu, et son éclat égalait celui de la nébuleuse d'Andromède. Vue dans la lunette, ses bords nord et ouest se montraient assez bien limités; le bord opposé, au contraire, était diffus, et se perdait peu à peu dans l'obscurité du ciel, avec de faibles traces d'une petite queue. Après le 9 ou 10 novembre la comète commença à s'affaiblir; la concentration centrale et la chevelure se dilatèrent, et diminuèrent peu à peu d'éclat. Le 25 novembre elle fut pour la dernière fois observée à l'œil nu <sup>1)</sup>, et alors commença une diminution rapide de l'éclat, et vers le milieu de décembre on devait déjà compter les observations parmi les plus difficiles.

Il était impossible d'attribuer cet affaiblissement à la plus grande distance seulement; du 8 nov. au 12 déc. le rayon vecteur ne s'était augmenté que de 2.40 à 2.51, et la distance géocentrique de 1.52 à 1.87. D'après la formule photométrique <sup>2)</sup> l'éclat devait donc être égal à 0.60, celui au jour de la découverte étant pris pour unité. Les observations nous apprennent toute autre chose. Le 10 déc. M. SCHORR à *Hambourg* avait déjà beaucoup de peine à *trouver* la comète; enfin elle se montrait dans le champ obscur comme une lueur extrêmement pale, qui disparaissait par le moindre éclairage des fils du micromètre <sup>3)</sup>. Du 7 déc. nous avons la note suivante de M. MILLOSEVICH (Collegio Romano à *Rome*): „le 7 déc. les observations au micromètre avec des fils à peine illuminés par l'étincelle électrique deviennent impossibles.” <sup>4)</sup>

Il était alors clair, que l'éclat brillant de la comète à la date de sa découverte avait été l'effet d'une brusque éruption de lumière, de la même sorte, mais sans doute beaucoup plus intense que celles, qu'on avait remarquées chez d'autres comètes et notamment chez celle de M. SAWERTHAL (1888 I). Je ne mentionnerai pas toutes les hypothèses, auxquelles on a recouru pour expliquer ce phénomène; la plus remarquable est celle, qui attribue ce changement à une collision avec un essaim d'étoiles filantes, dont la comète aurait traversé l'orbite. D'autres astronomes supposaient des explosions violentes, ou des actions électriques du Soleil sur la matière cométaire.

<sup>1)</sup> Par M. MILTON UPDEGRAFF à la State Observatory à Columbia, Missouri (*Astr. Journal*, n° 283).

<sup>2)</sup>  $H = \frac{r_0^2 \varrho_0^2}{r^2 \varrho^2}$ . Si l'on préfère l'expression  $H = \frac{r_0^2}{r^2}$ , qui me semble réellement préférable pour les nébulosités d'une certaine étendue, on trouve  $H = 0.91$ .

<sup>3)</sup> *Astr. Nachrichten*, n° 3139.

<sup>4)</sup> *Astr. Nachr.*, n° 3139.

Le 14 janvier 1893 M. HOUGH, à Dearborn Obs., vit encore la comète sous la forme d'une faible nébulosité de 2' de diamètre, mais le 16 elle avait subi un changement complet. MM. PALISA à Vienne, et KOBOLD à Strasbourg, ainsi que plusieurs astronomes en Amérique, virent à la place, indiquée par l'éphéméride, une étoile brillante de 8<sup>ième</sup> grandeur, entourée d'une nébulosité de 20" de diamètre <sup>1)</sup>. Le noyau stellaire avait d'abord un diamètre presque imperceptible dans les lunettes ordinaires; la chevelure était de peu d'étendue, et si faible, que l'objet ne montrait dans le héliomètre de *Koenigsberg* aucune différence avec les étoiles fixes; ce n'était qu'après une contemplation attentive, que M. COHN reconnut son caractère particulier <sup>2)</sup>.

Les phénomènes, que la comète présenta après cette seconde explosion de lumière étaient, pour ainsi dire, les mêmes que ceux de novembre et de décembre. L'aspect changea très vite; le noyau prit la forme d'une disque et devint de plus en plus diffus; son diamètre s'agrandit continuellement, ainsi que celui de la chevelure. Voici quelques mesures de M. HOUGH, tirées du n°. 290 de l'*Astronomical Journal*:

Date.	Diamètre du noyau.	Diamètre de la chevelure.
1893 janv. 16	Etoile 8 <sup>m</sup> 5	10" (estimation)
„ 18	7"	71"
„ 19	4"	76"
„ 23	12"	100"
„ 26	33"	Clair de lune.
„ 30	50"	„ „ „

Quoique ces valeurs ne soient pas déterminées avec la dernière exactitude, elles sont suffisamment exactes pour donner une idée des changements. La distance géocentrique était alors à peu près  $2\frac{1}{2}$  fois le rayon de l'orbite terrestre; à cette distance une seconde d'arc correspond à 1800 kilomètres, ou  $\frac{2}{7}$  du rayon de la Terre.

Pendant deux ou trois jours la comète était de nouveau visible à l'oeil nu, mais bientôt son éclat diminua à mesure que les dimensions devinrent plus grandes. D'après les observations de M. E.-O. LOVETT, à l'Observatoire de l'Université de Virginia, cette diminution était accompagnée d'un changement remarquable de la couleur. Dans sa lettre à M. KRUEGER du 17 janvier, M. PALISA relatait

<sup>1)</sup> D'après M. PALISA (*Astr. Nachr.* 3146); les mesures donnaient d'ailleurs des nombres assez différents. M. KOBOLD l'évaluait à 40" (*A. N.* 3146), M. WILSON à Northfield (E. U.) à 30" (*Astr. Journal* 289), M. HOUGH à 10" seulement (*Astr. Journ.* 290).

<sup>2)</sup> *Astr. Nachrichten* 3146.



déjà la couleur jaune du noyau; „in der Gegend der Ephemeride, dit-il, . . . fiel mir sofort ein gelber Fixstern auf <sup>1)</sup>.” Il semble, que les autres astronomes européens n'ont pas fait attention à cette circonstance. M. LOVETT nous donne de plus amples informations concernant cette particularité. Je citerai ses notes, telles que je les trouve dans l'*Astron. Journal*, n° 292.

Jan. 16. Found in the place of comet Holmes what appeared to be a reddish yellow star in a fog. . .

Jan. 17. . . Color yellowish red. . .

Jan. 19. Visible to the naked eye. Change in color, the comet being decidedly bluish.

De nouveau s'était montré une petite queue. Déjà le 18 janvier M. WILSON en remarquait de faibles traces, qui pouvaient être suivies jusqu'à une distance de 5' du noyau; le 4 février la longueur était de 10', le 14 et le 16 fév. de 25' et de 30' respectivement. Dans les premiers jours l'éclat du noyau aura sans doute empêché de voir les faibles lucurs de la queue, mais il reste toujours un allongement réel.

Peu à peu la comète reprit l'aspect d'une faible nébulosité, qu'elle avait déjà présenté deux mois auparavant. Pour la plupart des astronomes la nouvelle période de visibilité finit le 18 février, la lune étant à peu près dans son premier quartier. Après cette lunaison quelques observations furent encore faites à *Northfield*, à *Strasbourg* et à *Vienne*, mais l'astre était devenue tellement faible, que ces observations ne pouvaient s'étendre au delà du 13 mars 1893, quoique la comète fût encore vue à *Strasbourg* par M. KOBOLD le 6 avril et plusieurs jours suivants.

Il n'était pas impossible, que la comète subirait un troisième changement de son éclat, assez considérable, pour la rendre de nouveau observable. Lorsque sa faiblesse la rendit invisible (avril 1893), et le Soleil alla s'interposer entre la comète et la Terre, on devait attendre jusqu'à l'automne. M. BENTON, assistant à l'Observatoire d'*Albany* (E. U), donna dans le n° 299 de l'*Astr. Journal* une éphéméride, qui s'étendait de juillet 17.5 jusqu'à septembre 27.5 temps moy. de Greenw.; dans le n° 305 de ce journal il l'a étendue jusqu'au commencement de l'année 1894. On ne l'a pas revue. Il semble, que personne des observateurs européens n'a exploré régulièrement les régions du ciel, où la comète devait résider. M. WILSON de l'observatoire de *Northfield* (Minnesota) nous assure <sup>2)</sup>, qu'il l'a attentivement cherchée pendant les nuits du 16 août et du

<sup>1)</sup> *Astr. Nachrichten*, n° 3146.

<sup>2)</sup> *Astronom. Journal* 305.



14 septembre sans trouver la moindre trace de l'astre. M. GEORGE A. HILL, aide-astronome au Naval Observatory à *Washington* (D. C.) a étendu ses recherches encore plus assidûment. Dans les mois de décembre 1893 et de janv. 1894 il utilisait les intervalles entre les passages d'étoiles pour chercher notre comète. Il dessinait chaque soir une carte avec un rayon de 20' autour de la position de la comète; les positions des étoiles fixes furent copiées de la carte d'ARGELANDER et comparées avec le ciel, en intercalant les étoiles plus faibles jusqu'à la 12<sup>me</sup> grandeur (la limite pour le réfracteur de 10 inch); la nuit suivante il examina la même région de nouveau, mais il pouvait toujours identifier toutes les étoiles. Après cet examen il tourna son réfracteur pour explorer une région plus grande (rayon de 2 degrés), mais il ne trouva que trois faibles nébuleuses, qu'il identifia plus tard dans les catalogues existants. Dans le commencement de janvier 1894 il se servit, avec M. le prof. BROWN, du grand équatorial (ouverture de 26 inch); le ciel était d'une pureté extraordinaire, et si la comète avait eu l'éclat d'une nébuleuse de la 14<sup>me</sup> grandeur, elle n'aurait pas échappé à leur attention <sup>1)</sup>.

Les observations spectroscopiques de la comète sont peu nombreuses; le spectre était cependant très remarquable. Le 13 novembre, lorsque la comète était même un peu plus brillante que la grande nébuleuse d'Andromède, M. VOGEL à *Potsdam* voulait examiner le spectre à l'aide d'un spectroscopie à un seul prisme de flint, adapté à l'équatorial de 11 zoll d'ouverture, mais malgré le vif éclat de la comète, le spectre était tout à fait invisible. Le même soir encore il réussit à le voir à l'aide d'un spectroscopie à plus faible dispersion; il s'étendait de D jusqu'à F à peu près, et était *parfaitement continu*; M. VOGEL n'apercevait pas les moindres indications des trois bandes brillantes des hydrocarbures, qui caractérisaient le spectre des autres comètes, même pas de la bande verte, quoique jusqu'alors celle-ci n'eût jamais fait défaut. Le maximum de l'intensité était situé entre le jaune et le vert <sup>2)</sup>.

Ces observations confirmaient les résultats, que M. CAMPBELL venait de publier dans le n° 3133 des *Astr. Nachr.* Cet astronome aura fait très probablement ses observations au grand équatorial de l'Observatoire Lick; il apercevait aussi un spectre continu, qui s'étendait dans le noyau et dans la queue de D jusqu'à G, avec

<sup>1)</sup> *Astronomy and Astro-Physics*, avril 1894, page 324 (*A Search for Comet of Holmes*).

<sup>2)</sup> *Astr. Nachr.* 3142.

un maximum d'intensité vers  $\lambda$  515, que M. CAMPBELL attribuait à des traces de la bande verte. Les photogrammes du spectre s'étendaient de F jusqu' à H $\delta$  (la raie violette de l'hydrogène), et montraient aussi un spectre continu, dans lequel il était impossible de constater les raies de Fraunhofer, mais on avait dû ouvrir la fente du spectroscopé, de sorte que ces observations ne sont pas décisives pour prouver l'absence de ces raies. Quant à l'état du spectre après les changements du 16 janvier, je n'ai lu qu'une note de M. KAMMERMANN à Genève, qui le trouva continu comme auparavant, sans raies et sans bandes; mais cette observation est faite à l'aide d'un petit instrument et n'a que peu de valeur.

## § 2. La méthode pour la détermination de l'orbite provisoire.

Les méthodes, employées habituellement pour la détermination des orbites elliptiques, sont celle de GAUSS, modifiée par ENCKE, HANSEN et d'autres astronomes, et celle de M. VON OPPOLZER. Elles sont basées sur la loi, que l'orbite doit être une courbe plane, dont le plan passe par le centre du Soleil, et sur la deuxième loi de KEPLER, qui nous permet d'exprimer le rapport des triangles, formés par trois rayons vecteurs, par une fonction approchée du temps écoulé. La différence essentielle entre les deux méthodes consiste dans le choix des inconnues. GAUSS ramenait le problème à la détermination de la deuxième distance géocentrique, tandis que M. VON OPPOLZER donnait une belle solution du problème en introduisant comme inconnues la première et la troisième distance, ou plutôt la somme et la différence des rayons vecteurs correspondants. Ce changement donnait de grands avantages dans la convergence des approximations successives. Mais leurs formules n'étaient pas encore assez approchées, et après de longs et pénibles calculs il fallait souvent recommencer, pour tenir compte des quantités du quatrième ordre, que l'on avait négligées dans cette première approximation.

On sait, que les expressions pour ces rapports sont déduites en développant les coordonnées rectangulaires de l'astre en séries, d'après les puissances croissantes de l'intervalle de temps, en considérant cet intervalle comme une petite quantité du premier ordre. L'approximation a pu être poussée jusqu'aux termes du troisième ordre par rapport au temps, et M. VON OPPOLZER donne des indications pour calculer l'influence des termes du quatrième ordre. Mais ces calculs exigent tant de travail, qu'on peut dire, sans exagération, que ces démarches ont échoué.

Il n'y a que cinq ou six années, que l'illustre GIBBS a enrichi

l'astronomie théorique d'une nouvelle méthode aussi ingénueuse que simple <sup>1)</sup>. Je la nommerai *la méthode des vecteurs*. Des lois de l'attraction il déduit une équation entre les trois rayons vecteurs, qui renferme la solution du problème, et qui est exacte jusqu'aux termes du quatrième ordre par rapport au temps incl.; d'ailleurs il donne une méthode fort simple pour pousser l'approximation encore plus loin. D'après ses formules j'ai calculé en 1891 une orbite elliptique de la comète de M. SPITALER, et j'étais frappé par la grande approximation: l'orbite, trouvée dans la „deuxième hypothèse” ne laissait subsister dans les trois positions données que des erreurs de 0",1, de 0",6 et de 0",2 en arc du grand cercle.

Mais les formules avaient beau être simples, les calculs étaient trop longs. On devait décomposer chaque équation entre les vecteurs, en considérant leurs projections sur les axes des coordonnées, et cette décomposition entraînait un grand nombre de quantités auxiliaires, dont le calcul devait être recommencé après chaque approximation.

La solution du problème est simplifiée de beaucoup, en combinant, comme l'a fait M. FABRITIUS <sup>2)</sup>, l'essentiel de la méthode de GIBBS avec les anciennes méthodes de GAUSS, HANSEN, VON OPPOLZER etc. Une détermination de l'orbite de la comète ZONA m'a fait voir les avantages de cette méthode. Il y a peut être quelque intérêt d'indiquer ici les formules, qui me paraissent les plus propres pour atteindre le but proposé. En général, j'ai employé les notations de M. FABRITIUS et de M. VON OPPOLZER.

### § 3. *L'équation fondamentale de M. GIBBS.*

Désignons par  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$  les trois positions de la comète <sup>3)</sup>. Notre origine du temps sera fixé au moment de la deuxième observation, et nous choisirons notre unité de temps telle que l'accélération, due à l'attraction du Soleil, soit égale à l'unité, quand la comète se trouve à l'unité de distance, c'est à dire

$$\tau = k (t - t_0), \quad (1)$$

<sup>1)</sup> *Memoirs of the National Academy of Sciences*, Vol. IV, part 2, p. 81 (1889): *On the determination of elliptic orbits from three complete observations* bij J. WILLIARD GIBBS.

<sup>2)</sup> W. FABRITIUS, *Ueber eine leichte Methode der Bahnbestimmung mit Zugrundelegung des Princips von GIBBS*, dans les *Astr. Nachr.* n° 3061.

<sup>3)</sup> Il va sans dire, que les orbites des petites planètes peuvent être calculées d'après les mêmes expressions, mais pour fixer les idées, je ne parlerai dans la suite que de „la comète”.

$k$  étant la constante de GAUSS, dont le logarithme est

$$8,235\,5814\,414 - 10,$$

et  $t - t_0$  étant exprimé en jours moyens.

On peut poser, avec une approximation jusqu'aux termes du quatrième ordre incl. par rapport au temps:

$$x = A_x + B_x \tau + C_x \tau^2 + D_x \tau^3 + E_x \tau^4 \quad (2)$$

En posant

$$\begin{aligned} -\tau_3 &= \text{l'intervalle entre la 1}^{\text{re}} \text{ et la 2}^{\text{me}} \text{ observation,} \\ +\tau_1 &= \text{l'intervalle entre la 2}^{\text{me}} \text{ et la 3}^{\text{me}} \text{ observation,} \\ r_1, r_2, r_3 &= \text{les 3 rayons vecteurs,} \end{aligned}$$

nous avons

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_x - \tau_3 B_x + \tau_3^2 C_x - \tau_3^3 D_x + \tau_3^4 E_x \\ x_2 &= A_x \\ x_3 &= A_x + \tau_1 B_x + \tau_1^2 C_x + \tau_1^3 D_x + \tau_1^4 E_x \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

En négligeant la masse de la comète, nous avons d'après la loi de NEWTON:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{x}{r^3}$$

ou

$$- \frac{x}{r^3} = 2 C_x + 6 \tau D_x + 12 \tau^2 E_x$$

De cette équation on déduit encore 3 relations:

$$\left. \begin{aligned} - \frac{x_1}{r_1^3} &= 2 C_x - 6 \tau_3 D_x + 12 \tau_3^2 E_x \\ - \frac{x_2}{r_2^3} &= 2 C_x \\ - \frac{x_3}{r_3^3} &= 2 C_x + 6 \tau_1 D_x + 12 \tau_1^2 E_x \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Des six équations (3) et (4) on peut éliminer les cinq inconnues  $A_x$ ,  $B_x$ ,  $C_x$ ,  $D_x$  et  $E_x$ ; on obtiendra une relation entre  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ . Si nous posons pour abréger

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_3} \left( 1 + \frac{1}{12} \frac{-\tau_1^2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2}{r_1^3} \right) \\ n_2 &= 1 - \frac{1}{12} \frac{\tau_1^2 + 3 \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2}{r_2^3} \\ n_3 &= \frac{\tau_3}{\tau_1 + \tau_3} \left( 1 + \frac{1}{12} \frac{\tau_1^2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2}{r_3^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$



cette relation prend la forme très simple

$$n_1 x_1 - n_2 x_2 + n_3 x_3 = 0 \quad (6a)$$

Pour les coordonnées  $y$  et  $z$  on déduit de la même manière:

$$n_1 y_1 - n_2 y_2 + n_3 y_3 = 0 \quad (6b)$$

$$n_1 z_1 - n_2 z_2 + n_3 z_3 = 0 \quad (6c)$$

Remarque. *Les deux intervalles de temps étant égaux, les relations (6) sont rigoureuses jusqu'aux termes du cinquième ordre incl. par rapport au temps.*

Posons:

$$\tau_1 = \tau_3 = \tau$$

$$x = A_x + B_x \tau + C_x \tau^2 + D_x \tau^3 + E_x \tau^4 + F_x \tau^5$$

On a

$$-\frac{x}{r^3} = 2C_x + 6\tau D_x + 12\tau^2 E_x + 20\tau^3 F_x.$$

En ajoutant les expressions pour  $x_1$  et  $x_3$  et celles pour  $-\frac{x_1}{r_1^3}$  et  $-\frac{x_3}{r_3^3}$ , on voit disparaître la nouvelle inconnue  $F_x$  au même moment que  $B_x$  et  $D_x$ ; par suite il en résultera la même relation entre  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  qu'auparavant.

#### § 4. Application de l'équation de GIBBS. <sup>1)</sup>

La condition connue, que le plan, déterminé par les trois positions de la comète, passe par le centre du Soleil, donne les 3 relations:

<sup>1)</sup> Nous avons fait usage dans le § précédent, des notations de l'analyse Cartésienne; M. GIBBS se sert partout de la méthode des vecteurs. Il pose

$\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$  = les 3 rayons vecteurs, qui mènent du Soleil à la comète.

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  et  $\mathfrak{E}$  = cinq vecteurs auxiliaires, de sorte qu'on a

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\tau + \mathfrak{C}\tau^2 + \mathfrak{D}\tau^3 + \mathfrak{E}\tau^4.$$

Le chemin indiqué dans le texte, nous mène alors à la relation

$$n_1 \mathfrak{R}_1 - n_2 \mathfrak{R}_2 + n_3 \mathfrak{R}_3 = 0.$$

M. GIBBS la nomme son *équation fondamentale*. Elle équivaut aux trois équations (6), et, de plus, elle exprime:

1°. que le plan de l'orbite, fixé par les trois positions, doit passer par le centre du Soleil;

2°. que les vecteurs  $n_1 \mathfrak{R}_1$ ,  $n_2 \mathfrak{R}_2$  et  $n_3 \mathfrak{R}_3$  peuvent être considérés comme les trois côtés d'un triangle.

Cette forme concise des formules et des démonstrations est un des grands avantages de la méthode des vecteurs. La propriété sub 2, dont nous ferons usage dans la suite, sera démontrée dans le § 7 en partant des équations (6). On comprendra aisément, que les quantités  $A_x \dots E_x$  sont les projections des vecteurs  $\mathfrak{A} \dots \mathfrak{E}$  sur l'axe des  $x$ .

$$\left. \begin{aligned} [r_2 r_3] x_1 - [r_1 r_3] x_2 + [r_1 r_2] x_3 &= 0 \\ [r_2 r_3] y_1 - [r_1 r_3] y_2 + [r_1 r_2] y_3 &= 0 \\ [r_2 r_3] z_1 - [r_1 r_3] z_2 + [r_1 r_2] z_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

où  $[r_1 r_2]$ ,  $[r_1 r_3]$  et  $[r_2 r_3]$  représentent les triangles entre les 2 rayons vecteurs indiqués. Ces trois équations (7) sont *identiques* si l'on considère  $[r_1 r_2]$  etc. comme des fonctions des coordonnées, mais elles sont *indépendantes* l'une de l'autre, quand on y substitue des valeurs, déduites des lois de la mécanique.

En comparant les expressions (6) et (7), on trouve:

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{n_1}{n_2}; \quad \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = \frac{n_3}{n_2} \quad (8)$$

Posons maintenant:

$\lambda, \beta$  = la longitude et la latitude de la comète.

$\rho$  = sa distance géocentrique.

$L$  = la longitude du Soleil.

$B$  = sa latitude, exprimée en secondes d'arc.

$R$  = la distance de la Terre au Soleil.

Les équations (7) deviennent:

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} (\rho_1 \cos \lambda_1 \cos \beta_1 - R_1 \cos L_1) + \frac{n_3}{n_2} (\rho_3 \cos \lambda_3 \cos \beta_3 - R_3 \cos L_3) &= \\ &= \rho_2 \cos \lambda_2 \cos \beta_2 - R_2 \cos L_2 \\ \frac{n_1}{n_2} (\rho_1 \sin \lambda_1 \cos \beta_1 - R_1 \sin L_1) + \frac{n_3}{n_2} (\rho_3 \sin \lambda_3 \cos \beta_3 - R_3 \sin L_3) &= \\ &= \rho_2 \sin \lambda_2 \cos \beta_2 - R_2 \sin L_2 \\ \frac{n_1}{n_2} (\rho_1 \sin \beta_1 - R_1 B_1 \text{ arc } 1'') + \frac{n_3}{n_2} (\rho_3 \sin \beta_3 - R_3 B_3 \text{ arc } 1'') &= \\ &= \rho_2 \sin \beta_2 - R_2 B_2 \text{ arc } 1''. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Résolvant ces équations par rapport à  $\rho_1, \rho_2$  et  $\rho_3$ , et posant

$$K = \frac{\sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - \lambda_2) + \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - \lambda_1) - \cos \beta_1 \cos \beta_2 \sin \beta_3 \sin (\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin (\lambda_3 - \lambda_1) - \cos \beta_1 \cos \beta_2 \sin \beta_3 \sin (\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (10)$$

$$A_1 = R_1 [\sin \beta_2 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - L_1) - \sin \beta_3 \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - L_1)] - R_1 \cos \beta_2 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - \lambda_2) B_1 \text{ arc } 1'' \quad (11)$$

etc. <sup>1)</sup>, on obtient:

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} K \rho_1 &= \frac{n_1}{n_2} A_1 + B_1 + \frac{n_3}{n_2} C_1 \\ K \rho_2 &= \frac{n_1}{n_2} A_2 + B_2 + \frac{n_3}{n_2} C_2 \\ \frac{n_3}{n_2} K \rho_3 &= \frac{n_1}{n_2} A_3 + B_3 + \frac{n_3}{n_2} C_3 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

<sup>1)</sup> Pour les autres expressions voir § 5.

Les équations (5) et (12) donnent la solution du problème; mais l'expression pour  $\rho_1$  renferme encore, en vertu du coefficient  $n_3$ , le rayon vecteur  $r_3$ ; de même  $\rho_3$  dépend encore de  $r_1$ . Nous allons donc éliminer  $\frac{n_3}{n_2}$  entre la première et la deuxième équation de

(12), et  $\frac{n_1}{n_2}$  entre la deuxième et la troisième. Il vient:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \frac{C_1 K \rho_2 + (B_1 C_2 - B_2 C_1)}{\frac{n_1}{n_2} C_2 K} + \frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{C_2 K} \\ \rho_3 &= \frac{A_3 K \rho_3 + (A_2 B_3 - A_3 B_2)}{\frac{n_3}{n_2} A_2 K} + \frac{A_2 C_3 - A_3 C_2}{A_2 K} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Nous transformerons les équations (5) en posant

$$\tau_1 + \tau_3 = \tau_2 \quad (14)$$

Cela donne :

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_2} \left[ 1 + \frac{1}{12} \frac{\tau_1 \tau_3 + \tau_2 (\tau_3 - \tau_1)}{r_1^3} \right] \\ n_2 &= 1 - \frac{1}{12} \frac{\tau_1 \tau_3 + \tau_2^2}{r_2^3} \\ n_3 &= \frac{\tau_3}{\tau_2} \left[ 1 + \frac{1}{12} \frac{\tau_1 \tau_3 - \tau_2 (\tau_3 - \tau_1)}{r_3^3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Pour abréger, nous représenterons ces équations par

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_2} \left( 1 + \frac{\mu_1}{r_1^3} \right) \\ n_2 &= 1 - \frac{\mu_2}{r_2^3} \\ n_3 &= \frac{\tau_3}{\tau_2} \left( 1 + \frac{\mu_3}{r_3^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

De (16) se déduit:

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= \frac{\tau_1}{\tau_2} \left[ 1 + \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1 r_2^3 \left( \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right)}{r_2^3 - \mu_2} \right] \\ \frac{n_3}{n_2} &= \frac{\tau_3}{\tau_2} \left[ 1 + \frac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_3 r_2^3 \left( \frac{1}{r_3^3} - \frac{1}{r_2^3} \right)}{r_2^3 - \mu_2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Posons pour abréger

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} &= \kappa_1 \\ \frac{1}{r_3^3} - \frac{1}{r_2^3} &= \kappa_3 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Pour la détermination de  $\rho_2$  nous tirons de l'équation (12):

$$K \rho_2 = \frac{\tau_1}{\tau_2} A_2 + B_2 + \frac{\tau_3}{\tau_2} C_2 + \frac{\tau_1 A_2 (\mu_1 + \mu_2) + \tau_3 C_2 (\mu_2 + \mu_3) - (\tau_1 A_2 \mu_1 \kappa_1 - \tau_3 C_2 \mu_3 \kappa_3) r_2^3}{\tau_2 (r_2^3 - \mu_2)} \quad (19)$$

Les quantités  $\tau$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne dépendent que des positions de la comète et du Soleil;  $\mu$  et  $\kappa$ , au contraire, dépendent des rayons vecteurs, et ces quantités auxiliaires doivent être recalculées après chaque approximation. En posant

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_1}{\tau_2} A_2 + B_2 + \frac{\tau_3}{\tau_2} C_2 &= \Gamma \\ \tau_1 A_2 (\mu_1 + \mu_2) + \tau_3 C_2 (\mu_2 + \mu_3) &= \alpha \\ \tau_1 A_2 \mu_1 &= k_1 \\ \tau_3 C_2 \mu_3 &= k_3 \\ k_1 \kappa_1 - k_3 \kappa_3 &= \beta \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

nous avons séparé, autant que possible, les valeurs constantes des valeurs variables. Par ces abréviations l'équation (19) prend la forme

$$K \rho_2 = \Gamma + \frac{\alpha - \beta r_2^3}{\tau_2 (r_2^3 - \mu_2)}$$

Pour exprimer  $\rho$  en  $r$  nous avons les expressions:

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi_n &= \cos \beta_n \cos (\lambda_n - L_n) + \sin \beta_n B_n \operatorname{arc} 1'' \\ R_n \sin \psi_n &= a_n \\ R_n \cos \psi_n &= b_n \\ \rho_n &= \sqrt{r_n^2 - a_n^2} + b_n \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

### § 5. Tableau des formules.

En résumant les expressions nécessaires pour le calcul d'une orbite, j'introduirai encore quelques abréviations qui s'expliquent d'elles-mêmes.

$t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ , les trois dates des observations.

*Cas A.* Une orbite approchée étant connue d'avance, on corrigera ces dates pour l'effet de l'aberration planétaire, en retranchant



l'équation de la lumière  $\Delta t$  des dates, données par les observateurs. On a, exprimé en jours moyens :

$$\Delta t = [7,76128 - 10] \rho.$$

*Cas B.* L'orbite de la comète étant tout à fait inconnue, on fera ici abstraction de cette correction, qui se confondra plus tard avec la correction de l'équation fondamentale (*voir* § 6).

Soient

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 &= \text{les longitudes} \\ \beta_1, \beta_2, \beta_3 &= \text{les latitudes} \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{de la comète.} \\ \text{du Soleil.} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} L_1, L_2, L_3 &= \text{les longitudes du Soleil,} \\ B_1, B_2, B_3 &= \text{ses latitudes, exprimées en sec. d'arc.} \\ R_1, R_2, R_3 &= \text{les distances de la Terre au Soleil.} \end{aligned}$$

Les coordonnées doivent être corrigées pour l'effet de la parallaxe. Si l'on connaît une orbite suffisamment approchée, (*cas A*), on réduira les positions observées de la comète au centre de la Terre; dans le *cas B* on modifiera les coordonnées du Soleil, tirées des Tables, soit en introduisant le *locus fictus* de GAUSS, soit en appliquant des corrections parallactiques pour obtenir les lieux observés du Soleil. Les expressions nécessaires pour ces réductions se trouvent dans les traités d'astronomie (p. e. VON OPPOLZER, I, p. 22—40).

En outre il faut réduire les positions au même équinoxe (du commencement de l'année); on a pour la comète :

$$\begin{aligned} \alpha \text{ moy.} &= \alpha \text{ app.} - [f + g \sin (G + \alpha) \tan \delta + h \sin (H + \alpha) \sec \delta] \\ \delta \text{ moy.} &= \delta \text{ app.} - [i \cos \delta + g \cos (G + \alpha) + h \cos (H + \alpha) \sin \delta] \end{aligned}$$

*Remarque.* Il faut omettre ici les termes en  $h$  et  $i$ , si l'on a déjà tenu compte de l'aberration (*cas A*).

Le *Berliner Jahrbuch* donne les positions du Soleil rapportées à l'équinoxe moyen du comm. de l'année; si les coordonnées des Tables renferment les réductions à l'équinoxe de la date, il faut retrancher la précession, la nutation et l'aberration. Les observations tombant dans deux années consécutives, il faut encore tenir compte de la précession. Toutes les quantités nécessaires se trouvent dans les éphémérides astronomiques.

Ensuite on va calculer :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= k(t_3 - t_2); \quad \tau_2 = k(t_3 - t_1); \quad \tau_3 = k(t_2 - t_1) \\ \log k &= 8,235\,5814\,414 - 10 \end{aligned} \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{12} [\tau_1 \tau_3 + \tau_2 (\tau_3 - \tau_1)] \\ \mu_2 &= \frac{1}{12} (\tau_1 \tau_3 + \tau_2^2) \\ \mu_3 &= \frac{1}{12} [\tau_1 \tau_3 - \tau_2 (\tau_3 - \tau_1)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

Pour vérifier les valeurs de  $\mu$  on peut se servir de la relation

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} \mu_1 + \mu_2 + \frac{\tau_3}{\tau_2} \mu_3 = \frac{1}{2} \tau_1 \tau_3 \quad (\text{II } a)$$

$$K = -\sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - \lambda_2) + \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - \lambda_1) \\ - \cos \beta_1 \cos \beta_2 \sin \beta_3 \sin (\lambda_2 - \lambda_1) \quad (\text{III})$$

Le facteur  $K$  n'est que du troisième ordre par rapport aux arcs parcourus. L'exactitude de la solution dépendant en grande partie de ce facteur, on en revisera le calcul avec soin, en prenant plutôt une décimale de plus.

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= + R_1 [\sin \beta_2 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - L_1) - \sin \beta_3 \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - L_1)] \\ &\quad - R_1 \cos \beta_2 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - \lambda_2) B_1 \text{ arc } 1'' \\ B_1 &= - R_2 [\sin \beta_2 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - L_2) - \sin \beta_3 \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - L_2)] \\ &\quad + R_2 \cos \beta_2 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - \lambda_2) B_2 \text{ arc } 1'' \\ C_1 &= + R_3 [\sin \beta_2 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - L_3) - \sin \beta_3 \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - L_3)] \\ &\quad - R_3 \cos \beta_2 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - \lambda_2) B_3 \text{ arc } 1'' \\ A_2 &= + R_1 [\sin \beta_1 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - L_1) - \cos \beta_1 \sin \beta_3 \sin (\lambda_1 - L_1)] \\ &\quad - R_1 \cos \beta_1 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - \lambda_1) B_1 \text{ arc } 1'' \\ B_2 &= - R_2 [\sin \beta_1 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - L_2) - \cos \beta_1 \sin \beta_3 \sin (\lambda_1 - L_2)] \\ &\quad + R_2 \cos \beta_1 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - \lambda_1) B_2 \text{ arc } 1'' \\ C_2 &= + R_3 [\sin \beta_1 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - L_3) - \cos \beta_1 \sin \beta_3 \sin (\lambda_1 - L_3)] \\ &\quad - R_3 \cos \beta_1 \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - \lambda_1) B_3 \text{ arc } 1'' \\ A_3 &= + R_1 [\sin \beta_1 \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - L_1) - \cos \beta_1 \sin \beta_2 \sin (\lambda_1 - L_1)] \\ &\quad - R_1 \cos \beta_1 \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - \lambda_1) B_1 \text{ arc } 1'' \\ B_3 &= - R_2 [\sin \beta_1 \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - L_2) - \cos \beta_1 \sin \beta_2 \sin (\lambda_1 - L_2)] \\ &\quad + R_2 \cos \beta_1 \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - \lambda_1) B_2 \text{ arc } 1'' \\ C_3 &= + R_3 [\sin \beta_1 \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - L_3) - \cos \beta_1 \sin \beta_2 \sin (\lambda_1 - L_3)] \\ &\quad - R_3 \cos \beta_1 \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - \lambda_1) B_3 \text{ arc } 1'' \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV})$$

$$\Gamma = \frac{\tau_1}{\tau_2} A_2 + B_2 + \frac{\tau_3}{\tau_2} C_2 \quad (\text{V})$$

$$\alpha = \tau_1 A_2 (\mu_1 + \mu_2) + \tau_3 C_2 (\mu_2 + \mu_3) \quad (\text{VI})$$

$$h_1 = \tau_1 A_2 \mu_1 \quad h_3 = \tau_3 C_2 \mu_3 \quad (\text{VII})$$

$$\cos \psi_n = \cos \beta_n \cos (\lambda_n - L_n) + B_n \sin \beta_n \text{ arc } 1''; \quad 0 < \psi_n < \pi \quad (\text{VIII})$$

<sup>1)</sup> Je donne ici les termes dépendants de la latitude du Soleil, quoique je les aie omis dans la détermination de l'ellipse provisoire.

$$a_n = R_n \sin \psi_n \quad b_n = R_n \cos \psi_n \quad (\text{IX})$$

$$H_1 = B_1 C_2 - B_2 C_1 \quad H_3 = A_2 B_3 - A_3 B_2 \quad (\text{X})$$

$$F_1 = \frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{K C_2} \quad F_3 = \frac{A_2 C_3 - A_3 C_2}{K A_2} \quad (\text{XI})$$

Après le calcul de ces quantités auxiliaires on commencera la *première hypothèse*; si l'on connaît des éléments approchés de l'orbite, ou si une solution précédente a fourni des valeurs pour  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$ , on va calculer

$$\kappa_1 = \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \quad \kappa_3 = \frac{1}{r_3^3} - \frac{1}{r_2^3} \quad (\text{XII})$$

$$k_1 \kappa_1 - k_3 \kappa_3 = \beta \quad (\text{XIII})$$

Les valeurs de  $r$  étant encore tout à fait inconnues, on supposera d'abord  $\beta = 0$

Alors on résout l'équation

$$K\rho_2 = K[\sqrt{r_2^2 - a_2^2} + b_2] = \Gamma + \frac{\alpha - \beta r_2^3}{\tau_2 (r_2^3 - \mu_2)} \quad (\text{XIV})$$

et ensuite on déduira

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left( 1 + \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \kappa_1 r_2^3}{r_2^3 - \mu_2} \right); \quad \frac{n_3}{n_2} = \frac{\tau_3}{\tau_2} \left( 1 + \frac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_3 \kappa_3 r_2^3}{r_2^3 - \mu_2} \right) \quad (\text{XV})$$

$$\rho_1 = \frac{C_1 K\rho_2 + H_1}{\frac{n_1}{n_2} C_2 K} + F_1 \quad ; \quad \rho_3 = \frac{A_3 K\rho_2 + H_3}{\frac{n_3}{n_2} A_2 K} + F_3 \quad (\text{XVI})$$

$$r_1 = \sqrt{a_1^2 + (\rho_1 - b_1)^2}; \quad r_3 = \sqrt{a_3^2 + (\rho_3 - b_3)^2} \quad (\text{XVII})$$

On reprendra la solution des équations pour  $\kappa$ ,  $\beta$ ,  $\rho_2$  etc., jusqu'à ce que les nouvelles valeurs s'accordent rigoureusement avec les précédentes.

### § 6. Correction de l'équation fondamentale.

Les calculs de la première hypothèse étant terminés, nous avons trouvé des valeurs de  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$  qui satisfont rigoureusement aux conditions géométriques du problème; quant aux conditions mécaniques, elles doivent satisfaire aux équations (6). Mais ces équations n'expriment pas exactement les lois de l'attraction, auxquelles l'astre doit obéir, quoique la différence ne soit que du cinquième ou du sixième ordre par rapport au temps.

Il s'agit donc maintenant de corriger l'équation fondamentale, de manière qu'elle exprime rigoureusement les lois de la mécanique céleste. On pourrait calculer les éléments de l'orbite, et en déduire les rapports entre les triangles et les secteurs elliptiques. Les secteurs étant en proportion exacte avec les intervalles de temps,

d'après la deuxième loi de KÉPLER, on en déduirait des valeurs plus approchées de  $\frac{n_1}{n_2}$  et de  $\frac{n_3}{n_2}$ , avec lesquelles on recommencerait le calcul.

M. GIBBS nous montre un autre chemin, qui me semble plus court et plus simple. Il combine la correction de son équation fondamentale avec les dernières corrections pour l'aberration de la lumière.

Lui aussi, il déduit les éléments nécessaires de l'orbite, mais il prend soin de n'introduire aucune nouvelle condition. Nous venons de trouver trois rayons vecteurs, qui satisfont exactement à l'équation (6). Cette équation a été déduite de

$$x = A_x + B_x \tau + C_x \tau^2 + D_x \tau^3 + E_x \tau^4,$$

mais la dernière relation n'est pas exacte; il faudrait ajouter encore toute une série de termes

$$F_x \tau^5 + G_x \tau^6 + H_x \tau^7 + \dots$$

On obtiendra cependant approximativement la même valeur exacte de  $x$  en modifiant convenablement les valeurs de  $\tau$ , de sorte que les équations ainsi modifiées répondent à la loi des aires. Des trois rayons vecteurs, que nous avons trouvés, nous déduisons par la pure géométrie les éléments de l'orbite. Avec ces éléments nous calculons d'après les lois de KÉPLER les intervalles  $\tau_1'$  et  $\tau_3'$ , employés par un astre fictif, pour parcourir les mêmes arcs héliocentriques que la comète. Parce que les éléments sont des fonctions de  $\tau_1$  et  $\tau_3$ , on a aussi

$$\begin{aligned} \tau_1' &= f_1(\tau_1, \tau_3) \\ \tau_3' &= f_3(\tau_1, \tau_3). \end{aligned}$$

En général, les intervalles calculés ne seront pas égaux à  $\tau_1$  et  $\tau_3$ ; les différences sont du même ordre que l'erreur de l'équation fondamentale. Par suite on a, en négligeant les quantités du 4<sup>me</sup> ordre

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \tau_1} &= 1; & \frac{\partial f_1}{\partial \tau_3} &= 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial \tau_1} &= 0; & \frac{\partial f_3}{\partial \tau_3} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Cherchons maintenant des valeurs  $\tau_1'' = \tau_1 + \delta \tau_1$  et  $\tau_3'' = \tau_3 + \delta \tau_3$ , telles qu'on a

$$\tau_1 = f_1(\tau_1'', \tau_3'') \quad \tau_3 = f_3(\tau_1'', \tau_3'').$$

Développons ces fonctions suivant les puissances croissantes de  $\delta \tau_1$  et  $\delta \tau_3$ :



$$a_n = R_n \sin \psi_n \quad b_n = R_n \cos \psi_n \quad (\text{IX})$$

$$H_1 = B_1 C_2 - B_2 C_1 \quad H_3 = A_2 B_3 - A_3 B_2 \quad (\text{X})$$

$$F_1 = \frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{K C_2} \quad F_3 = \frac{A_2 C_3 - A_3 C_2}{K A_2} \quad (\text{XI})$$

Après le calcul de ces quantités auxiliaires on commencera la *première hypothèse*; si l'on connaît des éléments approchés de l'orbite, ou si une solution précédente a fourni des valeurs pour  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$ , on va calculer

$$\kappa_1 = \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \quad \kappa_3 = \frac{1}{r_3^3} - \frac{1}{r_2^3} \quad (\text{XII})$$

$$k_1 \kappa_1 - k_3 \kappa_3 = \beta \quad (\text{XIII})$$

Les valeurs de  $r$  étant encore tout à fait inconnues, on supposera d'abord  $\beta = 0$

Alors on résout l'équation

$$K\rho_2 = K[\sqrt{r_2^2 - a_2^2} + b_2] = \Gamma + \frac{\alpha - \beta r_2^3}{\tau_2 (r_2^3 - \mu_2)} \quad (\text{XIV})$$

et ensuite on déduira

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left( 1 + \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \kappa_1 r_2^3}{r_2^3 - \mu_2} \right); \quad \frac{n_3}{n_2} = \frac{\tau_3}{\tau_2} \left( 1 + \frac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_3 \kappa_3 r_2^3}{r_2^3 - \mu_2} \right) \quad (\text{XV})$$

$$\rho_1 = \frac{C_1 K\rho_2 + H_1}{\frac{n_1}{n_2} C_2 K} + F_1 \quad ; \quad \rho_3 = \frac{A_3 K\rho_2 + H_3}{\frac{n_3}{n_2} A_2 K} + F_3 \quad (\text{XVI})$$

$$r_1 = \sqrt{a_1^2 + (\rho_1 - b_1)^2}; \quad r_3 = \sqrt{a_3^2 + (\rho_3 - b_3)^2} \quad (\text{XVII})$$

On reprendra la solution des équations pour  $\kappa$ ,  $\beta$ ,  $\rho_2$  etc., jusqu'à ce que les nouvelles valeurs s'accordent rigoureusement avec les précédentes.

#### § 6. Correction de l'équation fondamentale.

Les calculs de la première hypothèse étant terminés, nous avons trouvé des valeurs de  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$  qui satisfont rigoureusement aux conditions géométriques du problème; quant aux conditions mécaniques, elles doivent satisfaire aux équations (6). Mais ces équations n'expriment pas exactement les lois de l'attraction, auxquelles l'astre doit obéir, quoique la différence ne soit que du cinquième ou du sixième ordre par rapport au temps.

Il s'agit donc maintenant de corriger l'équation fondamentale, de manière qu'elle exprime rigoureusement les lois de la mécanique céleste. On pourrait calculer les éléments de l'orbite; et en déduire les rapports entre les triangles et les secteurs elliptiques. Les secteurs étant en proportion exacte avec les intervalles de temps,

d'après la deuxième loi de KÉPLER, on en déduirait des valeurs plus approchées de  $\frac{n_1}{n_2}$  et de  $\frac{n_3}{n_2}$ , avec lesquelles on recommencerait le calcul.

M. GIBBS nous montre un autre chemin, qui me semble plus court et plus simple. Il combine la correction de son équation fondamentale avec les dernières corrections pour l'aberration de la lumière.

Lui aussi, il déduit les éléments nécessaires de l'orbite, mais il prend soin de n'introduire aucune nouvelle condition. Nous venons de trouver trois rayons vecteurs, qui satisfont exactement à l'équation (6). Cette équation a été déduite de

$$x = A_x + B_x \tau + C_x \tau^2 + D_x \tau^3 + E_x \tau^4,$$

mais la dernière relation n'est pas exacte; il faudrait ajouter encore toute une série de termes

$$F_x \tau^5 + G_x \tau^6 + H_x \tau^7 + \dots$$

On obtiendra cependant approximativement la même valeur exacte de  $x$  en modifiant convenablement les valeurs de  $\tau$ , de sorte que les équations ainsi modifiées répondent à la loi des aires. Des trois rayons vecteurs, que nous avons trouvés, nous déduisons par la pure géométrie les éléments de l'orbite. Avec ces éléments nous calculons d'après les lois de KÉPLER les intervalles  $\tau_1'$  et  $\tau_3'$ , employés par un astre fictif, pour parcourir les mêmes arcs héliocentriques que la comète. Parce que les éléments sont des fonctions de  $\tau_1$  et  $\tau_3$ , on a aussi

$$\begin{aligned} \tau_1' &= f_1(\tau_1, \tau_3) \\ \tau_3' &= f_3(\tau_1, \tau_3). \end{aligned}$$

En général, les intervalles calculés ne seront pas égaux à  $\tau_1$  et  $\tau_3$ ; les différences sont du même ordre que l'erreur de l'équation fondamentale. Par suite on a, en négligeant les quantités du 4<sup>me</sup> ordre

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \tau_1} &= 1; & \frac{\partial f_1}{\partial \tau_3} &= 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial \tau_1} &= 0; & \frac{\partial f_3}{\partial \tau_3} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Cherchons maintenant des valeurs  $\tau_1'' = \tau_1 + \partial \tau_1$  et  $\tau_3'' = \tau_3 + \partial \tau_3$ , telles qu'on a

$$\tau_1 = f_1(\tau_1'', \tau_3'') \quad \tau_3 = f_3(\tau_1'', \tau_3'').$$

Développons ces fonctions suivant les puissances croissantes de  $\partial \tau_1$  et  $\partial \tau_3$ :

$$\begin{aligned}\tau_1 &= f_1(\tau_1, \tau_3) + \delta\tau_1 \frac{\partial f_1}{\partial \tau_1} + \delta\tau_3 \frac{\partial f_1}{\partial \tau_3} + \dots \\ \tau_3 &= f_3(\tau_1, \tau_3) + \delta\tau_1 \frac{\partial f_3}{\partial \tau_1} + \delta\tau_3 \frac{\partial f_3}{\partial \tau_3} + \dots\end{aligned}$$

En vertu de (22) ces équations deviennent

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \tau_1' + \delta\tau_1 \\ \tau_3 &= \tau_3' + \delta\tau_3\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\tau_1'' &= 2\tau_1 - \tau_1' \\ \tau_3'' &= 2\tau_3 - \tau_3'\end{aligned} \quad (23)$$

ou, avec le même degré d'approximation :

$$\tau_1'' = \frac{\tau_1'^2}{\tau_1}; \quad \tau_3'' = \frac{\tau_3'^2}{\tau_3} \quad (24)$$

En reprenant maintenant avec  $\tau_1''$  et  $\tau_3''$  le calcul des quantités, qui dépendent des valeurs de  $\tau$ , on obtiendra une solution plus approchée du problème (la „deuxième hypothèse”). Si alors les intervalles calculés  $\tau_1'''$  et  $\tau_3'''$  diffèrent encore sensiblement des valeurs observées  $\tau_1$  et  $\tau_3$ , on commencera une „troisième hypothèse” avec

$$\tau_1^{IV} = \tau_1'' \frac{\tau_1'''}{\tau_1''}; \quad \tau_3^{IV} = \tau_3'' \frac{\tau_3'''}{\tau_3''}$$

mais ce cas ne se présentera que bien rarement.

*Remarque.* Si l'orbite était *a priori* tout à fait inconnue, les dates  $t$  (et par suite les valeurs de  $\tau$ ) ne renferment pas encore les corrections pour l'équation de la lumière (voir § 5). Dans ce cas il faut les corriger maintenant; c'est avec les valeurs corrigées de  $\tau_1$  et  $\tau_3$ , qu'il faut calculer  $\tau_1''$  et  $\tau_3''$ .

#### § 7. Suite. Détermination géométrique des éléments de l'orbite.

D'après (8) (§ 4) nous avons

$$\frac{n_1}{[r_2 \ r_3]} = \frac{n_2}{[r_1 \ r_3]} = \frac{n_3}{[r_1 \ r_2]}$$

ou, en multipliant les dénominateurs par 2 :

$$\frac{n_1}{r_2 r_3 \sin(v_3 - v_2)} = \frac{n_2}{r_1 r_3 \sin(v_3 - v_1)} = \frac{n_3}{r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1)}$$

où  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  désignent les trois anomalies vraies.

En multipliant les 3 expressions par  $r_1 r_2 r_3$ , il vient

$$\frac{r_1 n_1}{\sin (v_3 - v_2)} = \frac{r_2 n_2}{\sin (v_3 - v_1)} = \frac{r_3 n_3}{\sin (v_2 - v_1)} \quad (25)$$

On peut donc former un triangle, dont les côtés sont égaux à  $n_1 r_1$ ,  $n_2 r_2$  et  $n_3 r_3$ , et parallèles aux trois rayons vecteurs.

Posons pour abrégier

$$\begin{aligned} n_1 r_1 &= s_1; \quad n_2 r_2 = s_2; \quad n_3 r_3 = s_3 \quad \left\{ \right. \\ S &= \frac{1}{2} (s_1 + s_2 + s_3) \end{aligned} \quad (26)$$

D'après une formule connue de la trigonométrie nous avons

$$\left. \begin{aligned} tg \frac{1}{2} (v_3 - v_2) &= \sqrt{\frac{(S - s_2)(S - s_3)}{S(S - s_1)}} \\ tg \frac{1}{2} (v_2 - v_1) &= \sqrt{\frac{(S - s_1)(S - s_2)}{S(S - s_3)}} \\ tg \frac{1}{2} (v_3 - v_1) &= \sqrt{\frac{S(S - s_2)}{(S - s_1)(S - s_3)}} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

On vérifiera les calculs par

$$\frac{1}{2} (v_3 - v_1) = \frac{1}{2} (v_3 - v_2) + \frac{1}{2} (v_2 - v_1) \quad (28)$$

Des équations

$$\left. \begin{aligned} 1 + e \cos v_1 &= \frac{p}{r_1} \\ 1 + e \cos v_2 &= \frac{p}{r_2} \\ 1 + e \cos v_3 &= \frac{p}{r_3} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

on déduit ensuite les valeurs de  $p$ ,  $e$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$ . Et d'abord on élimine  $e$  en ajoutant les équations après les avoir multipliées respectivement par  $\sin (v_3 - v_2)$ ,  $\sin (v_1 - v_3)$  et  $\sin (v_2 - v_1)$ . On obtient

$$\begin{aligned} \sin (v_3 - v_2) + \sin (v_1 - v_3) + \sin (v_2 - v_1) &= \\ = p \left[ \frac{\sin (v_3 - v_2)}{r_1} + \frac{\sin (v_1 - v_3)}{r_2} + \frac{\sin (v_2 - v_1)}{r_3} \right] \end{aligned}$$

ou bien à cause de la proportionnalité des côtés avec les sinus des angles opposés:

$$s_1 - s_2 + s_3 = p \left[ \frac{s_1}{r_1} - \frac{s_2}{r_2} + \frac{s_3}{r_3} \right]$$

ou, en vertu de (26)

$$p = \frac{s_1 - s_2 + s_3}{n_1 - n_2 + n_3} \quad (30)$$



La première et la dernière des équations (29) donnent :

$$\left. \begin{aligned} e \sin \frac{1}{2} (v_3 + v_1) &= \frac{\frac{p}{r_1} - \frac{p}{r_3}}{2 \sin \frac{1}{2} (v_3 - v_1)} \\ e \cos \frac{1}{2} (v_3 + v_1) &= \frac{\frac{p}{r_1} + \frac{p}{r_3} - 2}{2 \cos \frac{1}{2} (v_3 - v_1)} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Les équations (31) nous donnent  $e$ ,  $v_1$  et  $v_3$ . On en déduit d'après les expressions connues le demi grand axe  $a$ , les anomalies excentriques et moyennes, et les intervalles  $\tau_1'$  et  $\tau_3'$ . Puis on calculera  $\tau_1''$  et  $\tau_3''$  d'après les formules (23) ou (24) et l'on substituera ces nouvelles valeurs dans les équations I—XVII (§ 5) pour les résoudre de nouveau.

*Remarque.* La formule (30) semble peu propre à calculer le paramètre de l'ellipse avec une exactitude suffisante: les expressions  $s_1 - s_2 + s_3$  et  $n_1 - n_2 + n_3$  sont toutes deux du deuxième ordre et par suite leur rapport ne peut être obtenu exact qu'à 4 ou 5 décimales du logarithme, les termes individuels étant calculés à 7 décimales; mais les erreurs, que causera cette inexactitude, seront insensibles par rapport aux erreurs inévitables d'un calcul avec des logarithmes à 7 décimales. Disons d'abord, pour démontrer cette propriété importante, que le dénominateur de (30) peut être calculé exactement, car on a, en vertu de (16):

$$n_1 - n_2 + n_3 = \frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} + \frac{\tau_3}{\tau_2} \frac{\mu_3}{r_3^3} \quad (32)$$

et ce dénominateur figure dans la dernière expression comme une *somme* de termes du 2<sup>me</sup> ordre.

Quant à l'expression  $s_1 - s_2 + s_3$ , qui n'est que du 2<sup>me</sup> ordre quoique les termes individuels soient du premier, on peut considérer la valeur employée comme absolument exacte en modifiant *insensiblement* un des rayons vecteurs, disons  $r_2$ , de sorte que, faisant abstraction des quantités, qui entrent dans les limites des erreurs du calcul, l'équation fondamentale demeure satisfaite. De telles modifications ne peuvent altérer les résultats, tant que les valeurs employées des rayons vecteurs satisfont à l'équation fondamentale, dont il s'agit de corriger les coefficients; il faut seulement prendre soin d'employer les *mêmes* valeurs de  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$  dans toutes les expressions, où figurent ces quantités.

La 2<sup>me</sup> ou 3<sup>me</sup> hypothèse ayant fait connaître les trois positions de la comète dans l'espace, la solution du problème n'offre plus

aucune difficulté. Il y a même une grande diversité de méthodes pour calculer les éléments de l'orbite. Le lecteur trouvera les expressions, dont j'ai fait usage, dans le § 14.

## II. DÉTERMINATION DE L'ORBITE PROVISOIRE.

### § 8. Réduction des observations.

En choisissant les observations, qui serviront de base pour le calcul d'une ellipse approchée, il y a toujours deux considérations importantes: d'abord un rapport avantageux des intervalles de temps entre les trois observations, parce que ce rapport a une très grande influence sur la convergence des hypothèses et sur le degré d'approximation des résultats définitifs, — et ensuite la valeur intrinsèque des observations, car on sait, que souvent, et surtout peu après la découverte d'une nouvelle comète, les observateurs se hâtent trop à publier promptement leurs observations, que les coordonnées des étoiles de comparaison sont souvent mal réduites, même qu'ils se trompent quelquefois dans l'identification de ces étoiles, etc.

Lorsque j'allais commencer mes calculs vers le milieu de décembre 1892, je me suis efforcé de remplir autant que possible les deux conditions, énoncées plus haut, mais il n'y avait pas encore cette quantité d'observations, qui plus tard aurait facilité le meilleur choix. J'ai choisi les dates de novembre 9, de novembre 25 en de décembre 13, qui donnent des intervalles de 16 et 18 jours et j'ai emprunté aux *Astronomische Nachrichten* treize observations, que je réunis dans le tableau suivant.

N.	Lieu.	Date.	Temps moyen loc.	☾ — *		$\alpha$	$\delta$
				$\alpha$	$\delta$		
1	Leipzig	Nov. 9	7 <sup>h</sup> 46 <sup>m</sup> 18 <sup>s</sup>	— 1 <sup>m</sup> 8 <sup>s</sup> 74	— 7' 52" 7	0 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> 55 <sup>s</sup> 67	+ 38° 19' 28" 9
2	Carlsruhe	" 9	11 36 37	+ 1 21,71	+ 1 31,1	0 45 51,84	+ 38 18 39,7
3	Carlsruhe	" 9	11 36 37	— 1 17,57	— 16 5,5	0 45 52,13	+ 38 18 38,9
4	Vienne	" 9	6 43 6	....	....	0 45 58,91	+ 38 19 54,0
5	Vienne	" 9	7 38 22	....	....	0 45 56,79	+ 38 19 48,8
6	Hambourg	" 25	6 29 5	+ 0 37,54	— 1 7,1	0 42 3,56	+ 36 40 29,2
7	Poulkova	" 25	6 10 19	+ 0 37,09	— 0 47,7	0 42 3,10	+ 36 40 47,6
8	Koenigsberg	" 25	10 50 39	+ 5 17,45	+ 1 29,4	0 42 3,41	+ 36 39 35,1
9	Lyon	" 25	10 7 41	+ 0 37,81	— 2 10,4	0 42 4,02	+ 36 39 24,5
10	Genève	" 25	9 32 6	+ 0 37,77	— 1 54,0	0 42 3,92	+ 36 39 40,9
11	Hambourg	Déc. 13	12 43 14	+ 2 48,15	+ 1 8,6	0 48 14,93	+ 34 59 22,2
12	Genève	" 13	9 47 31	+ 2 43,26	+ 1 34,1	0 48 10,05	+ 34 59 47,7
13	Lyon	" 13	12 49 21	+ 0 22,29	— 10 2,2	0 48 15,46	+ 34 59 11,5

N <sup>o</sup> .	Log. fact. par.		Réd. au jour.		*	Source.
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$		
1	9,308 <sub>n</sub>	0,356	+ 3 <sup>s</sup> 00	+ 25 <sup>"</sup> 7	<i>a</i>	A. N. 3129
2	9,425	0,337	+ 2,98	+ 25,8	<i>b</i>	" 3129
3	9,425	0,337	+ 3,00	+ 25,8	<i>c</i>	" 3129
4	...	...	...	...	...	" 3130
5	...	...	...	...	...	" 3130
6	9,315 <sub>ll</sub>	0,464	+ 2,82	+ 27,5	<i>d</i> <sub>1</sub>	" 3132
7	9,304 <sub>ll</sub>	0,587	+ 2,82	+ 27,5	<i>d</i> <sub>2</sub>	" 3133
8	9,418	0,528	+ 2,78	+ 27,6	<i>e</i>	" 3133
9	9,364	0,244	+ 2,82	+ 27,5	<i>d</i> <sub>3</sub>	" 3133
10	9,191	0,215	+ 2,82	+ 27,5	<i>d</i> <sub>4</sub>	" 3133
11	9,628	0,731	+ 2,64	+ 28,1	<i>f</i>	" 3139
12	9,486	0,391	+ 2,65	+ 28,1	<i>f</i>	" 3139
13	9,699	0,677	+ 2,67	+ 28,2	<i>g</i>	" 3139

Les auteurs dans les *Astr. Nachr.* ont déduit les coordonnées de l'étoile *f* des *Zones de Leyde*. L'étoile s'y trouve réellement une seule fois (zone 340), mais le résultat est rejeté plus tard à cause de l'incertitude de la déclinaison, de sorte qu'on ne la trouve pas dans le manuscrit du catalogue provisoire de cet Observatoire. Si j'avais connu alors la raison de ce rejet, j'aurais sans doute exclu les coordonnées employées de *f*; c'est ce que j'ai fait plus tard dans la détermination de l'orbite définitive.

L'étoile *g* se trouve aussi dans les zones de *Leyde*, où on l'a observée deux fois (zones 235 et 324). Le catalogue provisoire contient, outre les positions moyennes pour 1875,0, quelques petites corrections: l'équation personnelle de l'observateur en ascension droite, dépendante de l'éclat de l'astre, et une correction en déclinaison, qui dépend de la position de l'axe du cercle méridien. En ayant égard à ces corrections, ce catalogue donne pour 1875.0:

$$\begin{aligned} \text{Ascens. droite} &= 0^{\text{h}}46^{\text{m}}54^{\text{s}}93 & \text{Préc. } 3^{\text{s}}2629 & \text{Var. séc. } + 0^{\text{s}}02747 \\ \text{Déclinaison} &= + 35^{\circ} 3' 11''65 & + 19''6355 & - 0''1052 \end{aligned}$$

De ces données j'ai déduit la position moyenne, qui se trouve dans le tableau suivant.

Quatre observateurs ont comparé la comète avec la même étoile *d*, mais ils ont tiré sa position de différents catalogues, et même leurs réductions de la même position à l'équinoxe moyen de 1892.0 ne s'accordent pas. J'aurais pu déterminer pour cette étoile et pour les autres les positions les plus probables, mais il m'a paru, que pour la détermination d'une orbite *provisoire* je pouvais me dis-

penser de ce travail; à l'exception de l'étoile *g* j'ai adopté les positions telles que les observateurs les avaient données.

Positions moyennes des étoiles de comparaison pour 1892,0.

*	$\alpha$	$\delta$	Autorité.
<i>a</i>	0 <sup>h</sup> 47 <sup>m</sup> 1 <sup>s</sup> .41	+ 38° 26' 55".9	W <sub>2</sub> , Oh 1160
<i>b</i>	0 44 27,15	+ 38 16 42,8	Zones de Lund (91)
<i>c</i>	0 47 6,70	+ 38 34 18,6	" " " (332, 356)
<i>d</i> <sub>1</sub>	0 41 23,20	+ 36 41 8,8	" " " (335)
<i>d</i> <sub>2</sub>	23,19	7,8	" " " (335, 481)
<i>d</i> <sub>3</sub>	23,39	7,4	W <sub>2</sub> , Oh 1021
<i>d</i> <sub>4</sub>	23,33	7,4	W <sub>2</sub> , Oh 1021
<i>e</i>	0 36 43,18	+ 36 37 48,1	Zones de Lund (320, 324)
<i>f</i>	0 45 24,14	+ 34 57 45,5	Zones de Leyde (340)(B B VI)
<i>g</i>	0 47 50,44	+ 35 8 45,3	" " " (235, 324)

Ayant reconnu par un petit dessin, que l'observation 8 de M. COHN à *Koenigsberg* ne concorde pas avec les autres du même jour, je l'ai rejetée; aux observations de M. LE CADET à *Lyon* j'ai assigné un poids  $\frac{1}{2}$  <sup>1)</sup>, tandis que les autres entrèrent dans le calcul avec l'unité de poids.

Après avoir passé du temps moyen local au temps moyen de *Greenwich* (que je désignerai dans la suite par TMG), j'ai trouvé pour les moyennes arithmétiques:

Nov. 9,343 680 <sup>2)</sup> Nov. 25,285 705 Déc. 13,461 485

Il s'agit maintenant d'affranchir les observations de l'effet de la parallaxe et de l'aberration planétaire. Pour le calcul des distances géocentriques, correspondantes avec les trois dates moyennes, j'ai adopté les éléments elliptiques de M. SCHULHOF à *Paris* <sup>3)</sup>:

<sup>1)</sup> Ses observations ont été faites à l'aide du grand équatorial coudé de cet Observatoire (ouverture de 32 cm.). En ne leur attribuant que la moitié du poids des autres observations, j'ai notablement forcé les poids de celles-ci. La série de M. LE CADET étant assez considérable, j'ai déterminé plus tard d'une manière rationnelle le poids, qui lui convient. Un tel procédé devait rendre justice aux observations de cet habile astronome; en assignant aux meilleures observations le poids 6, il fallait attribuer le poids 5 à M. LE CADET.

<sup>2)</sup> Il s'est glissé dans ce premier nombre une petite erreur, dont je ne me suis aperçu qu'après avoir terminé le calcul de l'orbite provisoire. Heureusement le mouvement de la comète était très lent, de sorte que l'effet de cette erreur ne s'élève qu'à 0.003 en ascension droite, et à 0.04 en déclinaison, et d'ailleurs elle doit disparaître dans les calculs définitifs.

<sup>3)</sup> Publiés dans le n° 3140 des *Astronomische Nachrichten*.



$$\begin{aligned}
 \log a &= 0,559\,617 \\
 \phi &= 24^{\circ}13'12''6 \\
 i &= 20\,47\,22,9 \\
 \oslash &= 331\,42\,12,1 \\
 \pi &= 345\,53\,12,2 \\
 T &= 1892 \text{ juin } 13,2379 \text{ t. m. de Paris.}
 \end{aligned}$$

Des éphémérides du *Nautical Almanac* je déduis la longitude du Soleil et le logarithme de son rayon vecteur :

$$\begin{array}{lll}
 \text{Nov. } 9,343\,680 & \odot_1 = 227^{\circ}55'48''1 & \log R_1 = 9,995\,5322 \\
 \text{Nov. } 25,285\,705 & \odot_2 = 244\,1\,34,1 & \log R_2 = 9,994\,1161 \\
 \text{Déc. } 13,461\,485 & \odot_3 = 262\,28\,40,3 & \log R_3 = 9,993\,0464
 \end{array}$$

D'après les formules connues j'en déduis

$$\begin{aligned}
 \log \rho_1 &= 0,185\,7264 \\
 \log \rho_2 &= 0,224\,1791 \\
 \log \rho_3 &= 0,276\,0142
 \end{aligned}$$

Adoptant le nombre 7,761 2821 pour le logarithme de l'équation de la lumière (exprimée en jours moyens), je trouve pour les temps d'aberration

$$0,008\,851 \qquad 0,009\,671 \qquad 0,010\,897$$

et les corrections dues à la parallaxe deviennent

$$\begin{array}{lll}
 1: -0^s13 + 1''5 & 6: -0^s12 + 1''7 & 11: +0^s22 + 2''9 \\
 2 \text{ et } 3: +0,17 + 1,6 & 7: -0,12 + 2,3 & 12: +0,16 + 1,3 \\
 4: -0,22 + 1,6 & 9: +0,14 + 1,0 & 13: +0,26 + 2,5 \\
 5: -0,16 + 1,3 & 10: +0,09 + 1,0 &
 \end{array}$$

Par conséquence nous avons les positions corrigées

1.	$\alpha = 0^h45^m55^s54$	$\delta = +38^{\circ}19'30''4$	Poids = 1
2.	52,01	18 41,3	1
3.	52,30	18 40,5	1
4.	58,69	19 55,6	1
5.	56,63	19 50,1	1
<hr/>			
Moyennes:	$\alpha_1 = 0^h45^m55^s034$	$\delta_1 = +38^{\circ}19'19''58$	
<hr/>			
6.	$\alpha = 0^h42^m\,3^s44$	$\delta = +36^{\circ}40'30''9$	Poids = 1
7.	2,98	40 49,9	1
9.	4,16	39 25,5	$\frac{1}{2}$
10.	4,01	39 41,9	1
<hr/>			
Moyennes:	$\alpha_2 = 0^h42^m\,3^s573$	$\delta_2 = +36^{\circ}40'12''99$	

11.	$\alpha = 0^h 48^m 15^s 15$	$\delta = + 34^\circ 59' 25'' 1$	Poids = 1
12.	10,21	49,0	1
13.	15,66	13,8	$\frac{1}{2}$
<hr/>			
Moyennes:	$\alpha_3 = 0^h 48^m 13^s 276$	$\delta_3 = + 34^\circ 59' 32'' 40$	

Exprimons les asc. droites en degrés etc.:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 11^\circ 28' 45'' 51 \\ \alpha_2 &= 10 \quad 30 \quad 53,59 \\ \alpha_3 &= 12 \quad 3 \quad 19,14\end{aligned}$$

Ces positions se rapportent à l'équinoxe vrai de la date; pour la réduction à l'équinoxe moyen de 1892,0 il faut calculer

$$\begin{aligned}\text{en asc. droite: } & f + g \sin (G + \alpha) \operatorname{tg} \delta \\ \text{en déclinaison: } & g \cos (G + \alpha)\end{aligned}$$

Adoptant pour  $f$ ,  $g$  et  $G$  les valeurs du *Naut. Alm.*, je trouve

$$\begin{array}{rcl} f + g \sin (G + \alpha) \operatorname{tg} \delta & & g \cos (G + \alpha) \\ \hline + 25'' 54 & & + 13'' 88 \\ + 28,32 & & + 14,80 \\ + 32,18 & & + 16,23 \end{array}$$

En retranchant ces quantités des coordonnées apparentes on obtient les positions moyennes

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 &= 11^\circ 28' 19'' 97 & \delta_1 = + 38^\circ 19' \quad 5'' 70 \\ \alpha_2 &= 10 \quad 30 \quad 25,27 & \delta_2 = + 36 \quad 39 \quad 58,19 \\ \alpha_3 &= 12 \quad 2 \quad 46,96 & \delta_3 = + 34 \quad 59 \quad 16,17 \end{array}$$

Avant de rendre compte de mes calculs suivants, je me permets de dire ici quelques mots relatifs à ma manière de calculer. Presque tous les calculs logarithmiques sont effectués à l'aide des tables de SCHRÖN (édition hollandaise), à 7 décimales. Le plus souvent j'ai tiré parti de la disposition particulière de ces tables, en ajoutant .25 au logarithme de la table, quand il n'y avait pas de trait sous la dernière figure; dans l'autre cas j'ai ajouté .75 après avoir diminué la dernière figure d'une unité. Les calculs s'effectuent alors comme si l'on opérât avec des logarithmes à 9 décimales. Je ne me figurais pas, que cette méthode donnerait aux calculs une exactitude 100 fois plus grande; seulement je ne voulais pas altérer l'exactitude des tables par l'accumulation des fautes d'interpolation <sup>1)</sup>. Pour pousser plus loin l'exactitude des calculs, j'ai fait quelquefois usage de la nouvelle édition des tables de VEGA à 10 décimales, mais j'espère, que le lecteur ne tire pas la conclusion, que

<sup>1)</sup> Les chiffres hypothétiques seront toujours séparés des autres par un point.

tant de décimales soient nécessaires pour l'emploi de la méthode proposée. En général, 7 décimales suffissent pour tous les calculs, et les premières approximations peuvent être effectuées à 6 décimales seulement.

Par les relations connues j'ai transformé les ascensions droites et les déclinaisons en longitudes ( $\lambda$ ) et latitudes ( $\beta$ ); d'après LEVERRIER j'ai supposé l'inclinaison moyenne de l'écliptique pour 1892.0 égale à  $23^{\circ} 27' 11'' 84$  (*Naut. Alm.*). Les nouvelles coordonnées se trouvent dans un tableau suivant. Pour vérifier ces calculs j'ai employé la relation:

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \lambda \cos \beta$$

On trouve

	$\cos \alpha \cos \delta$	$\cos \lambda \cos \beta$
1.	9,885 8721.3	9,885 8721.7
2.	9,896 9001.9	9,896 9001.5
3.	9,903 7586.7	9.903 7586.6

Les longitudes  $L$  du Soleil, et les logarithmes de son rayon vecteur  $R$ , qui figurent aussi dans le tableau suivant, sont empruntées au *Nautical Almanac*, ayant égard aux secondes différences; par méprise j'ai négligé les latitudes du Soleil.

	1	2	3
$t$	Nov. 9,334 829	Nov. 25,276 034	Déc. 13,450 588
$\lambda$	$26^{\circ} 53' 25'' 91$	$25^{\circ} 14' 36'' 59$	$25^{\circ} 40' 8'' 53$
$\beta$	$+ 30 26 38,95$	$+ 29 18 52,56$	$+ 27 15 24,21$
$L$	227 55 4,8	244 0 45,2	262 27 44,4
$\log R$	9,995 5329	9,994 1167	9,993 0466

Les longitudes du Soleil ont été corrigées pour l'effet de la précession, de la nutation en longitude, et de l'aberration; elles se rapportent donc aussi à l'équinoxe moyen de 1892,0 <sup>1)</sup>.

### § 9. Calcul des quantités auxiliaires.

Dans les §§ 9—13 je vais donner tous les nombres nécessaires pour faire juger le lecteur de la convergence de la méthode; pour la signification des symboles je le renvoie au § 5. Quant à l'exactitude des nombres, j'ai vérifié tous les calculs avec soin.

<sup>1)</sup> En réduisant  $L_s$  à l'équinoxe moyen, j'ai commis une erreur de  $1'' 0$ ; la vraie valeur est  $L_s = 262^{\circ} 27' 43'' 4$ ; la valeur employée de  $L_1$  devait être augmentée de  $0'' 1$  (voir § 14).

Des nombres du tableau précédent je déduis:

$$\begin{aligned} t_3 - t_2 &= 18,174554 & t_3 - t_1 &= 34,115759 & t_2 - t_1 &= 15,941205 \\ \log \tau_1 &= 9,4950452.1 & \log \tau_2 &= 9,7685364.8 & \log \tau_3 &= 9,4381026.2 \\ \log \mu_1 &= 7,7214444.9 & \log \mu_2 &= 8,5544293.1 & \log \mu_3 &= 7,9553638.6 \end{aligned}$$

Pour vérifier:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{\tau_2} \mu_1 + \mu_2 + \frac{\tau_3}{\tau_2} \mu_3 &= 0,04286648 \\ \frac{1}{2} \tau_1 \tau_3 &= 0,04286648 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= -0,0010207289 & \log K &= 7,0089104.1_n \\ A_1 &= 8,0311159.2 & B_1 &= 8,2941716.7_n & C_1 &= 8,4467695.4 \\ A_2 &= 8,4560849.6 & B_2 &= 8,6085004.6_n & C_2 &= 8,7023773.7 \\ A_3 &= 8,2711305.3 & B_3 &= 8,3348540.2_n & C_3 &= 8,3602615.8 \end{aligned}$$

$$\Gamma = -0,001823905$$

$$\log \alpha = 6,9944903.5 - 10$$

$$\begin{aligned} \log k_1 &= 5,6725746.6 - 10 & \log k_3 &= 6,0958438.5 - 10 \\ a_1^2 &= 0,34526007 & a_2^2 &= 0,52344710 & a_3^2 &= 0,73893177 \\ b_1 &= -0,79647869 & b_2 &= -0,67068848 & b_3 &= -0,47911783 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1 &= +0,0001436313 & H_3 &= +0,0001400037 \\ F_1 &= +5,0195426 & F_3 &= +9,7917552 \\ C_1 K &= 5,4556799.5_n - 10 & A_2 K &= 5,4649953.7_n - 10 \\ C_2 K &= 5,7112877.8_n - 10 & A_3 K &= 5,2800409.4_n - 10 \end{aligned}$$

#### § 10. Première hypothèse.

1a. L'orbite de M. SCHULHOF (voyez § 8) nous fournira la première approximation pour les trois rayons vecteurs:

$$\begin{aligned} \log r_1 &= 0,3807560 \\ \log r_2 &= 0,3900936 \\ \log r_3 &= 0,4011029 \end{aligned}$$

On en déduit d'après XII et XIII:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -0,00450166 & \kappa_3 &= -0,00494774 \\ \beta &= +0,000000405145 & \log \beta &= 3,6076105 - 10 \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} K \rho_2 - \Gamma &= \text{I} \\ \frac{\alpha - \beta r_2^3}{\tau_2 (r_2^3 - \mu_2)} &= \text{II} \end{aligned}$$

Alors les valeurs de  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$  doivent satisfaire la relation

$$\text{I} = \text{II}$$

Nous trouvons



$$I = + 0,000\ 113\ 642$$

$$II = + 0,000\ 113\ 261$$

et par suite

$$I - II = + 0,000\ 000\ 381$$

Supposons maintenant:  $\log r_2 = 0,390\ 1000$

On trouve, en employant la même valeur de  $\beta$ :

$$I = + 0,000\ 113\ 603$$

$$II = + 0,000\ 113\ 251$$

donc

$$I - II = + 0,000\ 000\ 352$$

On obtient une valeur plus approchée de  $r_2$  par l'équation

$$\log r_2 = 0,390\ 0936 + \frac{381}{381-352} \times 64 = 0,390\ 1771.$$

Cette valeur de  $\log r_2$  <sup>1)</sup> donne

$$I = + 0,000\ 113\ 134$$

$$II = + 0,000\ 113\ 194\ 7$$

$$I - II = - 0,000\ 000\ 060\ 7$$

Nous supposons maintenant

$$\log r_2 = 0,390\ 1000 + \frac{352}{352+60,7} \times 777 = 0,390\ 1663.$$

On en déduit

$$I = + 0,000\ 113\ 202\ 9$$

$$II = + 0,000\ 113\ 203\ 7$$

Ayant égard aux erreurs inévitables du calcul, nous pouvons dire que cette valeur satisfait la relation. D'après XV, XVI et XVII nous trouvons

$$\begin{array}{ll} \frac{n_1}{n_2} = 9,727\ 7259.7 & \frac{n_3}{n_2} = 9,670\ 8638.6 \\ \rho_1 = 1,534\ 276\ 1 & \rho_3 = 1,888\ 055\ 9 \\ \log r_1 = 0,380\ 8766.8 & \log r_3 = 0,401\ 1283.1 \\ \log r_2 = 0,390\ 1663.0. \end{array}$$

*Hypothèse I b.*

De ces nouveaux rayons vecteurs nous déduisons

$$\kappa_1 = - 0,004\ 475\ 533 \quad \kappa_3 = - 0,004\ 924\ 810$$

$$\log \beta = 3,605\ 8550.9 - 10$$

$$I = + 0,000\ 113\ 202\ 9$$

$$II = + 0,000\ 113\ 206\ 5$$

$$I - II = - 0,000\ 000\ 003\ 6$$

<sup>1)</sup> Au lieu de 0,390 1771 j'ai pris par mégarde 0,390 1777.

Dans notre *hypothèse Ia* nous avons trouvé, que

I—II diminue de  $4127 \times 10^{-10}$  quand  
 $\log r_2$  est augmenté de 7770 unités de la 8<sup>ième</sup> décimale.

Nous supposons donc maintenant

$$\log r_2 = 0,390\ 1663.0 - \frac{36}{4127} \times 7770 = 0,390\ 1656.2.$$

Cette valeur donne

$$\begin{aligned} \text{I} &= + 0,000\ 113\ 207\ 0 \\ \text{II} &= + 0,000\ 113\ 207\ 05. \end{aligned}$$

La relation est donc satisfaite; de  $r_2$  on déduit

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= 9,727\ 7259.2 & \frac{n_3}{n_2} &= 9,670\ 8639.6 \\ \log r_1 &= 0,380\ 8758.9 & \log r_3 &= 0,401\ 1304.0 \end{aligned}$$

*Hypothèse Ic.*

Substituons ces valeurs dans les équations XII et XIII; il vient

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= - 0,004\ 475\ 614 & \kappa_3 &= - 0,004\ 926\ 020 \\ \log \beta &= 3,606\ 0133.7 - 10 \\ \text{I} &= + 0,000\ 113\ 207\ 0 \\ \text{II} &= + 0,000\ 113\ 206\ 8 \end{aligned}$$

Par suite nous prendrons

$$\log r_2 = 0,390\ 1656.2 + \frac{2}{4127} \times 7770 = 0,390\ 1656.6$$

Cette valeur donne

$$\begin{aligned} \text{I} &= + 0,000\ 113\ 206\ 8 \\ \text{II} &= + 0,000\ 113\ 206\ 8 \end{aligned}$$

La première hypothèse est donc satisfaite par

$$\log r_2 = 0,390\ 1656.6$$

Calculant  $r_1$  et  $r_2$  d'après XV, XVI et XVII, on trouve

$$\begin{aligned} \log r_1 &= 0,380\ 8758.9 \\ \log r_3 &= 0,401\ 1303.8. \end{aligned}$$

#### § 11. Correction de l'équation fondamentale.

D'après les formules du paragraphe 7 nous trouvons

$$\begin{aligned} s_1 &= 1,281\ 000\ 364 \\ s_2 &= 2,449\ 701\ 172 \\ s_3 &= 1,177\ 448\ 129 \\ S &= 2,454\ 074\ 832\ 5 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(v_2 - v_1) = 2^{\circ}19' 2''528$$

$$\frac{1}{2}(v_3 - v_2) = 2 31 18,046$$

et pour vérifier les calculs

$$\frac{1}{2}(v_3 - v_1) = 4^{\circ}50'20''575$$

Ensuite

$$\log p = 0,481 4825.2$$

$$\frac{1}{2}(v_3 + v_1) = 55^{\circ}38'22''950$$

d'où

$$v_1 = 50^{\circ}48' 2''375$$

$$v_2 = 55 26 7,431$$

$$v_3 = 60 28 43,525$$

et enfin

$$\log e = 9,615 3851 04.$$

Pour vérifier les calculs, je déduis  $p$  du 2<sup>m</sup>c rayon vecteur, d'après l'expression

$$p = r_2 (1 + e \cos v_2).$$

Je trouve

$$\log p = 0,481 4825 07.$$

Des anomalies vraies je déduis

$$E_1 = 34^{\circ} 3' 16''4285$$

$$E_2 = 37 26 21,1841$$

$$E_3 = 41 12 32,8188$$

$$E_2 - E_1 = 3 23 4,7556$$

$$E_3 - E_2 = 3 46 11,6347$$

ou exprimé en parties du rayon

$$E_2 - E_1 = 0,059 073 352 4$$

$$E_3 - E_2 = 0,065 797 141 7$$

$$e \sin E_1 = 0,230 971 975 7$$

$$e \sin E_2 = 0,250 744 345 5$$

$$e \sin E_3 = 0,271 734 473 3$$

$$\left. \begin{aligned} E_3 - E_2 - e(\sin E_3 - \sin E_2) &= 0,044 807 013 9 \\ E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1) &= 0,039 300 982 6 \end{aligned} \right\} (a).$$

Des valeurs de  $p$  et  $e$  on tire

$$\log a = 0,562\ 4702.6$$

Multipliant ( $a$ ) par  $a^2$  on trouve

$$\begin{aligned}\log \tau_1' &= 9,495\ 0513\ 96 \\ \log \tau_3' &= 9,438\ 1088\ 02.\end{aligned}$$

Ces logarithmes sont *plus grands* que ceux de  $\tau_1$  et  $\tau_3$ ; les différences sont de 61,86 et 61,82 unités de la 7<sup>ième</sup> décimale, et par conséquent il faudra *diminuer* les logarithmes de  $\tau_1$  et de  $\tau_3$  de ces quantités. Mais en même temps nous calculons de nouveau les temps d'aberration; nous trouvons

$$0,008\ 855 \quad 0,009\ 673 \quad 0,010\ 897$$

jours moyens; les dates corrigées deviennent

$$\begin{aligned}t_1 &= \text{Nov. } 9,334\ 825 \\ t_2 &= \text{,, } 25,276\ 032 \\ t_3 &= \text{Déc. } 13,450\ 588\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\log \tau_1 &= 9,495\ 0452\ 55 \\ \log \tau_3 &= 9,438\ 1026\ 72\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}\log \tau_1'' &= 9,495\ 0390\ 69 \\ \log \tau_3'' &= 9,438\ 0964\ 89\ 1^1)\end{aligned}$$

La nouvelle valeur  $\tau_2''$  doit satisfaire la relation

$$\tau_2'' = \tau_1'' + \tau_3''$$

On trouve

$$\log \tau_2'' = 9,768\ 5303\ 61$$

## § 12 *Nouvelles quantités auxiliaires.*

Des nouveaux intervalles on déduit facilement

$$\begin{aligned}\log \mu_1 &= 7,721\ 4322\ 55 \\ \log \mu_2 &= 8,554\ 4170\ 96 \\ \log \mu_3 &= 7,955\ 3515\ 62\end{aligned}$$

Vérification:

$$\begin{aligned}\frac{\tau_1''}{\tau_2''} \mu_1 + \mu_2 + \frac{\tau_3''}{\tau_2''} \mu_3 &= +\ 0,042\ 865\ 269\ 95 \\ \frac{1}{2} \tau_1'' \tau_3'' &= +\ 0,042\ 865\ 269\ 945\end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Si les valeurs de  $\tau$  doivent encore être corrigées pour l'aberration il faut modifier l'expression (24) (p. 20); après avoir calculé  $\Delta \log \tau$  à l'aide des valeurs non-corrigées de  $\tau$ , on appliquera ces corrections  $\Delta$  aux logarithmes des valeurs corrigées de  $k(t_2 - t_1)$  et  $k(t_3 - t_1)$ .



Les expressions pour  $\Gamma$ ,  $\alpha$ ,  $k_1$  et  $k_3$  donnent

$$\begin{aligned}\Gamma &= - 0,001\,823\,905\,27 \\ \alpha &= + 0,000\,987\,352\,000\,5 \\ \log k_1 &= 5,672\,5562\,85 - 10 \\ \log k_3 &= 6,095\,8254\,22 - 10\end{aligned}$$

Les autres quantités, telles que  $a$  et  $b$  ne changent pas.

### § 13. Deuxième hypothèse.

IIa. Des dernières valeurs des rayons vecteurs nous tirons

$$\log \beta = 3,605\,9902.9 - 10$$

Ensuite nous trouvons

$$\begin{aligned}\text{I} &= + 0,000\,113\,207\,07 \\ \text{II} &= + 0,000\,113\,203\,59 \\ \text{I} - \text{II} &= + \qquad\qquad\qquad 3\,48\end{aligned}$$

Par suite nous poserons (voyez *hypothèse I b*)

$$\log r_2 = 0,390\,1656.6 + \frac{34,8}{4127} \times 7770 = 0,390\,1663.15$$

Cette valeur donne

$$\begin{aligned}\text{I} &= + 0,000\,113\,203\,14 \\ \text{II} &= + 0,000\,113\,203\,08\end{aligned}$$

Hypothèse IIa est donc satisfaite par

$$\log r_2 = 0,390\,1663.15$$

d'où

$$\begin{aligned}\log r_1 &= 0,380\,8765.53 \\ \log r_3 &= 0,401\,1311.33\end{aligned}$$

IIIb. De ces valeurs je déduis

$$\log \beta = 3,605\,9950.9 - 10$$

et la valeur précédente de  $\log r_2$  donne

$$\begin{aligned}\text{I} &= + 0,000\,113\,202\,97 \\ \text{II} &= + 0,000\,113\,203\,06\end{aligned}$$

La différence est insensible; j'adopte donc la dernière valeur de  $r_2$ , qui me donne <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned}\log r_1 &= 0,380\,8765.43 \\ \log r_3 &= 0,401\,1310.83.\end{aligned}$$

---

<sup>1)</sup> Les divergences entre les anciennes et les nouvelles valeurs de  $\log r_1$  et  $\log r_3$  s'expliquent par le nombre différent de décimales, que j'ai employées.

§ 14. *Détermination des éléments de l'orbite.*

D'abord il nous faut calculer les coordonnées héliocentriques. On a

$$\begin{aligned} r \cos b \cos (l - L) &= \rho \cos \beta \cos (\lambda - L) - R \\ r \cos b \sin (l - L) &= \rho \cos \beta \sin (\lambda - L) \\ r \sin b &= \rho \sin \beta. \end{aligned}$$

Je trouve:

$$\begin{aligned} l_1 &= 35^\circ 52' 24'' 8756 & b_1 &= + 18^\circ 52' 13'' 078 \\ l_3 &= 46 \quad 2 \quad 28,044 & b_3 &= + 20 \quad 4 \quad 51,214. \end{aligned}$$

Posons

$$\frac{1}{2}(u_3 - u_1) = f_2$$

On a

$$\begin{aligned} \sin^2 f_2 &= \sin^2 \frac{b_3 - b_1}{2} + \cos b_1 \cos b_3 \sin^2 \frac{l_3 - l_1}{2} \\ f_2 &= 4^\circ 49' 48'' 5438. \end{aligned}$$

Pour la détermination de l'inclinaison de l'orbite, de la longitude du noeud ascendant et des arguments de la latitude je me servirai des formules:

$$\begin{aligned} tg \, i \sin (l_1 - \oslash) &= tg \, b_1 \\ tg \, i \cos (l_1 - \oslash) &= \frac{tg \, b_3 - tg \, b_1 \cos (l_3 - l_1)}{\sin (l_3 - l_1)} \\ tg \, u &= \frac{tg (l - \oslash)}{\cos i}. \end{aligned}$$

Je trouve

$$\begin{aligned} i &= 20^\circ 47' \quad 7'' 3311 \\ \oslash &= 331 \quad 39 \quad 8,0535 \\ u_1 &= 65 \quad 41 \quad 58,3902 \\ u_3 &= 75 \quad 21 \quad 35,4800 \end{aligned}$$

d'où

$$f_2 = 4^\circ 49' 48'' 5449.$$

Considérons le triangle, formé par le premier et le troisième rayon vecteur; nommons  $\kappa$  la corde, qui joint les deux positions. On a

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= (r_3 - r_1)^2 + 4 r_1 r_3 \sin^2 f_2 \\ \kappa &= 0,429 \, 938 \, 742. \end{aligned}$$

Posons encore

$$\begin{aligned} 4 q_1 &= r_1 + r_3 - \kappa & (\alpha) \\ 4 q_3 &= r_1 + r_3 + \kappa & (\beta) \\ \sin^2 \frac{1}{2} \delta_1 &= \frac{q_1}{a} & \sin^2 \frac{1}{2} \delta_3 = \frac{q_3}{a} & (\gamma) \end{aligned}$$

Alors on a :

$$\frac{\tau_2}{a^{\frac{3}{2}}} = \delta_3 - \delta_1 - (\sin \delta_3 - \sin \delta_1) \quad (\delta)$$

*Remarque:*  $\tau_2$  n'est pas l'intervalle fictif, qui a servi pour la correction de l'équation fondamentale, mais la valeur réelle de  $k(t_3 - t_1)$ , donc

$$\log \tau_2 = 9,768\ 5365.3.$$

Supposons

$$\log a_1 = 0,562.$$

Nous trouvons

$$\begin{aligned} \delta_3 &= 74^\circ 33' 10'' 73200 \\ \delta_1 &= 67\ 24\ 17,25448 \\ D &= \delta_3 - \delta_1 - (\sin \delta_3 - \sin \delta_1) = 0,084\ 124\ 625 \\ \frac{\tau_2}{a_1^{\frac{3}{2}}} &= 0,084\ 243\ 525 \\ \Delta &= D - \frac{\tau_2}{a_1^{\frac{3}{2}}} = -0,000\ 118\ 900. \end{aligned}$$

Soit  $da$  la correction, que  $a_1$  doit subir; on a

$$d\delta_3 - d\delta_1 - \cos \delta_3 d\delta_3 + \cos \delta_1 d\delta_1 + \frac{3}{2} \frac{\tau_2}{a^{\frac{5}{2}}} da = -\Delta$$

d'où

$$da = \frac{\Delta}{\frac{2}{a^2} q_3 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta_3 - \frac{2}{a^2} q_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta_1 - \frac{3}{2} \frac{\tau_2}{a^{\frac{5}{2}}}} \quad (\varepsilon)$$

ou

$$d(\log a) = \frac{[9,637\ 7843] \Delta}{a} \left[ \frac{2q_3}{a^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta_3 - \frac{2q_1}{a^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta_1 - \frac{3}{2} \frac{\tau_2}{a^{\frac{5}{2}}} \right]^{-1}$$

A l'aide de cette expression on trouve après trois approximations :

$$\log a = 0,559\ 6120\ 08$$

Cette valeur satisfait aux relations; on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta_3 &= 37^\circ 23' 47'' 9364 \\ \frac{1}{2} \delta_1 &= 33\ 48\ 27,6091 \\ \frac{1}{2} (\delta_3 - \delta_1) &= \frac{1}{2} (E_3 - E_1) = 3\ 35\ 20,3273 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} b \sin \frac{1}{2} (E_3 - E_1) &= \sqrt{r_1 r_3} \sin f_2 \\ b &= a \cos \phi = 0,519\ 7630\ 26 \\ \phi &= 24^\circ 10' 15'' 3233 \\ e &= \sin \phi = 0,409\ 460\ 087 \\ \mu &= \frac{64800'' \cdot k}{\pi \cdot a^{\frac{3}{2}}} = [2,710\ 5885\ 626] \end{aligned}$$

Durée de la révolution sidérale =  $a^{3/2}$  = 6,909 045 ans.

$$\sin \frac{1}{2} (E_3 + E_1) = \frac{r_3 - r_1}{2 a e \sin \frac{1}{2} (E_3 - E_1)}$$

$$E_1 = 34^{\circ}30'59''3806$$

$$E_3 = 41\ 41\ 40,0351$$

$$u_3 = 75^{\circ}21'35''4800$$

$$u_1 = 65^{\circ}41'58''3902$$

$$v_3 = 60\ 56\ 15,4202$$

$$v_1 = 51\ 16\ 38,3327$$

$$\pi - \odot = 14^{\circ}25'20''0598$$

$$\pi - \odot = 14^{\circ}25'20''0575$$

$$\text{Moyenne: } \pi - \odot = 14^{\circ}25'20''0587$$

$$M_1 = 76402''25681$$

$$M_3 = 93922''64225$$

$$t_1 - T = 148^{\text{j}}770\ 774\ 724$$

$$t_3 - T = 182^{\text{j}}886\ 538\ 582$$

$$T = \text{juin } 13,564\ 050\ 276$$

$$T = \text{juin } 13,564\ 049\ 418$$

$$\text{Moyenne: } T = 1892\ \text{juin } 13,564\ 049\ 8$$

Nous avons donc trouvé les éléments suivants

$$\log a = 0,559\ 6120\ 08$$

$$P = 6,909\ 045\ \text{ans}$$

$$\log \mu = 2,710\ 5885\ 63$$

$$\log e = 9,612\ 2115\ 74$$

$$i = 20^{\circ}47'\ 7''3311$$

$$\pi = 346\ 4\ 28,1122$$

$$\odot = 331\ 39\ 8,0535$$

$$T = 1892\ \text{juin } 13,564\ 049\ 8\ T M G.$$

Equin. moy.  
1892,0

Je donne les éléments, tels que je les ai employés dans les calculs suivants, mais il va sans dire, que les dernières décimales ne valent pas grand' chose, et que leur influence sera presque insensible.

Pour vérifier tous les calculs, j'ai déduit les positions de la comète des éléments, que nous venons de trouver. Une nouvelle détermination des positions correspondantes du Soleil me donne :

$$L_1 = 227^{\circ}55'\ 4''875 \log R_1 = 9,995\ 5328^{53} B_1 = + 0''697$$

$$L_2 = 244\ 0\ 45,167 \log R_2 = 9,994\ 1166^{89} B_2 = - 0,46^4$$

$$L_3 = 262\ 27\ 43,396 \log R_3 = 9,993\ 0465^{97} B_3 = + 0,12^5.$$

*Remarque.* Les petites chiffres en haut indiquent des fractions, introduites par l'interpolation.

En négligeant les latitudes du Soleil, nous trouvons les positions suivantes de la comète :

$$\lambda_1 = 26^{\circ}53'\ 25''873$$

$$\beta_1 = + 30^{\circ}26'\ 38''947$$

$$\lambda_2 = 25\ 14\ 36,673$$

$$\beta_2 = + 29\ 18\ 51,874$$

$$\lambda_3 = 25\ 40\ 8,845$$

$$\beta_3 = + 27\ 15\ 24,419.$$



Les latitudes de l'astre sont modifiées parallactiquement par la latitude du Soleil d'une quantité

$$\Delta \beta = \frac{R}{\rho} B \cos \beta.$$

Cette équation donne

$$\Delta \beta_1 = + 0''39^2 \quad \Delta \beta_2 = - 0''24^1 \quad \Delta \beta_3 = + 0''05^9.$$

Appliquant ces corrections on trouve (dans le sens O—C):

$$\begin{array}{lll} \cos \beta d\lambda : + 0''03 & - 0''07 & - 0''28 \\ d\beta : - 0,38 & + 0,93 & - 0,27. \end{array}$$

L'accord est très satisfaisant; en outre on se rappellera, que les latitudes du Soleil ont été négligées, et que deux ou trois petites erreurs se sont glissées dans les calculs. <sup>1)</sup>

L'inclinaison de l'orbite et les longitudes du noeud et du périhélie se rapportent à l'équinoxe moyen de 1892,0; pour les ramener à l'équinoxe de 1893,0 je me sers des formules de VON OPPOLZER (Band I, Seite 206); je trouve

$$\Delta i = + 0''4452 \quad \Delta \oslash = + 50''7117 \quad \Delta \pi = + 50''2117$$

d'où

$$\left. \begin{array}{l} i = 20^\circ 47' 7''7763 \\ \pi = 346 \ 5 \ 18,3239 \\ \oslash = 331 \ 39 \ 58,7652 \end{array} \right\} \text{Equinoxe moy. de 1893,0.}$$

<sup>1)</sup> Pour la vérification rigoureuse des calculs il faut négliger les latitudes, et adopter les positions du Soleil, que j'ai employées auparavant (*voir* p. 28); on trouve (dans le sens O—C):

$$\begin{array}{lll} \Delta \lambda : - 0''01 & - 0''05 & + 0''01 \\ \Delta \beta : + 0,01 & + 0,66 & - 0,01 \end{array}$$

Il reste donc dans la seconde position une erreur assez considérable, qui ne peut provenir que d'une erreur dans le rapport des triangles, c'est à dire dans  $\frac{n_1}{n_2}$  et  $\frac{n_3}{n_2}$ . Pour prouver qu'il ne faut pas imputer cela à la méthode employée j'ai contrôlé soigneusement les calculs et après de longues recherches j'en ai trouvé la cause. En calculant le paramètre de l'ellipse pour corriger l'équation fondamentale (§ 11) j'avais calculé le dénominateur dans la forme  $n_1 - n_2 + n_3$ , qui ne se prête pas à un calcul exact. En faisant usage de la relation (32) (p. 22) je trouve maintenant  $\log p = 0,4814883.95$  et avec cette valeur on aurait trouvé :

$$\log \tau_1'' = 9,4950423.7 \quad \log \tau_3'' = 9,4380989.7$$

Commençons maintenant avec les résultats de la 2<sup>e</sup> hypothèse une *troisième*; on trouve

$$\log \tau_1''' = 9,4950415.2 \quad \log \tau_3''' = 9,4381003.6$$

On en déduit

$$\log \tau_1^{iv} = 9,4950428.0 \quad \log \tau_3^{iv} = 9,4380988.0$$

Ces valeurs sont presque identiques avec les valeurs corrigées de  $\tau_1''$  et  $\tau_3''$ ; la plus grande différence correspond à une différence de 1<sup>s</sup>5 seulement dans  $t_3 - t_2$ . Dans cet intervalle la comète n'aurait parcouru qu'un arc géoc. de 0''01 au plus.

## III. DÉTERMINATION DE L'ORBITE DÉFINITIVE.

§ 15. *Calcul d'une éphéméride.*

D'après les formules connues j'ai calculé les constantes de GAUSS pour l'équateur de 1892,0 et de 1893,0; je trouve:

pour 1892,0 :	pour 1893,0 :
$\log a = 9,993\ 7455\ 41$	$\log a = 9,993\ 7512\ 51$
$\log b = 9,876\ 4979\ 30$	$\log b = 9,876\ 4789\ 35$
$\log c = 9,832\ 3952\ 81$	$\log c = 9,832\ 4065\ 56$
$A = 63^{\circ}13'59''999$	$A = 63^{\circ}14'48''863$
$B = 324\ 37\ 42,863$	$B = 324\ 38\ 43,039$
$C = 343\ 51\ 36,251$	$C = 343\ 52\ 5,322$

Il sera superflu de rappeler ici les formules, à l'aide desquelles on déduit de ces constantes les lieux moyens, et ensuite les lieux apparents de la comète. Je mentionnerai seulement, que les coordonnées rectilignes du Soleil, et les constantes de BESSEL sont prises du *Nautical Almanac*. Cet annuaire ne donne pas les valeurs de ces constantes avec la dernière exactitude, parce qu'on y a négligé les termes de la nutation, qui dépendent du double de la longitude de la Lune; mais les lieux calculés de la comète vont être comparés avec les observations et celles-ci reposent sur les positions apparentes des étoiles de comparaison, *qui seront calculées à l'aide des mêmes constantes*. Les petites erreurs des tables disparaîtront de la différence, et c'est de ces différences, que dépend la solution du problème.

L'éphéméride suivante a été calculée de deux en deux jours; les positions pour les dates intermédiaires sont obtenues par interpolation. La première colonne contient les dates en temps moyen de *Greenwich*, le commencement du jour étant fixé à midi moyen; la 2<sup>me</sup> et la 3<sup>me</sup> donnent la position apparente de la comète; la 4<sup>me</sup> le logarithme de sa distance géocentrique et la 5<sup>me</sup> le temps d'aberration, exprimé en fraction du jour moyen. Pour l'équation de la lumière j'ai adopté, comme auparavant, le nombre 498<sup>s</sup>.65, qui correspond à la valeur de 25<sup>s</sup>.481, que M. NYRÉN a trouvé pour l'aberration des étoiles fixes.

# Ephémérides.

Date.	AR. app.	Décl. app.	log $\rho$ .	$\theta$
1892, nov. 8	0 <sup>h</sup> 46 <sup>m</sup> 39 <sup>s</sup> 099	+ 38° 26' 53" 38	0,18 317	0,008 799
9	46 5,724	21 15,03	521	841
10	45 34,425	15 29,31	730	884
11	45 5,225	9 36,93	944	927
12	44 38,146	3 38,53	0,19 162	972
13	44 13,205	+ 37 57 34,83	385	0,009 018
14	43 50,416	51 26,55	612	066
15	43 29,790	45 14,37	843	114
16	43 11,334	38 58,93	0,20 078	164
17	42 55,053	32 40,89	317	214
18	42 40,956	26 20,91	560	266
19	42 29,040	19 59,61	807	319
20	42 19,296	13 37,61	0,21 056	372
21	42 11,721	7 15,51	310	427
22	42 6,308	0 53,82	566	483
23	42 3,047	+ 36 54 33,12	826	540
24	42 1,924	48 13,96	0,22 088	598
25	42 2,924	41 56,87	354	656
26	42 6,026	35 42,27	622	716
27	42 11,212	29 30,66	892	777
28	42 18,460	23 22,44	0,23 165	839
29	42 27,740	17 18,00	440	901
30	42 39,049	11 17,70	717	965
1892, déc. 1	42 52,355	5 21,89	997	0,010 029
2	43 7,583	+ 35 59 30,90	0,24 278	094
3	43 24,724	53 45,01	561	160
4	43 43,810	48 4,49	846	227
5	44 4,795	42 29,58	0,25 132	295
6	44 27,614	37 0,49	420	363
7	44 52,249	31 37,46	709	432
8	45 18,679	26 20,68	0,26 000	502
9	45 46,882	21 10,37	292	573
10	46 16,835	16 6,75	584	645
11	46 48,516	11 9,99	878	717
12	47 21,889	6 20,26	0,27 173	790
13	47 56,932	1 37,72	468	863
14	48 33,630	+ 34 57 2,56	765	938
15	49 11,953	52 34,91	0,28 062	0,011 013
16	49 51,872	48 14,90	359	089
17	50 33,361	44 2,64	657	165
18	51 16,391	39 58,21	956	242
19	52 0,938	36 1,71	0,29 255	320
20	52 46,979	32 13,22	554	398
21	53 34,485	28 32,82	853	477
22	54 23,427	25 0,57	0,30 152	556

Date.	AR. app.	Décl. app.	log $\rho$ .	$\theta$	
1892, déc.	23	0 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup> 13 <sup>s</sup> .777	+ 34 21'36"51	0,30 451	0,011 636
	24	56 5,508	18 20,63	750	716
	25	56 58,592	15 12,97	0,31 049	797
	26	57 53,005	12 13,49	348	879
	27	58 48,720	9 22,21	647	961
	28	59 45,705	6 39,14	945	0,012 043
	29	I 0 43,937	+ 4 4,20	0,32 243	126
	30	1 43,383	1 37,29	540	209
	31	2 44,014	+ 33 59 18,34	837	293
1893, janv.	1	3 45,816	57 7,30	0,33 133	377
	2	4 48,757	55 4,14	429	462
	3	5 52,815	53 8,74	724	546
	4	6 57,970	51 21,04	0,34 018	632
	5	8 4,200	49 40,94	312	718
	6	9 11,487	48 8,37	605	804
	7	10 19,811	46 43,26	897	890
	8	11 29,155	45 25,54	0,35 189	977
	9	12 39,496	44 15,13	479	0,013 064
	10	13 50,818	43 11,96	769	151
	11	15 3,105	42 15,96	0,36 057	239
	12	16 16,340	41 27,03	345	327
	13	17 30,503	40 45,10	632	415
	14	18 45,577	40 10,07	917	504
	15	20 1,546	39 41,86	0,37 202	593
	16	21 18,393	39 20,38	485	682
	17	22 36,103	39 5,55	768	771
	18	23 54,657	38 57,28	0,38 049	860
	19	25 14,040	38 55,43	329	950
	20	26 34,234	38 59,90	608	0,014 040
	21	27 55,223	39 10,63	885	130
	22	29 16,989	39 27,49	0,39 162	220
	23	30 39,513	39 50,32	437	310
	24	32 2,778	40 19,00	710	401
	25	33 26,770	40 53,43	982	491
	26	34 51,475	41 33,47	0,40 253	582
	27	36 16,870	42 18,95	523	673
	28	37 42,942	43 9,75	791	764
	29	39 9,675	44 5,72	0,41 057	854
	30	40 37,057	45 6,72	323	945
	31	42 5,073	46 12,62	586	0,015 036
1893, févr.	1	43 33,713	47 23,30	849	128
	2	45 2,964	48 38,61	0,42 109	219
	3	46 32,816	49 58,44	369	310
	4	48 3,257	51 22,65	627	401
	5	49 34,273	52 51,11	883	492
	6	51 5,869	54 23,77	0,43 138	583
	7	52 38,022	56 0,51	392	675
	8	54 10,726	57 41,17	644	766



Date.	AR. app.	Décl. app.	log $\rho$ .	$\theta$ .
1893, févr. 9	1 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup> 43 <sup>s</sup> 973	+ 33° 59' 25" 65	0,43 894	0,015 857
10	57 17,752	+ 34 1 13,86	0,44 143	948
11	58 52,055	3 5,68	390	0,016 039
12	2 0 26,873	5 1,01	636	130
13	2 2,197	— 6 59,74	880	221
14	3 38,020	9 1,77	0,45 123	312
15	5 14,332	11 6,99	364	403
16	6 51,121	13 15,29	603	494
17	8 28,378	15 26,54	841	584
18	10 6,094	17 40,65	0,46 077	675
19	11 44,259	19 57,50	312	765
20	13 22,863	22 16,98	545	855
21	15 1,897	24 38,97	776	945
22	16 41,349	27 3,35	0,47 006	0,017 035
23	18 21,209	29 29,99	234	125
24	20 1,465	31 58,77	460	214
25	21 42,110	34 29,55	685	304
26	23 23,134	37 2,23	908	393
27	25 4,531	39 36,70	0,48 130	481
28	26 46,288	42 12,81	349	570
1893, mars 1	28 28,400	44 50,47	567	659
2	30 10,860	47 29,56	784	747
3	31 53,663	50 9,99	999	835
4	33 36,804	52 51,66	0,49 212	923
5	35 20,278	55 34,48	423	0,018 010
6	2 37 4,075	58 18,34	633	097
7	38 48,191	+ 35 1 3,16	841	184
8	40 32,622	3 48,85	0,50 048	271
9	42 17,362	6 35,32	253	357
10	44 2,407	9 22,48	456	444
11	45 47,749	12 10,26	658	529
12	47 33,384	14 58,57	858	615
13	49 19,306	17 47,32	0,51 056	701
14	51 5,511	20 36,43	252	785

### § 16. Remarques concernant les étoiles de comparaison.

Adoptant les positions, données par les observateurs, j'ai dressé un tableau provisoire de toutes les étoiles de comparaison, à l'exception de deux, employées par M. le prof. S. VON GLASENAPP à l'Observatoire Georgievskaja (Abastouman); cet observateur n'ayant pas réduit ses observations, je les avais mises de côté; mais la note concernant ces mesures s'étant égarée dans le tas des papiers, ces quatre observations n'ont pas été employées pour la détermination de l'orbite définitive.

Parmi les positions des étoiles il y en avait deux, qui étaient incontestablement altérées par des erreurs de réduction ou d'impression :

*Astron. Nachr.* 3144; Observations faites à *Bordeaux*, \* 13. L'ascension droite ( $0^h 42^m 6^s.70$ ) doit être augmentée de  $10^s$  pour satisfaire la relation  $\odot \Leftarrow = * + (\odot \Leftarrow - *)$ .

*Astron. Journal*, 292; observations faites à Haverford College par M. G.-L. JONES; \* 1. L'asc. droite doit être augm. de  $10^s$ , ainsi que la position apparente de la comète.

Le nombre des étoiles s'est élevé à 105, dont 22 ne se trouvaient dans aucun des catalogues, qui étaient à ma disposition (les n<sup>os</sup> 6, 12, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 35, 46, 65a, 66, 67, 74, 77, 80, 85, 89, 93, 93a et 98). Ce nombre serait encore plus grand, si j'avais fait usage des mesures effectuées à l'Observatoire de *Greenwich*. Ces observations ont été faites à l'aide de l'équatorial Sheepshank (ouverture de 6,7 inch, grossissement de 55 fois), en déterminant les instants des passages derrière deux fils perpendiculaires entre eux et formant des angles de  $45^\circ$  avec la parallèle; des 4 passages on déduit les différences en ascension droite et en déclinaison entre la comète et l'étoile. Cet appareil <sup>1)</sup> ne donnera jamais des résultats aussi exacts que le micromètre à fils mobiles, mais je n'avais pas attendu les erreurs énormes, dont les observations de *Greenwich* se montraient affectées. Il est possible, que quelques observateurs n'étaient pas assez expérimentés, que les fils du réticule ont été sensiblement courbés, ou que la condition d'inclinaison n'était pas rigoureusement satisfaite. Quoi qu'il en soit, ces observations se sont montrées d'une telle infériorité, que non seulement elles ne valaient pas la peine de déterminer les positions des étoiles de comparaison, mais que j'ai été forcé de les rejeter toutes.

Les valeurs de la précession et de sa variation séculaire ont été calculées à l'aide des *Tablas de Precesion*, que M. BENJ.-A. GOULD a publiées dans le Tome VIII des *Resultados del Observatorio nacional Argentino en Córdoba*.

Les principaux catalogues, que j'ai faits concourir à la détermination des positions, sont les Zones de *Leyde* <sup>2)</sup> et de *Lund* <sup>3)</sup> et le dernier Catalogue du *Poulkova*, publié par M. ROMBERG <sup>4)</sup>; ils se rapportent tous à l'équinoxe de 1875,0. Si l'on veut obtenir

<sup>1)</sup> „Gros reticule”, réticule en forme de croix.

<sup>2)</sup> *Annalen der Sternwarte in Leiden*, Band IV und V.

<sup>3)</sup> Observations des étoiles de la zone entre  $35^\circ$  et  $40^\circ$  de décl. bor., faites à l'Obs. de Lund, tome II.

<sup>4)</sup> *Catalog von 5634 Sternen für die Epoch 1875,0.*

un système de coordonnées aussi homogène que possible, on ne peut guère en faire autrement. Les observations de *Leyde* et de *Lund* forment une partie de la grande entreprise de l'*Astronomische Gesellschaft*: la détermination des positions exactes de toutes les étoiles de la *Durchmusterung* d'ARGELANDER, jusqu' à la grandeur 9,0 incl.; par suite elles se rapportent au système des étoiles fondamentales, que M. AUWERS a calculé en prenant pour point de départ les observations faites au *Poulkova*.

Au dernier congrès de l'*Astronomische Gesellschaft* (à *Utrecht*, août 1894) M. J.-H. WILTERDINK a présenté une note touchant une équation systématique entre les ascensions droites de *Leyde* et de *Lund*. En comparant les étoiles des Zones communes, il trouvait les corrections suivantes, qui doivent être appliquées aux positions de *Lund* pour les réduire au système de *Leyde*:

Grandeur.	Correction.
5,5 — 6,9	+ 0 <sup>s</sup> 008
7,0 — 7,5	— 0,027
7,6 — 8,0	— 0,026
8,1 — 8,5	— 0,037
8,6 — 8,8	— 0,060
8,9 — 9,0	— 0,081
9,1 — 9,5	— 0,058

Moyenne pour toutes les étoiles: — 0<sup>s</sup>050

Ces différences résulteront sans doute de l'équation personnelle, qui dépend de l'éclat de l'astre. Les positions de *Leyde* ont été réduites au système de M. BECKER, dont l'équation personnelle semblait être zéro ou peu sensible; aux ascensions droites des autres observateurs (MM. VALENTINER, E.-F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN et le Dir. Prof. Dr. H.-G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN) on a appliqué des corrections *négatives*, dont la grandeur absolue va en augmentant avec la faiblesse de l'étoile. Les signes négatives nous prouvent, que les différences mentionnées sont causées en grande partie par l'application de cette correction; leur rapport avec la grandeur, qui suit la même loi que celle des corrections appliquées à *Leyde*, n'est interrompu que par les étoiles plus faibles que 9<sup>m</sup>0. D'après M. WILTERDINK cela pourrait provenir d'un changement de l'équation personnelle de M. BECKER pour ces faibles étoiles.

J'ai hésité longtemps s'il fallût appliquer ces corrections de M. WILTERDINK aux asc. droites des étoiles de *Lund*; mais, M. WILTERDINK n'ayant pu déduire que des résultats provisoires, parce que bon nombre d'étoiles communes n'étaient pas encore comparées, j'ai employé les positions telles qu'elles sont données dans les publi-

cations de cet Observatoire. Quelques étoiles ne se trouvaient qu'une seule fois dans les fascicules publiés; sur ma demande M. F. ENGSTRÖM a bien voulu me faire parvenir des observations supplémentaires des étoiles 1, 2, 7, 9, 11, 13, 28, 36, 43, 48, 101 et 102. En publiant mes résultats, il m'est un devoir agréable de lui témoigner ma vive reconnaissance <sup>1)</sup>.

La date assez récente des trois catalogues mentionnés nous offre un autre avantage important. Parmi les faibles étoiles de comparaison il y en a peut-être, dont le mouvement propre n'est pas tout à fait insensible, quoique les observations ne soient pas assez nombreuses pour mettre ce mouvement hors de doute ou pour en fixer la valeur avec une approximation suffisante. En négligeant ce mouvement on commettra une erreur proportionnelle au temps écoulé depuis l'époque du catalogue. Cette erreur peut donc atteindre une valeur assez considérable, quelque petit que soit le mouvement annuel, quand l'époque est fort éloignée de la date, à laquelle la position sera réduite.

La dernière remarque s'applique aussi au *Catalogue de l'Observatoire de Paris*, dont la première partie a été publiée en 1887. On a divisé les observations, qui ont fourni les éléments de ce catalogue, en 3 groupes, réduits respect. aux équinoxes moyens de 1845, 1860 et 1875. Les observations du dernier groupe ont été faites de 1868—1881; elles sont donc sensiblement de la même date que celles des trois autres catalogues. En faisant usage du cat. de *Paris*, je lui ai attribué un poids plus petit qu'aux autres, parce que les positions individuelles, dont les positions données ont été déduites par voie de moyenne, sont déterminées à l'aide de différents instruments par plusieurs astronomes; ces moyennes formeront donc un mélange (tranchons le mot) moins homogène que les autres observations, auxquelles on a eu soin d'appliquer les corrections nécessaires pour les réduire à un même système.

Je ne me suis servi des autres groupes (désignés par Par. I et Par. II) que pour les étoiles, dont le mouvement propre semblait avoir une valeur appréciable.

Outre les observations modernes j'ai aussi consulté quelques catalogues anciens, mais je suis bien loin de vouloir prétendre que

<sup>1)</sup> La Bibliothèque de l'Observatoire de *Leyde* ne possédait alors que les fascicules 1, 2 et 3 du Tome II des observations de *Lund* (publiées par MM. DUNÉR et ENGSTRÖM). Le 4<sup>me</sup> fascicule, qui contient les observations supplémentaires, dont j'avais besoin, a été expédié dans le courant de 1894; je n'en ai pu faire usage que pour les étoiles de comparaison de M. JAVELLE à *Nice*, dont les observations me parvenaient après l'achèvement des calculs (voir § 41).



j'aurais épuisé toutes les sources, mon but n'étant que de découvrir des mouvements propres éventuels. En général, je n'ai réduit que LALANDE (Lal.), les zones boréales de BESSEL, réduction de WEISSE ( $W_2$ ), les observations d'ARGELANDER, publiées dans le tome VI des *Bonner Beobachtungen* (BB. VI), les catalogues de l'Observatoire *Armagh* (Arm.) et ceux de *Greenwich* (12-year, etc.). Les positions de Lal. et de  $W_2$  ont été réduites de nouveau à l'aide des tables de VON ASTEN et de LUTHER; ces étoiles se trouvant dans les zones de *Leyde*, je pouvais tirer les positions corrigées du catalogue manuscrit de cet Observatoire, où les nouvelles réductions à l'aide de ces tables ont été déjà effectuées, de même que les réductions de l'époque du catalogue à 1875,0, l'époque générale, adoptée pour les zones de l'*Astronomische Gesellschaft*.

Quand la marche régulière des positions individuelles faisait soupçonner une valeur appréciable du mouvement propre, j'ai tiré la position de tous les catalogues, que je pouvais consulter. La position adoptée dépendant alors de l'ensemble des observations anciennes et modernes, il était nécessaire d'appliquer des corrections pour réduire toutes les positions au système du *Fundamentalcatalog*, qui est à la base des zones de *Lund* et de *Leyde*. J'ai pris ces réductions des tables récemment publiées par M. AUWERS<sup>1)</sup>. La position n'ayant pas variée sensiblement, je me suis contenté de Lal.,  $W_2$ , BB VI etc.; j'ai cité partout leurs positions dans le tableau général qui suit, mais je n'en ai pas tenu compte dans les valeurs adoptées; aussi je ne donne pas les réductions au système fondamental. On comprendra d'après ce qui précède, qu'aux catalogues de *Lund* et de *Leyde* aucune correction ne sera appliquée. En outre le lecteur se rappellera que les positions, désignées par „*Leyde*” ne sont pas les mêmes que celles des Annales, qui n'étaient que provisoires. Elles sont tirées du catalogue manuscrit, et contiennent les corrections, mentionnées auparavant (voir § 8, p. 24).

Les observations méridiennes, qui sont récemment publiées par M. KOBOLD à *Strasbourg* et M. ROMBERG au *Poulkova*, et celles qui me sont communiquées par M. VON KNORRE à *Berlin* et M. STONE à *Oxford*, seront désignées par (*M*); quand une étoile est rapportée micrométriquement à une autre, j'ajouterai (*m*). Aux observations méridiennes de M. ROMBERG j'ai appliqué les mêmes réductions qu'aux positions de son catalogue, mais ces corrections ne surpassent jamais une unité de la dernière décimale.

<sup>1)</sup> *Tafeln zur Reduction von Sternörter auf das System des Fundamentalcatalogs für die Zonenbeobachtungen der Astronomischen Gesellschaft von A. AUWERS* (Astron. Nachrichten 3195 et 3196).

Il restait une quinzaine d'étoiles, qui ne se trouvaient nulle part, ou dont une nouvelle détermination était indispensable pour lever des incertitudes relatives à leurs positions ou à leurs mouvements propres. M. le Dr. E.-F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, qui avait déjà mille fois montré le plus grand intérêt dans mon travail, a poussé sa bienveillance jusqu' à se charger des observations nécessaires. Quoique accablé de travail, il n'a pas différé ces observations d'un seul jour, quand le mauvais état de l'atmosphère ne rendait pas toute observation impossible. Voici ses résultats, réduits au système des zones :

N <sup>o</sup> .	AR. 1894,0	Décl. 1894,0	N <sup>o</sup> .	AR. 1894,0	Décl. 1894,0
20	0 <sup>h</sup> 43 <sup>m</sup> 11 <sup>s</sup> .04	+ 37° 20' 7".4	80	1 <sup>h</sup> 48 <sup>m</sup> 28 <sup>s</sup> .45	+ 33° 52' 14".1
21	0 43 14,91	+ 35 21 27,2	83	1 52 30,96	+ 34 3 35,3
32	0 45 30,52	+ 34 58 22,1	85	1 53 7,25	+ 34 0 57,1
59	1 14 15,53	+ 33 42 51,4	89	2 0 35,31	+ 34 5 22,2
60	1 17 36,85	+ 33 41 17,5	97	2 8 41,45	+ 34 26 22,6
	36,83	— 17,4	98	2 10 10,26	+ 34 13 42,9
67	1 28 53,30	+ 33 49 41,0		.....	41,9
77	1 45 51,08	+ 33 49 11,7	99	2 10 37,44	+ 34 21 43,2
79	1 47 49,32	+ 33 50 10,2			

Une étoile étant observée par M. v. D. SANDE BAKHUYZEN, j'ai préféré la position déterminée à *Leyde*; elle sera désigné par „Leyde (M).”

#### § 17. *Tableau des étoiles de comparaison.*

Ci-dessous je donne un tableau des positions adoptées; pour quelques remarques il me faut renvoyer le lecteur au § 18.

# Tableau des étoiles de comparaison.

N <sup>o</sup> .	Catalogue.	Année.	AR. 1892,0	Réd.	Décl. 1892,0	Réd.	No. d'obs.	Remarques.
1	Lal. 884	1795,0	0h30 <sup>m</sup> 17 <sup>s</sup> .79	—	37°39'24"1		1 : 1	
	Y <sub>3</sub> . 281	73,1 : 68,1	18,12		26,4		4 : 4	
	Par. III. 723	71,8 : 70,8	18,15	+ ,06	26,5	— ,2	2 : 3	
	Arm. <sub>2</sub> 89	74,0	18,07	+ ,14	26,7	— ,7	5 : 5	
	Lund	81,3	18,25	,00	25,5	,0	2 : 2	
	<i>Adoptée:</i>		0 30 18,22		37 39 25,9			$\frac{1}{3}$ (Par. + Arm. + Lund)
2	Lal. 966	1795,0	0 32 38,17		37 25 36,0		1 : 1	
	W <sub>2</sub> . Oh. 789	27,8	38,69		30,5		1 : 1	
	Y <sub>3</sub> . 308	68,9 : 61,4	40,60		34,1		2 : 2	
	Par. III. 781	80,9	38,77	+ ,05	33,1	— ,2	2 : 2	
	Lund	81,3	38,83	+ ,00	32,8	,0	2 : 2	
	<i>Adoptée:</i>		0 32 38,82		37 25 32,9			$\frac{1}{2}$ (Par. + Lund)
3	Lal. 1111	1794,9	0 36 42,33		36 37 53,3		1 : 1	
	W <sub>2</sub> . Oh. 915—16	28,3	43,15		46,4		2 : 2	
	Lund	80,7	43,18	,00	48,1	,0	2 : 2	
	Par. III. 879	81,8	43,22	+ ,05	48,9	— ,2	2 : 2	
	<i>Adoptée:</i>		0 36 43,21		36 37 48,3			$\frac{1}{3}$ (2 Lund + Par.)
4	Lal. 1180	1794,9	0 39 17,62		36 47 35,2		1 : 1	
	W <sub>2</sub> . Oh. 974—75	28,3	18,33		27,7		2 : 2	
	Par. III. 930	70,8 : 71,8	18,12		30,3		3 : 2	
	Lund	79,9	18,46	,00	30,4	,0	3 : 3	<i>Adoptée.</i>
5	W <sub>2</sub> . Oh. 979—80	28,3	0 39 30,18		37 10 36,8		2 : 2	
	Lund	79,9	29,96	,00	40,7	,0	3 : 3	<i>Adoptée.</i>
6	AN. 3203	92,—	0 40 4,09	—	36 32 35,9	—	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
7	W <sub>2</sub> . Oh. 999	28,9	0 40 9,19		36 17 32,0		1 : 1	
	Lund	79,8	8,93	,00	32,6	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
8	Lal. 1214	1795,0	0 40 11,07		37 40 56,5		1 : 1	
	BB. VI. 37°127	59,0	11,07		52,1		1 : 1	
	Lund	80,7	11,17	,00	52,9	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
9	BB. VI. 37°131	58,8	0 40 29,03		37 31 47,7		1 : 1	
	Lund	80,9	29,73	,00	48,2	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
10	W <sub>2</sub> . Oh. 1013	28,9	0 40 58,34		36 26 8,2		1 : 1	
	Lund	80,7	58,58	,00	10,4	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>

N <sup>o</sup> .	Catalogue.	Année.	AR. 1892,0	Réd.	Décl. 1892,0	Réd.	No. d'obs.	Remarques.
11	W <sub>2</sub> . Oh. 1021 Lund	28,9 81,3	0h41m23s38 23,19	,00	36°41' 7"3 7,9	,0	1 : 1 2 : 2	<i>Adoptée.</i>
12	Rapp. à * 4	92,	0 41 40,46	,00	36 52 2,0	,0		<i>Adoptée.</i>
13	W <sub>2</sub> . Oh. 1029 Lund	28,9 81,3	0 41 47,63 47,92	,00	37 2 28,0 29,3	,0	1 : 1 2 : 2	<i>Adoptée.</i>
14	W <sub>2</sub> . Oh. 1036 Lund	28,8 79,9	0 42 7,69 8,08	,00	35 36 59,6 54,9	,0	1 : 1 3 : 3	<i>Adoptée.</i>
15	Rapp. à * 13	92,	0 42 12,32	,00	37 2 15,8	,0		<i>Adoptée.</i>
16	Lal. 1281 Par. II. 990 Y <sub>3</sub> . 396 Leyde Lund	1793,6 63,8 68,8 : 68,4 73,4 79,8	0 42 16,44 .... 17,02 17,07 17,08	,00   ,00 ,00	35 8 54,1 55,2 54,5 54,5 55,5	,0   ,0 ,0	1 : 1 0 : 2 2 : 4 2 : 2 2 : 2	
	<i>Adoptée:</i>		0 42 17,08		35 8 55,0			$\frac{1}{2}$ (Leyde + Lund)
17	Berlin (m) Berlin (M)	93,8 94 ?	0 42 28,73 28,84	... ...	37 23 19,1 18,7	... ...	2 : 2 ?	<i>Adoptée.</i>
18	Rapp. à * 31	92,	0 42 55,97	,00	37 31 25,3	,0		<i>Adoptée.</i>
19	Rapp. à * 31	92,	0 43 4,00	,00	37 19 25,6	,0		<i>Adoptée.</i>
20	Leyde (M)	94,9	0 43 4,51	,00	37 19 28,0	,0	1 : 1	<i>Adoptée.</i>
21	Leyde (M)	94,7	0 43 8,41	,00	35 20 47,8	,0	1 : 1	<i>Adoptée.</i>
22	Lal. 1323 Lund Par. III. 1020	1794,9 80,7 81,8	0 43 37,51 38,30 38,26	,00 + ,06	37 36 58,9 57,1 57,0	,0 — ,2	1 : 1 2 : 2 2 : 2	
	<i>Adoptée:</i>		0 43 38,31		37 36 57,0			$\frac{1}{5}$ (2 Par. + 3 Lund)
23	Rapp. à * 25	92,	0 43 52,48	,00	38 0 10,1	,0		<i>Adoptée.</i>
24	BB. VI. 35°151 Lund	60,9 79,8	0 44 2,46 2,51	,00	35 30 43,6 42,3	,0	2 : 2 2 : 2	<i>Adoptée.</i>
25	Lal. 1335 W <sub>2</sub> . Oh. 1083 Poulk. 216 Lund	1795,0 27,8 77,8 80,7	0 44 5,69 6,25 5,96 5,98	— ,00  ,00	38 9 4,2 0,0 2,7 3,7	— ,0  ,0	1 : 1 1 : 1 2 : 2 3 : 3	
	<i>Adoptée:</i>		0 44 5,97		38 9 3,3			$\frac{1}{5}$ (2 Poulk. + 3 Lund)



N.	Catalogue.	Année.	AR. 1892,0	Réd.	Décl. 1892,0	Réd.	No. d'obs.	Remarques.
26	Lal. 1341	1795,0	0 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup> 10 <sup>s</sup> 21		38° 7' 13"1		1 : 1	
	W <sub>2</sub> . Oh. 1087	27,8	10,76		14,3		1 : 1	
	Poulk. 219	76,9	10,85	—,00	14,4	+ ,0	2 : 2	
	Lund	81,0	10,99	,00	14,8	,0	1 : 1	
	<i>Adopté :</i>		0 44 10,90		38 7 14,5			$\frac{1}{3}$ (2 Poulk. + Lund)
27	W <sub>2</sub> . Oh. 1091	28,9	0 44 23,73		35 12 49,1		1 : 1	
	Leyde	74,0	23,82	,00	52,5	,0	2 : 2	
	Lund	79,9	23,99	,00	52,6	,0	2 : 2	
	<i>Adoptée :</i>		0 44 23,90		35 12 52,5			$\frac{1}{2}$ (Leyde + Lund)
28	Lal. 1352	1795,0	0 44 27,18		38 16 43,0		1 : 1	
	W <sub>2</sub> . Oh. 1092	27,8	27,66		46,7		1 : 1	
	Lund	80,6	27,15	,00	43,8	,0	3 : 3	<i>Adoptée.</i>
29	BB. VI. 36°134	59,0	0 44 28,75		37 10 34,8		1 : 1	
	Lund	79,9	28,99	,00	34,8	,0	3 : 3	<i>Adoptée.</i>
30	W <sub>2</sub> . Oh. 1114	28,8	0 45 11,78		34 52 23,2		1 : 1	
	Leyde	74,0	11,40	,00	26,7	,0	1 : 1	<i>Adoptée.</i>
31	Lal. 1384	1794,9	0 45 16,34		37 27 32,3		1 : 1	
	W <sub>2</sub> . Oh. 1116	27,8	16,40		19,1		1 : 1	
	Lund	80,9	16,80	,00	21,2	,0	2 : 2	
	Par. III. 1056	81,8	16,78	+ ,05	20,5	— ,2	2 : 2	
	<i>Adoptée :</i>		0 45 16,81		37 27 20,8			$\frac{1}{5}$ (3 Lund + 2 Par.)
32	BB. VI. 34°132	59,0	0 45 23,88		34 57 49,2		1 : 1	
	Leyde	74,0	24,10	,00	..		1 : 0	
	Leyde (M)	94,8	24,01	,00	42,8	,0	1 : 1	<i>Adoptée.</i>
33	W <sub>2</sub> . Oh. 1122--23	28,9	0 45 24,31		35 15 30,7		2 : 2	
	Leyde	73,4	24,57	,00	31,5	,0	2 : 2	
	Lund	79,8	24,57	,00	32,0	,0	2 : 2	
	<i>Adoptée :</i>		0 45 24,57		35 15 31,8			$\frac{1}{2}$ (Leyde + Lund)
34	Lal. 1390	1794,9	0 45 24,72		36 26 45,3		1 : 1	
	Lund	80,7	25,64	,00	42,6	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
35	Rapp. à * 28	92,	0 45 28,92	,00	38 20 36,3	,0		<i>Adoptée.</i>
36	W <sub>2</sub> . Oh. 1129	27,8	0 45 35,70		37 30 17,4		1 : 1	
	Lund	81,3	36,03	,00	19,1	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
37	BB. VI. 37°156	58,9	0 45 47,00		37 50 0,2		2 : 2	AR :
	Lund	80,9	48,39	,00	2,1	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>

N.	Catalogue.	Année.	AR. 1892,0	Réd.	Décl. 1892,0	Réd.	No. d'obs.	Remarques.
38	Lal. 1443	1795,0	0 <sup>h</sup> 46 <sup>m</sup> 56 <sup>s</sup> 09		37°57'51"5		1 : 1	
	Y <sub>3</sub> . 450	72,9 : 66,2	56,59		43,9		4 : 3	
	Arm <sub>2</sub> . 126	75,8 : 71,8	56,04		44,4		1 : 2	
	Lund	80,7	56,67	,00	43,6	,0	2 : 2	
	Par. III. 1102	80,9	56,50	+ ,06	43,4	— ,2	1 : 1	
	<i>Adoptée:</i>		0 46 56,63		37 57 43,5			$\frac{1}{3}$ (2 Lund + Par.)
39	Lal. 1444-46	1795,0	0 47 1,43	+ ,29	38 26 50,4	— 1,4	2 : 2	
	W <sub>2</sub> . Oh. 1160	27,8	1,41	+ ,06	55,8	— ,5	1 : 1	<i>mouv. pr.</i>
	Y <sub>3</sub> . 451	69,9 : 65,9	1,65	+ ,09	62,8	— ,2	2 : 3	en $\alpha$ : + 0 <sup>s</sup> 0038
	Lund	80,9	1,96	,00	64,4	,0	2 : 2	en $\delta$ : + 0 <sup>s</sup> 1803
	Par. III. 1105	80,9	1,76	+ ,06	65,0	— ,2	1 : 1	
	<i>Adoptée:</i>		0 47 1,91		38 27 6,8			en tenant compte du mouv. propre.
40	Lal. 1449-50	1795,0	0 47 6,20		38 34 15,8		2 : 2	
	W <sub>2</sub> . Oh. 1161	27,8	6,58		18,4		1 : 1	
	Lund	80,9	6,70	,00	18,6	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
41	Lal. 1464	1794,9	0 47 31,81	+ ,29	36 50 6,3	— 1,5	1 : 1	
	W <sub>2</sub> . Oh. 1172	28,9	32,28	+ ,06	50 0,0	— ,5	1 : 1	
	Y <sub>3</sub> . 456	71,5 : 46,9	32,33	+ ,09	50 0,3	— ,3	3 : 2	<i>mouv. pr.</i>
	Par. II. 1115	64,4	32,25	+ ,06	....	...	10 : 0	en $\alpha$ : + 0 <sup>s</sup> 0017
	Par. III. 1115	73,3 : 73,6	32,19	+ ,05	49 58,9	— ,2	4 : 5	en $\delta$ : — 0 <sup>s</sup> 0696
	Lund	80,8	32,34	,00	49 57,6	,0	2 : 2	
	<i>Adoptée:</i>		0 47 32,35		36 49 57,0			en tenant compte du mouv. pr.
42	Leyde	73,4	0 47 50,44	,00	35 8 45,3	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
43	Lal. 1492-93	1795,0	0 48 19,17		38 28 56,9		2 : 2	
	W <sub>2</sub> . Oh. 1193	27,8	19,05		52,9		1 : 1	
	Y <sub>3</sub> . 472	73,6 : 47,9	18,86		54,0		6 : 3	
	Lund	81,3	18,99	,00	54,2	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
44	Lund	80,7	0 48 37,14	,00	38 19 18,6	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
45	Lund	80,7	0 48 54,39	,00	37 52 14,5	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
46	Rapp. à * a	92,	0 49 1,77	,00	35 3 46,7	,0		<i>Adoptée.</i>
* a	Leyde	74,0	0 49 50,61	,00	35 9 14,9	,0	2 : 2	
47	Lal. 1563	1793,6	0 50 18,54		34 38 40,0		1 : 1	
	W <sub>2</sub> . Oh. 1241-42	28,9	19,23		36,1		2 : 2	
	Par. II. 1183	66,7	19,36		....		1 : 0	
	Leyde	74,9	19,44	,00	36,0	,0	2 : 2	
	Par. III. 1183	79,9	19,39	+ ,05	38,5	— ,2	2 : 2	
	<i>Adoptée:</i>		0 50 19,44		34 38 36,9			$\frac{1}{5}$ (3 Leyde + 2 Par. III)

N <sup>o</sup> .	Catalogue.	Année.	AR. 1892,0	Réd.	Décl.1892,0	Réd.	No. d'obs.	Remarques.
48	W <sub>2</sub> . Oh. 1250 Lund	27,8 80,6	0 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup> 41 <sup>s</sup> 46 41,42	,00	37°47'57"0 48 0,3	,0	1 : 1 3 : 3	<i>Adoptée.</i>
49	Berl. Jahrb.	92,0	0 50 45,59	,00	37 54 48,7	,0	—	<i>Adoptée.</i> (μ Andromedae).
50	Lal. 1588 W <sub>2</sub> . Oh. 1257 Leyde Par. III. 1201	1793,6 28,8 73,4 81,9	0 50 59,02 59,56 59,34 59,29	,00  + ,05	34 48 32,0 29,0 25,6 26,3	  ,0 —,2	1 : 1 1 : 1 2 : 2 2 : 2	
	<i>Adoptée :</i>		0 50 59,34		34 48 25,8			$\frac{1}{5}$ (3 Leyde + 2 Par.)
51	Lal. 1604 BB.VI. 34 <sup>o</sup> 152 Par. III. 1207 Leyde	1793,6 49,0 68,8 73,4	0 51 15,46 15,29 15,10 15,14	  + ,05 ,00	34 16 39,8 43,8 43,2 42,5	  —,2 ,0	1 : 1 4 : 4 3 : 3 2 : 2	
	<i>Adoptée :</i>		0 51 15,14		34 16 42,7			$\frac{1}{2}$ (Par. + Leyde)
52	W <sub>2</sub> . Oh. 1279 Leyde	28,8 74,0	0 51 56,54 56,23	,00	34 47 5,9 5,9	,0	1 : 1 2 : 2	<i>Adoptée.</i>
53	Lal. 1625 Arm <sub>2</sub> . 137 Leyde Par. III. 1225	1793,6 71,8 73,4 73,3 : 74,8	0 51 58,97 59,69 59,81 59,77	+ ,11 ,00 + ,05	34 24 19,7 10,2 10,3 11,0	+ ,7  —,2	1 : 1 4 : 4 2 : 2 4 : 3	
	<i>Adoptée :</i>		0 51 59,81		34 24 10,7			$\frac{1}{3}$ (Arm <sub>2</sub> . + Leyde + Par.)
54	Leyde	74,7	0 52 14,41	,00	34 34 25,2	,0	3 : 3	<i>Adoptée.</i>
55	W <sub>2</sub> . Oh. 1335 Leyde	28,8 73,4	0 54 6,38 6,22	,00	34 26 52,9 56,0	,0	1 : 1 2 : 2	<i>Adoptée.</i>

N <sup>o</sup> .	Catalogue.	Année.	AR. 1893,0	Réd.	Décl.1893,0	Réd.	No. d'obs.	Remarques.
56	Lal. 2179 W <sub>2</sub> . Ih. 93 Leyde Par. III. 1562	1793,6 28,8 74,0 81,9	1 <sup>h</sup> 8 <sup>m</sup> 1 <sup>s</sup> 28 2,35 2,31 2,38	  ,00 + ,05	33°55'42"1 33,5 33,0 32,5	  ,0 —,2	1 : 1 1 : 1 2 : 2 2 : 2	
	<i>Adoptée :</i>		1 8 2,36		33 55 32,7			$\frac{1}{5}$ (3 Leyde + 2 Par.)
57	W <sub>2</sub> . Ih. 94 Leyde	28,8 74,0	1 8 10,25 9,77	,00	33 51 5,0 5,4	,0	1 : 1 2 : 2	<i>Adoptée.</i>

N°.	Catalogue.	Année.	AR. 1893,0	Réd.	Décl. 1893,0	Réd.	No. d'obs	Remarques.
58	W <sub>2</sub> . Ih. 129 Leyde	28,8 75,0	1 <sup>h</sup> 9 <sup>m</sup> 53 <sup>s</sup> 21 53,17	,00	33° 44' 14" 2 14,4	,0	1 : 1 2 : 2	<i>Adoptée.</i>
59	BB.VI. 33° 208 Leyde (M)	59,0 94,7	1 14 11,57 12,17	,00	33 42 33,4 32,4	,0	1 : 1 1 : 1	<i>Adoptée.</i>
60	Gould—d'Ag. Lal. 2477 Pi. Ih. 56 W <sub>2</sub> . Ih. 309 12 y. I. 70 Par. I. 1728 Obs. Poulk. VIII Leyde Leyde (M)	1784,74 1793,61 1800,— 28,81 40 : 41 40,8 44,91 73,98 94,73	1 17 31,24 30,80 31,74 32,35 32,57 .... 32,63 33,10 33,47	+ ,08 + ,27 + ,27 + ,06 + ,14 .... + ,05 ,00 ,00	33 40 46,0 50,7 49,9 52,1 52,7 52,2 54,6 55,8 58,5	— 3,3 — 1,8 — 1,8 — ,4 — ,7 — ,4 — ,0 ,0 ,0	2 : 2 1 : 1 8 : 4 1 : 1 5 : 6 0 : 1 1 : 1 2 : 2 2 : 2	<i>mouv. propre :</i> en $\alpha$ : + 0 <sup>s</sup> 0183 en $\delta$ : + 0" 1142
	<i>Adoptée :</i>		1 17 33,50		33 40 58,4			en tenant compte du mouv. propre.
61	Lal. 2604 12 y. I. 114 Leyde Par. III. 1778	1795,0 40 : 41 74,0 81,9	1 20 59,63 60,74 61,07 61,00	,00 ,00 + ,05	33 49 20,3 18,2 17,8 17,9		1 : 1 4 : 5 2 : 2 2 : 2	
	<i>Adoptée :</i>		1 21 1,06		33 49 17,8			$\frac{1}{2}$ (3 Leyde + 2 Par.)
62	W <sub>2</sub> . Ih. 459 Leyde	28,8 74,0	1 23 32,97 32,76	,00	33 52 28,4 30,0	,0	1 : 1 2 : 2	<i>Adoptée.</i>
63	BB.VI. 33° 243 Leyde	58,9 74,0	1 24 30,12 30,42	.... ,00	33 36 17,0 19,6	.... ,0	1 : 1 1 : 1	Incertain.
	<i>Adoptée :</i>		1 24 30,30		33 36 18,6			$\frac{1}{2}$ (2 BB. + 3 Leyde)
64	Lal. 2729 W <sub>2</sub> . Ih. 491 12 y. I. 122 Leyde Par. III. 1859	1795,0 28,8 40 : 41 73,6 81,8	1 24 47,65 48,31 47,99 48,19 47,94	+ ,27 + ,06 + ,14 ,00 + ,05	33 37 24,6 19,6 18,3 17,8 18,2	— 1,8 — ,5 — ,7 ,0 — ,2	1 : 1 1 : 1 5 : 5 4 : 4 2 : 2	
	<i>Adoptée :</i>		1 24 48,14		33 37 17,8			$\frac{1}{4}$ (3 Leyde + Par.)
65	W <sub>2</sub> . Ih. 539 Leyde	28,8 72,3	1 26 52,04 52,04	,00	33 18 7,4 5,7	,0	1 : 1 2 : 2	<i>Adoptée.</i>
65a	Radcliffe (M)	94,9	1 27 7,91	....	33 40 54,0	....	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
66	AN. 3238	93,9	1 27 50,54	— ,00	33 38 17,2	+ ,1	2 : 2	
	<i>Adoptée :</i>		1 27 50,54		33 38 17,3			Romberg.

N.	Catalogue.	Année.	AR. 1893,0	Réd.	Décl. 1893,0	Réd.	No d'obs.	Remarques.
67	Leyde (M)	94,7	1 <sup>h</sup> 28 <sup>m</sup> 49 <sup>s</sup> 89	,00	33°49'22"4	,0	1 : 1	<i>Adoptée.</i>
68	Lal. 2890	1795,0	1 29 44,49	+ ,27	33 17 47,0	- 1,9	1 : 1	Mouv. pr. en $\alpha$ insen-
	W <sub>2</sub> . Ih. 610	28,8	44,79	+ ,06	41,8	- ,4	1 : 1	sible; j'ai adopté:
	Par. II. 1963	66,9	44,74	+ ,05	....	... 1 : 0		$\alpha = \frac{1}{2}$ (Arm <sub>2</sub> + 2 Leyde
	Arm <sub>2</sub> . 213	73,9 : 72,4	44,32	+ ,10	32,7	+ ,7	3 : 4	+ Par. III)
	Leyde	74,0	44,56	,00	32,0	,0	2 : 2	Mouv. pr. en décl.:
	Par. III. 1963	79,9	44,44	+ ,05	34,1	- ,2	2 : 2	$\mu = - 0''1554$
	<i>Adoptée:</i>		1 29 44,51		33 17 30,3			en tenant compte du
								mouv. pr. en $\delta$ .
69	W <sub>2</sub> . Ih. 615	28,8	1 30 5,13		33 35 24,2		1 : 1	
	Leyde	75,0	4,93	,00	21,3	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
70	W <sub>2</sub> . Ih. 633	28,8	1 30 43,59		33 48 18,0		1 : 1	
	Leyde	72,3	43,49	,00	14,1	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
71	BB. VI. 33° 270	59,0	1 33 23,51		33 40 24,0		1 : 1	
	AN. 3238	93,9	24,04	- ,00	27,0	+ ,1	2 : 2	
	<i>Adoptée:</i>		1 33 24,04		33 40 27,1			Romberg.
72	Lal. 3042	1795,0	1 34 16,49		33 47 60,3		1 : 1	
	W <sub>2</sub> . Ih. 726	28,8	16,40		55,6		1 : 1	
	Leyde	76,0	16,77	,00	54,7	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
73	Leyde	75,0	1 35 16,09	,00	33 35 31,6	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
74	AN. 3238	93,9	1 36 10,02	- ,00	33 42 45,2	+ ,1	2 : 2	
	<i>Adoptée:</i>		1 36 10,02		33 42 45,3			Romberg.
75	W <sub>2</sub> . Ih. 892-93	28,8	1 41 7,56		33 46 47,5		2 : 2	
	Leyde	76,0	7,59	,00	47,3	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
76	Lal. 3275	1795,0	1 42 38,96		33 36 41,2		1 : 1	
	W <sub>2</sub> . Ih. 934	28,8	39,36		36,1		1 : 1	
	Leyde	76,0	39,08	,00	33,5	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
77	Leyde (M)	94,8	1 45 47,61	,00	33 48 53,7	,0	1 : 1	<i>Adoptée.</i>
78	W <sub>2</sub> . Ih. 1047	28,8	1 47 28,15		33 58 14,0		1 : 1	
	Leyde	76,0	27,85	,00	8,8	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
79	BB. VI. 33° 314	59,0	1 47 45,84		33 49 48,8		1 : 1	
	Leyde (M)	94,9	45,84	,00	52,3	,0	1 : 1	<i>Adoptée.</i>
80	Leyde (M)	94,9	1 48 24,97	,00	33 51 56,3	,0	1 : 1	<i>Adoptée.</i>



N.	Catalogue.	Année.	AR. 1893,0	Réd.	Décl. 1893,0	Réd.	No. d'obs.	Remarques.
81	Munich (m)	93,1	1 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup> 19 <sup>s</sup> .23		33°51'48".7		1 : 1	
	AN. 3238	93,9	18,33	—,00	48,2	+ ,1	1 : 1	
	<i>Adoptée :</i>		1 50 18,33		33 51 48,3			Romberg.
82	Munich (m)	93,1	1 50 58,65	,00	33 54 31,4	,0	1 : 1	<i>Adoptée.</i>
83	BB. VI. 33° 329	59,0	1 52 27,57		34 3 18,9		1 : 1	
	Leyde (M)	94,8	27,46	,00	17,6	,0	1 : 1	<i>Adoptée.</i>
84	Lal. 3619	1795,0	1 52 44,15		33 49 11,8		1 : 1	
	W <sub>2</sub> . Ih. 1195	28,8	44,48		12,1		1 : 1	
	Leyde	76,0	44,41	,00	10,4	,0	2 : 2	
	Par. III. 2441	80,9	44,37	+ ,05	8,9	— ,2	2 : 2	
	<i>Adoptée :</i>		1 52 44,41		33 49 9,7			$\frac{1}{5}$ (3 Leyde + 2 Par.)
85	Leyde (M)	94,7	1 53 3,75	,00	34 0 39,4	,0	1 : 1	<i>Adoptée.</i>
86	Leyde	73,5	1 55 7,58	,00	34 1 21,6	,0	2 : 2	
	AN. 3238	93,9	7,50	—,00	19,7	+ ,1	2 : 2	Romberg
	<i>Adoptée :</i>		1 55 7,53		34 1 20,4			$\frac{1}{3}$ (Leyde + 2 Romb.)
87	W <sub>2</sub> . Ih. 1292	28,8	1 56 27,62		34 8 42,4		1 : 1	
	Leyde	73,5	27,52	,00	41,6	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
88	BB. VI 33° 351	58,8	1 57 14,28		33 51 9,8		1 : 1	
	Leyde	73,5	14,60	,00	11,7	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
89	Christiania (m)	94,1	2 0 31,78	,00	34 5 5,0	,0	2 : 2	Rapp. à * <i>a</i> et * <i>b</i> .
	Leyde (M)	94,7	31,78	,00	4,9	,0	1 : 1	
	* <i>a</i> Leyde	73,5	2 1 49,52	,00	34 9 29,9	,0	2 : 2	} Réd. à 1894,0
	* <i>b</i> Leyde	76,0	2 2 1,04	,00	34 9 12,4	,0	2 : 2	
	<i>Adoptée :</i>		2 0 31,78		34 5 4,9			$\frac{1}{2}$ (Christ. + Leyde)
90	W <sub>2</sub> . Ih. 1426	28,8	2 1 46,02		34 9 14,0		1 : 1	
	Leyde	73,5	45,98	,00	12,6	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
91	W <sub>2</sub> . Ih. 1484	28,8	2 1 57,70		34 8 54,4		1 : 1	
	Leyde	76,0	57,50	,00	55,1	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
92	Leyde	73,4	2 3 35,06	,00	34 18 27,1	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
93	AN. 3238	93,9	2 3 55,68	—,01	34 6 9,6	+ ,1	1 : 1	
	<i>Adoptée :</i>		2 3 55,67		34 6 9,7			Romberg.
93a	Copenh. (m)		2 6 14,74	—,03	34 7 31,1	— ,4	1 : 1	AN. 3259; rapp. à * 95.
	<i>Adoptée :</i>		2 6 14,71		34 7 30,7			Pechüle.

N <sup>o</sup> .	Catalogue.	Année.	AR. 1893,0	Réd.	Décl. 1893,0	Réd.	No. d'obs.	Remarques.
94	Lal. 4086—87	1795,0	2 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 35 <sup>s</sup> 87		34° 0' 59" 8		2 : 2	
	W <sub>2</sub> . II <sup>b</sup> . 106—07	30,9	36,83		52,6		2 : 2	
	Poulk. 525	75,4	36,99	—,00	51,0	+ ,1	+ : 4	
	Leyde	76,0	36,82	,00	51,9	,0	2 : 2	
	Par. III. 2751	81,9	36,84	+ ,05	52,4	— ,2	3 : 3	
	<i>Adoptée:</i>		2 7 36,92		34 0 51,6			$\frac{1}{2}$ (2 Poulk. + Leyde + Par.)
95	Lal. 4092—93	1795,0	2 7 40,37		34 7 22,5		2 : 2	
	W <sub>2</sub> . II <sup>b</sup> . 110	33,0	41,18		17,9		1 : 1	
	Leyde	73,4	41,51	,00	16,5	,0	2 : 2	
	Par. III. 2756	81,9	41,39	+ ,05	16,1	— ,2	1 : 1	
	<i>Adoptée:</i>		2 7 41,49		34 7 16,3			$\frac{1}{3}$ (2 Leyde + Par.)
96	W <sub>2</sub> . II <sup>b</sup> . 119	33,0	2 7 57,93		34 24 38,0		1 : 1	mouv. propre?
	Leyde	73,4	8 0,20	,00	30,1	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
97	BB.VI. 34°398	58,1	2 8 37,58		34 25 59,6		1 : 1	
	Leyde (M)	94,8	37,89	,00	26 5,6	,0	1 : 1	<i>Adoptée.</i>
98	Leyde (M)	94,9	2 10 6,70	,00	34 13 25,5	,0	1 : 2	<i>Adoptée.</i>
99	BB.VI. 34°405	58,1	2 10 33,34		34 21 25,5		1 : 1	
	Leyde (M)	94,7	33,87	,00	26,3	,0	1 : 1	<i>Adoptée.</i>
100	Lal. 5107	1795,0	2 40 28,75		35 6 30,0		1 : 1	
	W <sub>2</sub> . II <sup>b</sup> . 921—22	32,6	28,99		26,4		2 : 2	
	Leyde	73,5	28,76	,00	23,1	,0	2 : 2	<i>Adoptée.</i>
101	BB.VI. 34°517	61,1	2 42 41,03		35 8 11,9		1 : 1	
	Leyde	73,4	41,01	,00	11,6	,0	2 : 2	
	Lund	80,9	41,08	,00	11,8	,0	2 : 2	
	<i>Adoptée:</i>		2 42 41,05		35 8 11,7			$\frac{1}{2}$ (Leyde + Lund)
102	Lal. 5284	1795,0	2 46 17,76	+ ,28	35 12 26,1	— 1,7	1 : 1	
	W <sub>2</sub> . II <sup>b</sup> . 1065	33,0	19,59	+ ,06	20,8	— ,6	1 : 1	
	BB.VI. 35°583	57,9	20,12	...	17,3	...	1 : 1	
	Par. II. 3503	61,9 : 63,3	20,27	+ ,06	14,4	— ,2	1 : 3	mouv. propre :
	Leyde	73,4	20,59	,00	14,0	,0	2 : 2	en $\alpha$ : + 0°0299
	Poulk. 675	77,4	20,65	— ,01	13,4	+ ,1	+ : 4	en $\delta$ : — 0°1380
	Lund	81,3	20,82	,00	12,7	,0	2 : 2	
	Par. III. 3503	81,5	20,72	+ ,05	13,0	— ,2	2 : 2	
	<i>Adoptée:</i>		2 46 21,16		35 12 11,2			en tenant compte du mouv. propre.
103	Lal. 5420	1794,9	2 51 5,80		35 18 45,8		1 : 1	
	W <sub>2</sub> . II <sup>b</sup> . 1163	33,0	50 57,65		40,3		1 : 1	
	Lund	79,8	57,62	,00	41,7	,0	1 : 1	<i>Adoptée.</i>

§ 18. *Notes au tableau du § précédent.*

La première colonne contient le numéro d'ordre, par lequel l'étoile sera désignée dans la suite; la 2<sup>me</sup> donne le titre du catalogue; je me suis servi des abréviations usuelles, telles que *Lal.* pour LALANDE, *Pi* pour PIAZZI, *W<sub>2</sub>* pour le catalogue des zones boréales de BESSEL, publié par WEISSE, *BB VI* pour le tome VI des observations de *Bonn*, *Y<sub>3</sub>* pour YARNALL-FRISBY, 3<sup>me</sup> édition, 12 y. I pour le *Twelve-year-Catalogue* (époque 1840), *AN.* pour les *Astronomische Nachrichten*. La 3<sup>me</sup> colonne donne la date de l'observation en fraction de l'année tropique; les 4 colonnes suivantes contiennent l'asc. droite et la déclinaison, réduites à 1892,0 ou 1893,0, avec leurs réductions au système du catalogue de l'Astron. Gesellschaft (AGC.) Aux ascensions droites de *W<sub>2</sub>* j'ai appliqué une réduction constante de + 0<sup>h</sup>06; pour les déclinaisons j'ai adopté l'expression:

$$\text{Réd.} = + 0^{\circ}33 - 0^{\circ}02 \delta^{\circ} - 0^{\circ}244 \sin(\alpha + 30^{\circ}).$$

Ces corrections sont obtenues par interpolation entre les expressions, que M. AUWERS a trouvées pour les époques de 1820 et de 1860 (voir *AN.* 3196, page 53), en prenant pour l'époque moyenne des positions, tirées de *W<sub>2</sub>*, l'année 1830. Les réductions du 2<sup>e</sup> catalogue de l'Observatoire d'*Armagh* (*Arm<sub>2</sub>*) sont prises de l'introduction de cet ouvrage.

La 8<sup>me</sup> colonne donne le nombre d'observations, et dans la dernière se trouvent: 1<sup>o</sup> des expressions qui indiquent de quelle manière la position adoptée a été formée, — 2<sup>o</sup> dans le cas d'un mouvement propre sensible, la valeur de ce mouvement.

Désignons par *t*, *α* et *δ* l'époque, l'asc. droite et la décl. des différents catalogues, et par *p* le poids, qu'il faut attribuer à ces coordonnées. La méthode des moindres carrés donne alors les expressions suivantes pour le calcul du mouv. propre:

$$\begin{aligned} T_{\alpha} &= \frac{[p_{\alpha} t_{\alpha}]}{[p_{\alpha}]}; A = \frac{[p_{\alpha} \alpha]}{[p_{\alpha}]}; \mu_{\alpha} = \frac{[p_{\alpha} \alpha (t_{\alpha} - T_{\alpha})]}{[p_{\alpha} (t_{\alpha} - T_{\alpha})^2]} \\ T_{\delta} &= \frac{[p_{\delta} t_{\delta}]}{[p_{\delta}]}; D = \frac{[p_{\delta} \delta]}{[p_{\delta}]}; \mu_{\delta} = \frac{[p_{\delta} \delta (t_{\delta} - T_{\delta})]}{[p_{\delta} (t_{\delta} - T_{\delta})^2]} \\ \alpha_o &= A + (t_o - T_{\alpha}) \mu_{\alpha} \\ \delta_o &= D + (t_o - T_{\delta}) \mu_{\delta} \end{aligned}$$

où l'index <sub>o</sub> désigne l'époque, à laquelle la position sera réduite.

Outre ces remarques générales j'ajouterai encore quelques notes aux étoiles individuelles.

\* 6. D'après 2 observations méridiennes de M. KOBOLD à *Strasbourg*. Réduction au système fondamental inconnue.

\* 12. Employée par M. HOUGH, directeur de l'Observatoire *Dearborn*, et rapportée par lui à Par. 930 = \* 4. Il trouvait (voir: *Astron. Journal* 289):

$$\Delta \alpha = + 2^m 22^s 00 \quad \Delta \delta = + 4' 31'' 6.$$

\* 15. M. HOUGH donne (l.c):

$$\Delta \alpha = + 24^m 40 \quad \Delta \delta = - 13'' 5.$$

\* 17. Je dois les deux positions de cette étoile à la bienveillance de M. le prof. VON KNORRE de l'Observatoire de *Berlin*. Il a lui-même comparé cette étoile deux fois avec \* 31 = Par. 1056 (1892 nov. 18 et 1894 sept. 19):

$$\begin{array}{ll} \Delta \alpha = - 2^m 48^s 07 & \delta \Delta = - 4' 1'' 7 \\ - 2 \quad 48,09 & - 4 \quad 1,7 \end{array}$$

La seconde position, *Berlin* (M), a été obtenue à l'aide du grand cercle méridien de cet Observatoire par M. BATTERMANN; M. VON KNORRE a eu la complaisance de me communiquer cette observation par sa lettre de 1894 oct. 13. Réduction au système fondamental inconnue.

\* 18. Observation de M. GRUSS (ou LÁSKA?) à *Prague*. Les différences ( $\Delta \alpha = - 2^m 20^s 84$ ;  $\Delta \delta = + 4' 4'' 5$ ) ont été déduites des coordonnées, données dans le n° 3133 des AN.

\* 19. Employée par M. W.-O. LAY de l'Observatoire Dudley à *Albany* (E.U.) et rapportée par lui à Lal. 1384. Il donne:

$$\Delta \alpha = - 2^m 11^s 91 \quad ; \quad \Delta \delta = - 7' 55'' 2 \text{ (voir Astr. journ. 284).}$$

Les étoiles 19 et 20 étant identiques, j'aurais dû rejeter la position moins exacte, obtenue micrométriquement par M. LAY, lorsque M. E.-F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN s'était chargé d'une réobservation de cette étoile de comparaison. Mais l'observation de M. LAY avait été déjà réduite avec les coordonnées provisoires, et par mégarde j'ai oublié de corriger la position conclue de la comète, lorsque M. BAKHUYZEN mit à ma disposition son observation méridienne. Il ne me restait donc que de l'introduire dans le tableau sous deux numéros différents.

\* 23. Observation de M. BIGOURDAN à *Paris*.

$$\Delta \alpha = - 13^s 49 \quad ; \quad \Delta \delta = - 8' 53'' 2 \text{ (C.R. 1892 nov. 14).}$$

\* 32. Se trouve une seule fois dans les zones de *Leyde*; observation rejetée à cause de l'incertitude de la déclinaison. A l'asc. droite j'ai appliqué les corrections qu'elle doit encore subir.

\* 35. Observation de M. BIGOURDAN (Comptes Rendus, 1892 nov. 14).

$$\Delta \alpha = + 1^m 1^s 77 \quad ; \quad \Delta \delta = + 3' 52'' 5$$



\* 37. L'asc. droite de BB. VI est la moyenne de deux observations discordantes, dont la seconde sera probablement erronée.

\* 39. En adoptant les poids 1, 1, 2, 3 et 2, on trouve:

$$T_a = 1863,01 \quad ; \quad A = 0^h 47^m 1^s 799 \quad ; \quad \mu_a = + 0^s 00383$$

$$T_b = 1862,12 \quad ; \quad D = + 38^\circ 37' 1'' 37 \quad ; \quad \mu_b = + 0'' 18026.$$

Avec ces valeurs de  $\mu$  les coord.  $A$  et  $D$  ont été réduites à 1892,0.

\* 41. En attribuant aux différentes positions les poids 1, 1, 2, 3, 3 et 3 je trouve:

$$T_a = 1863,254 \quad ; \quad A = 0^h 47^m 32^s 304 \quad ; \quad \mu_a = + 0^s 00173$$

$$T_b = 1858,08 \quad ; \quad D = + 36^\circ 49' 59'' 32 \quad ; \quad \mu_b = - 0'' 06963$$

\* 46. Employée par M. GEORGE LE CADET à *Lyon* et rapportée par lui à  $W_2$ . 0<sup>h</sup>.1227. M. LE CADET a eu la bonté de me communiquer les différences, qu'il avait trouvées:

$$\Delta \alpha = - 48^s 84 \quad ; \quad \Delta \delta = - 5' 28'' 2.$$

$W_2$ . 0<sup>h</sup>.1228 (désignée par \*  $a$ ) a été observée 2 fois à *Leyde*.

\* 60. En comparant les positions de Lal.,  $W_2$ , 12 y. et *Leyde* je découvris son mouv. pr. annuel de 0"2 à peu près. Je l'ai cherchée alors dans d'autres catalogues. M. le Dr. KAM de *Schiedam* tira mon attention sur les catalogues de GOULD-D'AGELET, de PIAZZI et de TAYLOR <sup>1)</sup> et sur le vol. VIII des *Observations du Poulkova* (page 322, n° 126). L'étoile se trouve 2 fois chez GOULD-D'AG. (n° 272 et 273); la réduction de ce catal. au système fondamental a été déduite de la manière suivante. Dans le *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft*, II Jahrgang, S. 15 on donne pour cette région du ciel:

$$Pi - d'Ag : - 0^s 19 - 1'' 5$$

et nous trouvons d'après les tables de M. AUWERS:

$$AGC. - Pi = + 0^s 27 - 1'' 8.$$

d'où nous tirons

$$AGC. - d'Ag : + 0^s 08 - 3'' 3.$$

Pour la position de *Poulk.* VIII j'ai adopté la correction du catal. de ROMBERG.

En ne considérant que les positions des catalogues existants le mouvement propre assez considérable devenait déjà très probable. Pour lever toute incertitude, et pour en fixer la valeur aussi exacte que possible, M. E.-F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN a observé cette étoile deux fois au cercle méridien (1894 sept. 19 et oct. 2); ses

<sup>1)</sup> Le cat. de TAYLOR n'était pas à ma disposition; la position de PIAZZI m'a été communiquée par M. le prof. KAPTEYN à Groningue, qui avait emprunté ce catal. de la bibliothèque de l'Observatoire de *Leyde*.



deux observations ne diffèrent que de  $0^s01$  en asc. droite et de  $0''1$  en décl.

Pour le calcul du mouv. propre j'ai adopté les poids 1, 1, 2, 2, 3, 2, 2, 4 et 4; je trouve:

$$T_{\alpha} = 1848,454 ; A = 1^h 17^m 32^s 6842 ; \mu_{\alpha} = + 0^s018326 \\ T_{\delta} = 1847,868 ; D = + 33^{\circ} 40' 53'' 200 ; \mu_{\delta} = + 0''11424^1).$$

\* 64. C'est la plus importante de toutes les étoiles de comparaison. Lorsque la comète prit la forme stellaire elle se trouva près de \* 64 et on trouvera dans la „Comparaison des Ephémérides avec les Observations” à peu près *soixante* comparaisons entre elle et la comète. La position adoptée n'a été déduite que de *Leyde* et de *Par.* III. J'ai tâché de trouver des valeurs probables pour son mouv. propre, en adoptant les poids 1, 1, 2, 4 et 2. J'ai trouvé

$$T_{\alpha} = 1856,18 ; A = 1^h 24^m 48^s 129 ; \mu_{\alpha} = + 0^s00055 \\ T_{\delta} = 1856,38 ; D = + 33^{\circ} 37' 18'' 43 ; \mu_{\delta} = - 0''0436$$

d'où nous tirons pour 1893,0:

$$\alpha = 1^h 24^m 48^s 15 ; \delta = + 33^{\circ} 37' 16'' 8.$$

J'ai cependant rejeté ces résultats à cause des grandes différences, qu'ils laissaient subsister dans les différents catalogues; les voici:

$$\begin{array}{rcl} \text{en } \alpha: & - 0^s175 & ; \quad \text{en } \delta: + 1''69 \\ & + 256 & ; \quad - 0,53 \\ & + 010 & ; \quad - 1,50 \\ & + 051 & ; \quad + 0,12 \\ & - 153 & ; \quad + 0,68 \end{array}$$

Je remarquerai encore, que l'asc. droite de  $W_2$  doit être augmentée de  $10^s$ ; de cette erreur provient la position erronée, que M. JONES a publiée dans l'*Astr. Journ.* 292.

\* 65a. Je dois cette position à l'obligeance de M. STONE; sur ma demande il m'a envoyé les observations de notre comète, faites à l'Observatoire Radcliffe, après avoir déterminé 2 fois (1894 nov. 5 et déc. 27) la position de cette étoile de comp. Réduction au système fondamental inconnue.

<sup>1)</sup> Plus tard j'ai remarqué, que M. BOSS, le directeur de l'Observatoire d'*Albany* (Etats Unis) avait déjà signalé ce mouv. pr.; il avait fourni à M. LOVETT la position suivante:

$$\alpha = 1^h 17^m 33^s 44 \quad \delta = + 33^{\circ} 40' 58'' 6 \quad (1893,0) \\ \text{conclue de Pi, d'Ag., BZ. 439, Rümkl., Paris, Leiden Zones, en adoptant} \\ \mu_{\alpha} = + 0^s018 \quad \mu_{\delta} = + 0''11$$

(voir *Astr. Journal*, n° 292). Ses calculs sont confirmés par les miens, qui se fondent sur un plus grand nombre d'observations, dont la dernière est d'une date aussi récente que possible.

\* 66. Employée par M. RENZ et déterminée 2 fois au cercle méridien du *Poulkova* par M. ROMBERG (AN. 3238)

\* 68. Adoptant pour les décl. les poids 1, 1, 2, 3 et 2, on trouve :

$$T_{\delta} = 1861,56 ; D = + 33^{\circ} 17' 35'' 23 ; \mu_{\delta} = - 0'' 15538.$$

\* 71 et \* 74. Observées 2 fois au *Poulkova* (AN. 3238).

\* 81 et \* 82. *Munich(m)*. Rapportées par M. ORTEL à \* 84; de ses positions (voir AN. 3155) je déduis :

$$* 81 : \Delta \alpha = - 2^m 25^s 18 ; \Delta \delta = + 2' 39'' 0$$

$$* 82 : - 1 \ 45,76 ; + 5 \ 21,0$$

Positions incertaines; l'observateur remarque: „Diese Anschlussbeob. wurden Febr. 7 bei heftigem Wind während kurzen Aufklarens ausgeführt und sind sehr unsicher“. Dans la décl. de \* 82 j'ai commis une erreur de  $0''7$ ; lisez  $30''7$ . De \* 81 M. ROMBERG a fait une seule observ. au cercle mér. du *Poulkova* (AN. 3238).

\* 86. Observée 2 fois au *Poulkova* par M. ROMBERG (AN. 3238).

\* 89. Étoile à laquelle M. I.-FR. SCHOETER de l'Observatoire de *Christiania* a rapporté la pos. de la comète, et qu'il a comparée avec 2 étoiles des zones de *Leyde*. Ces mesures, qu'il a eu la bienveillance de me communiquer, donnent les différences :

$$\text{avec } * a = \text{BD. } 33^{\circ} 368 ; \text{ avec } * b = \text{BD. } 33^{\circ} 369$$

$$1894 \text{ janv. } 22 : - 1^m 14^s 12 ; - 4' 8'' 3 ; - 1^m 25,79 ; - 3' 48'' 8$$

$$,, \quad 25 : - 1 \ 14,13 ; - 4 \ 7,6 ; - 1 \ 25,82 ; - 3 \ 50,6$$

Les moyennes donnent \* 89 :

$$\begin{array}{l} \text{par } * a : \alpha = 2^h 0^m 35^s 39^5 ; \delta = + 34^{\circ} 5' 21'' 9^5 \\ \text{par } * b : \quad \quad 2 \ 0 \ 35,23^5 ; \quad \quad + 34 \ 5 \ 22,7 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{par } * a \\ \text{par } * b \end{array}} \right\} \text{Equin. de } 1894,0$$

$$\text{Moyenne : } \alpha = 2 \ 0 \ 35,31^5 ; \delta = + 34 \ 5 \ 22,3$$

\* 93. Observée 1 fois au cercle mér. du *Poulkova* par M. ROMBERG (AN. 3238).

\* 93a. Rapportée par M. PECHÛLE à *Copenhague* à Par. 2756 = \* 95; les coord., qu'il a adoptées pour cette étoile, diffèrent de  $- 0^s 03$  en  $\alpha$ , et de  $- 0'' 4$  en  $\delta$  des nôtres; j'ai donc appliqué ces corrections à sa position de 93a.

\* 98. Observée deux fois par M. le Dr. E.-F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN au cercle méridien de *Leyde*. La première fois la déclinaison était un peu incertaine; la seconde fois, au contraire, en se préoccupant de cette coordonnée, il ne réussit pas à enregistrer les moments des passages. Les deux valeurs de  $\delta$  ne diffèrent que de  $1''0$ ; j'ai adopté la moyenne arithmétique.

\* 102. En attribuant aux catalogues les poids 1, 1, 1, 1, 2, 4, 2 et 2 on trouve :

$$T'_a = 1866,414; A = 2^h 46^m 20^s 3614; \mu_a = + 0^s 02994$$

$$T'_d = 1866,300; D = + 35^\circ 12' 14'' 887; \mu_d = - 0'' 13800$$

M. ROMBERG donne dans son catalogue :

$$\mu_a = + 0^s 0344 \quad \mu_d = - 0'' 139$$

### § 19. *Des observations et de leur réduction.*

Il me semble un peu superflu d'ajouter à chaque observation le nom de la source, dont elle est prise. Il suffira de dire, que j'ai puisé dans les *Astronomische Nachrichten*, les *Comptes Rendus* de l'Académie des Sciences à Paris, le *Bulletin astronomique*, publié par l'Observatoire de Paris, les *Monthly Notices of the R. A. S.*, et l'*Astronomical Journal*; les observations, faites à Cambridge (Angleterre) et à Oxford (Radcliffe Observatory), m'ont été communiquées par les observateurs.

Il arrive quelquefois, que les mêmes observations ont été publiées deux fois; *p. e.* M. SCHORR de Hambourg donne dans le n° 3215 des *Astr. Nachr.* un tableau complet de ses observations, quoique beaucoup d'entre elles eussent été déjà publiées dans les numéros précédents. Dans ces cas j'ai toujours fait usage de la publication la plus récente.

Pour ramener les dates d'observation au temps moyen de *Greenwich*, j'ai employé généralement les données des *Nautical Almanacs* pour 1896 et 1897 et du *Berliner Jahrbuch* pour 1892, ou celles fournies par les observateurs eux-mêmes. La position de la „Catholic University of America” (Dir. le P. SEARLE) a été tirée des *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. III, p. 57, celle de *Northfield* (Minn.) de l'*American Ephemeris* pour 1892.

Quand la relation

$$\circ \leq = * + (\circ \leq - *)$$

n'était pas satisfaite, j'ai adopté généralement la valeur donnée de  $\circ \leq - *$  comme la plus probable, à moins d'indication certaine, que cette différence était erronée. A quelques observations j'ai appliqué des corrections arbitraires, qui ont été parfois vérifiées par les observateurs. On les trouvera dans le § 21.

Pour faciliter le calcul des réductions au jour pour les étoiles de comp., j'ai dressé des éphémérides de ces étoiles en calculant les réductions de 3 en 3 ou de 2 en 2 jours, si l'étoile avait été employée plusieurs fois. On sait déjà, que la formation de l'éphéméride de la comète exige, que ces réd. au jour soient calculées à l'aide des données du *Nautical Almanac* (voir § 15 p. 39).

J'ai calculé les facteurs parallactiques à l'aide de la *Tafel III*

d'OPPOLZER (*Bahubestimmungen*, 1, 2<sup>e</sup> édition, page 456); j'ai donc adopté pour la parallaxe équatoriale horizontale du Soleil la valeur de M. NEWCOMB (8"848). Une observation étant incomplète, la coordonnée, qui fait défaut, a été prise de l'éphéméride. Pour les Observatoires de *Bordeaux*, *Boston*<sup>1)</sup>, *Carlsruhe*, *Charlottesville* (Leander Mc. Cormick Observatory), *Columbia* (Miss., E. U.) *Evansston* (Dearborn Obs.) *Lyon*, *Nice* et *Northfield* (Minn., E. U.) j'ai calculé les valeurs de  $\log \tan \phi'$ ,  $\log A$  et  $\log D$ . Les logarithmes de la distance géocentrique, et l'équation de la lumière ont été obtenues par une interpolation linéaire. J'ai calculé les lieux apparents de la comète en tenant compte des secondes, et même des troisièmes différences, si l'influence de celles-ci pouvait atteindre les valeurs de 0<sup>s</sup>0005 en asc. droite, et de 0"005 en déclinaison, en omettant ensuite la troisième décimale de l'asc. droite et la seconde décimale de la déclinaison.

#### § 20. *Comparaison des éphémérides avec les observations.*

Le tableau qui suit contient toutes les observations de la comète, dont j'avais pu prendre connaissance. Je ne crois pas, que les différentes colonnes aient besoin d'explication; que l'on sache seulement, que la colonne de la parallaxe donne la *correction parallaxique*, qu'il faut appliquer aux observations pour réduire les positions observées au centre de la Terre. La *position géocentrique* est donc obtenue en ajoutant la „réd. au jour”, la „parallaxe”, et la valeur de  $\odot \ll — *$  à la position moyenne de l'étoile de comparaison. Le TMG. Corr. est obtenu en retranchant l'équation de la lumière du TMG. de l'observation.

---

<sup>1)</sup> Une valeur approchée de la position de *Boston* ( $\lambda = + 4^h 44^m 15^s$ ;  $\beta = + 42^\circ 21' 28''$ ) a été tirée de l'Annuaire du Bureau des Longitudes.



# Comparaison des Ephémérides

N <sup>o</sup> .	Temps local.	TM.Gr. Corr.	Lieu.	Observateur.	*	☞ — *	
						α	δ
	h m s					m s	" "
		1892, NOV.					
1	12 7 22	8,450 910	Vienne	Bidschof	...	....	....
2	12 11 10	453 549	"	Weiss	...	....	....
3	9 20 6	577 712	Harvard Coll.	Wendell	43	— 2 3,21	— 5 36,0
4	8 23 44	678 981	Mt. Hamilton	Barnard	39	— 0 48,52	— 4 26,2
5	13 58 39	771 141	Harvard Coll.	Wendell	43	— 2 10,26	— 6 41,2
6	12 47 19	861 917	Mt. Hamilton	Barnard	39	— 0 55,35	— 5 30,8
7	6 43 6	9,225 692	Vienne	Holetschek	...	....	....
8	6 49 56,4	246 039	Christiania	Schroeter	44	—	+ 0 3,4
9	7 38 22	264 069	Vienne	Bidschof	...	....	....
10	7 27 7,4	271 860	Christiania	Schroeter	44	— 2 44,41	—
11	7 46 16,6	280 529	Leipzig	Hayn	39	— 1 8,71	— 7 52,5
12	7 59 25	317 580	Paris	Bigourdan	35	+ 0 23,63	— 1 35,8
13	9 28 6	379 163	Paris	"	35	+ 0 21,59	— 1 57,1
14	9 36 26	391 443	Greenwich	Crommelin	39	— 1 12,98	— 8 49,8
15	11 36 40	451 596	Carlsruhe	Ristenpart	28	+ 1 21,75	+ 1 31,1
16	11 36 40	451 596	"	"	40	— 1 18,00	— 16 5,7
17	11 22 53	465 364	Greenwich	Crommelin	28	+ 1 22,40	+ 1 17,8
18	10 8 36,1	670 228	Columbia, Miss.	Updegraff	28	+ 1 14,1	+ 0 17,0
19	11 46 55	819 932	Mt. Hamilton	Barnard	28	+ 1 9,68	— 0 34,9
20	5 44 30	10,195 673	Coll. Romano	Millosevich	25	+ 1 19,62	+ 4 47,8
21	6 17 48	253 466	Greenwich	Lewis	25	+ 1 17,13	+ 4 39,1
22	6 17 48	253 466	"	"	39	— 1 41,26	— 13 43,1
23	6 25 3	258 501	"	Crommelin	25	+ 1 18,33	+ 4 42,2
24	8 1 30,2	291 059	Leipzig	Hayn	25	+ 1 16,01	+ 4 17,9
25	9 29 18	353 473	Padoue	Abetti	38	— 1 35,20	+ 15 8,0
26	9 29 18	353 473	"	"	49	— 5 24,11	+ 18 1,9
26a	.....	374 230	Cambridge (Angl.)	Graham	25	+ 1 14,11	+ 3 52,0
27	8 19 53,3	594 693	Columbia, Miss.	Updegraff	25	+ 1 8,0	+ 2 29,2
28	13 15 32	741 115	Harvard Coll.	Wendell	38	— 1 46,87	+ 12 56,8
29	11 54 33	825 190	Mt. Hamilton	Barnard	28	+ 0 39,17	— 6 34,2
30	21 9 21 <sup>1)</sup>	872 571	Cath. Un. of Am.	Searle	25	+ 0 59,65	+ 0 39,0
31	21 9 21 <sup>1)</sup>	872 571	"	"	26	+ 0 54,78	+ 2 22,5
32	5 53 24	11,201 811	Coll. Romano	Millosevich	25	+ 0 50,75	— 1 6,9
33	6 34 46,2	230 787	Leipzig	Hayn	25	+ 0 49,60	— 1 15,2
34	6 19 52	239 872	Marseille	Esmiol	25	+ 0 49,43	— 1 18,9
35	7 11 50	263 324	Göttingen	Schur	38	— 1 59,62	+ 9 47,5
36	6 56 22 <sup>1)</sup>	280 204	Liverpool	Plummer	25	+ 0 49,53	— 1 35,3
37	7 47 48	282 947	Padoue	Abetti	25	+ 0 49,45	— 1 37,0
38	7 47 48	282 947	"	"	38	— 2 1,30	+ 9 41,1
39	10 17 26	411 299	Alger	Sy	25	+ 0 44,83	— 2 17,9
40	6 59 44 <sup>2)</sup>	496 560	Boston	Coit	25	+ 0 44,34	— 2 50,1
41	8 6 59,8 <sup>2)</sup>	543 269	"	"	25	+ 0 42,54	— 2 44,4

<sup>1)</sup> Temps moyen de Greenwich.

<sup>2)</sup> Temps moyen de Washington.

avec les observations.


N <sup>o</sup> .	Réd. au jour.		Parallaxe.		Position géocentrique.		O — C	
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
	s	"	s	"	h m s	° ' "	s	"
1	....	....	+ ,21	+ 1,5	0 46 23,64	+ 38 24 25,3	— 0,15	+ 3,8
2	....	....	+ ,21	+ 1,5	46 23,57	24 23,0	— 0,14	+ 2,1
3	+ 3,02	+ 25,7	— ,02	+ 0,4	46 18,78	23 44,3	— 0,79	+ 4,4
4	+ 3,01	+ 25,7	— ,11	— 0,0	46 16,29	23 6,3	+ 0,08	+ 1,8
5	+ 3,02	+ 25,7	+ ,33	+ 2,0	46 12,08	22 40,7	— 1,10	+ 7,6
6	+ 3,01	+ 25,7	+ ,30	+ 0,9	46 9,87	22 2,6	— 0,34	+ 0,4
7	....	....	— ,22	+ 1,6	45 58,69	19 55,6	+ 0,21	— 2,0
8	—	+ 25,7	—	+ 2,5	—	19 50,2	—	— 0,4
9	....	....	— ,15	+ 1,2	45 56,64	19 50,0	— 0,62	+ 5,6
10	+ 3,01	—	— ,12	—	45 55,62	—	— 1,39	—
11	+ 3,01	+ 25,8	— ,13	+ 1,5	45 56,08	19 41,6	— 0,65	+ 2,8
12	+ 2,99	+ 25,7	— ,12	+ 1,2	45 55,42	19 27,4	— 0,14	+ 1,4
13	+ 2,99	+ 25,7	+ ,00	+ 1,0	45 53,50	19 5,9	— 0,11	+ 1,1
14	+ 3,01	+ 25,8	+ ,01	+ 1,3	45 51,95	18 44,1	— 1,27	— 16,4
15	+ 2,99	+ 25,8	+ ,17	+ 1,4	45 52,06	18 42,1	+ 0,73	+ 2,3
16	+ 3,00	+ 25,8	+ ,17	+ 1,4	45 51,87	18 40,1	+ 0,54	+ 0,3
17	+ 2,99	+ 25,8	+ ,15	+ 1,6	45 52,69	18 29,0	+ 1,79	— 6,0
18	+ 2,99	+ 25,9	+ ,07	+ 0,1	45 44,31	17 26,8	— 0,21	+ 2,7
19	+ 2,99	+ 25,9	+ ,22	+ 0,4	45 40,04	16 35,2	+ 0,14	+ 3,1
20	+ 2,98	+ 26,0	— ,30	+ 1,5	45 28,27	14 18,6	— 0,27	— 2,3
21	+ 2,98	+ 26,0	— ,22	+ 2,0	45 25,86	14 10,4	— 0,96	+ 9,8
22	+ 3,00	+ 25,9	— ,22	+ 2,0	45 23,43	13 51,6	— 3,39	— 9,0
23	+ 2,98	+ 26,0	— ,21	+ 1,9	45 27,07	14 13,4	+ 0,40	+ 15,6
24	+ 2,98	+ 26,0	— ,11	+ 1,4	45 24,85	13 48,6	— 0,86	+ 1,5
25	+ 3,00	+ 25,9	+ ,01	+ 0,7	45 24,44	13 18,1	+ 0,58	— 7,4
26	+ 3,03	+ 25,8	+ ,01	+ 0,7	45 24,52	13 17,1	+ 0,66	— 8,4
26 a	+ 2,98	+ 26,0	— ,01	+ 1,4	45 23,05	13 22,7	— 0,20	+ 4,5
27	+ 2,98	+ 26,0	— ,10	+ 0,2	45 16,85	11 58,7	+ 0,05	— 1,8
28	+ 3,00	+ 25,9	+ ,31	+ 1,6	45 13,07	11 7,8	+ 0,49	— 1,0
29	+ 2,98	+ 26,0	+ ,24	+ 0,5	45 9,54	10 36,1	— 0,64	— 7,5
30	+ 2,98	+ 26,0	+ ,37	+ 3,3	45 8,97	10 11,6	+ 0,14	— 10,6
31	+ 2,98	+ 26,0	+ ,37	+ 3,3	45 9,03	10 6,3	+ 0,20	— 15,9
32	+ 2,97	+ 26,1	— ,28	+ 1,4	44 59,41	8 23,9	— 0,09	— 1,2
33	+ 2,97	+ 26,1	— ,20	+ 1,8	44 58,34	8 16,0	— 0,45	+ 1,3
34	+ 2,97	+ 26,1	— ,25	+ 1,2	44 58,12	8 11,7	— 0,42	+ 0,2
35	+ 2,99	+ 26,0	— ,16	+ 1,6	44 59,84	7 58,6	+ 1,95	— 4,5
36	+ 2,97	+ 26,1	— ,18	+ 1,9	44 58,29	7 56,0	+ 0,87	— 1,1
37	+ 2,97	+ 26,1	— ,13	+ 0,9	44 58,26	7 53,3	+ 0,91	— 2,8
38	+ 2,99	+ 26,0	— ,13	+ 0,9	44 58,19	7 51,5	+ 0,84	— 4,6
39	+ 2,97	+ 26,1	+ ,10	— 0,1	44 53,87	7 11,4	+ 0,04	+ 1,2
40	+ 2,97	+ 26,1	— ,17	+ 0,7	44 53,11	6 40,0	+ 1,60	+ 0,3
41	+ 2,97	+ 26,1	— ,07	+ 0,5	44 51,41	6 45,5	+ 1,16	+ 22,6

N <sup>o</sup> .	Temps local.	TM.Gr. corr.	Lieu.	Observateur.	*	☉ — *	
						α	δ
	h m s	1892 nov.				m s	° "
42	7 35 15,9	11,563 662	Columbia, Miss.	Updegraff	25	+ 0 41,7	— 3 26,3
43	9 7 33	568 868	Harvard Coll.	Wendell	38	— 2 11,11	+ 8 4,2
44	14 23 7 <sup>1)</sup>	590 433	Cath. Un. of Am.	Searle	25	+ 0 40,30	— 3 1,5
45	14 23 7 <sup>1)</sup>	590 433	"	"	26	+ 0 35,24	— 1 23,2
46	11 12 26	663 261	Poughkeepsie	Miss Whitney	25	+ 0 36,80	— 3 54,3
47	11 39 38,1	682 382	Columbia Coll.	Rees	38	— 2 14,9	+ 7 24,4
48	12 5 27,9	700 319	"	"	25	+ 0 36,2	— 3 43,2
49	11 0 15	708 295	Northfield	Wilson	38	— 2 14,28	+ 7 15,2
50	5 43 43,4	12,195 352	Leipzig	Hayn	25	+ 0 23,61	— 7 1,3
51	6 8 41	232 061	Marseille	Esmiol	38	— 2 27,89	+ 4 7,1
52	8 25 9	333 283	Alger	Sy	25	+ 0 20,71	— 7 49,7
53	9 7 9	336 307	Coll. Romano	Millosevich	38	— 2 30,37	+ 3 31,7
54	8 27 17	343 292	Greenwich	Crommelin	25	+ 0 19,35	— 8 40,7
55	8 29 49	345 051	"	Davidson	38	— 2 29,28	+ 3 18,4
56	8 29 52	345 086	"	Crommelin	38	— 2 27,20	+ 2 59,2
57	8 35 53	349 322	"	Davidson	25	+ 0 19,21	— 8 17,3
58	9 8 3	363 073	Alger	Trépied	25	+ 0 19,84	— 8 0,0
59	10 18 48,7	422 190	Bordeaux	Rayet	38	— 2 32,04	+ 2 58,2
60	12 42 34	483 441	Urania	Witt	38	— 2 34,49	+ 2 32,5
61	7 11 44,4	547 280	Columbia, Miss.	Updegraff	38	— 2 34,6	+ 2 2,6
62	15 50 44	614 107	Urania	Witt	38	— 2 37,80	+ 1 37,4
63	10 10 36	996 023	Windsor N.S.W.	Tebbutt	38	— 2 46,25	— 0 31,1
64	10 10 36	996 023	"	"	49	— 6 35,02	+ 2 22,5
65	5 39 54,7	13,192 600	Leipzig	Hayn	38	— 2 51,39	— 1 45,7
66	6 19 28	214 421	Prague	Gruss	38	— 2 50,76	— 2 1,2
67	6 52 37	232 122	Vienne	Holetschek	...	....	....
68	5 52 33,7	237 255	Bordeaux	Rayet	38	— 2 51,90	— 2 1,7
69	6 55 0	241 955	Berlin	von Knorre	38	— 2 52,25	— 2 9,9
70	6 57 7	252 928	Hambourg	Schorr	38	— 2 52,49	— 2 8,8
71	6 34 11 <sup>1)</sup>	264 707	Liverpool	Plummer	38	— 2 52,70	— 2 14,8
72	8 14 54	289 262	Vienne	Bidschhof	...	....	....
73	7 50 20	289 400	Kiel	Lamp	38	— 2 52,86	— 2 19,0
74	8 49 54	330 813	Bothkamp	Möller	38	— 2 54,40	— 2 54,2
75	10 20 1	415 036	Paris	Bigourdan	23	+ 0 8,13	— 5 27,0
76	10 46 32	433 448	"	"	23	+ 0 7,54	— 5 34,5
77	10 55 43	439 826	"	"	23	+ 0 7,38	— 5 35,3
78	11 10 49	450 312	"	"	23	+ 0 7,09	— 5 42,6
79	11 25 6	460 230	"	"	23	+ 0 6,70	— 5 44,6
80	12 21 16	468 604	Urania	Witt	38	— —	— 3 31,0
81	12 53 21	490 797	Berlin	von Knorre	38	— 2 58,55	— 3 37,8
82	13 4 36	498 695	Urania	Witt	38	— 2 58,75	— —
83	7 19 47	501 218	Albany (E. U.)	Boss	38	— 2 58,78	— 3 38,0
84	13 37 52	530 733	Kiel	Lamp	38	— 2 58,85	— 3 43,3
85	14 6 47	551 294	Hambourg	Schorr	38	— 2 58,68	— 3 53,7
86	13 33 12 <sup>1)</sup>	555 677	Cath. Un. of Am.	Searle	38	— 2 59,43	— 3 56,7
87	14 15 36	794 285	Haverford	Collins	49	— 6 54,42	— 2 36,4
88	14 15 36	794 285	"	"	38	— 3 5,53	— 5 32,0

<sup>1)</sup> Temps moyen de Greenwich.

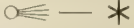
N <sup>o</sup> .	Réd. au jour.		Parallaxe.		Position géocentrique.		O — C	
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
	s	"	s	"	h m s	° ' "	s	"
42	+ 2,97	+ 26,1	— ,16	+ 0,3	0 44 50,48	+ 38 6 3,4	+ 0,78	— 12,2
43	+ 2,99	+ 26,1	— ,02	+ 0,4	44 48,49	6 14,2	— 1,07	+ 0,5
44	+ 2,97	+ 26,2	— ,01	+ 0,1	44 49,23	6 28,1	+ 0,25	+ 22,1
45	+ 2,97	+ 26,1	— ,01	+ 0,1	44 49,10	6 17,5	+ 0,12	+ 11,5
46	+ 2,97	+ 26,2	+ ,17	+ 0,7	44 45,91	5 35,9	— 1,12	— 3,9
47	+ 2,99	+ 26,1	+ ,21	+ 0,7	44 44,93	5 34,7	— 1,59	+ 1,7
48	+ 2,97	+ 26,2	+ ,24	+ 0,9	44 45,38	5 47,2	— 0,66	+ 20,7
49	+ 2,99	+ 26,1	+ ,15	+ 0,9	44 45,49	5 25,7	— 0,33	+ 2,0
50	+ 2,97	+ 26,2	— ,24	+ 2,2	44 32,31	2 30,4	— 0,79	+ 2,5
51	+ 2,99	+ 26,2	— ,26	+ 1,3	44 31,47	2 18,1	— 0,70	+ 3,5
52	+ 2,97	+ 26,3	— ,08	— 0,1	44 29,57	1 39,8	— 0,02	+ 1,9
53	+ 2,99	+ 26,2	— ,01	+ 0,4	44 29,24	1 41,8	— 0,28	+ 5,0
54	+ 2,97	+ 26,3	— ,06	+ 1,3	44 28,23	0 50,2	— 1,11	— 44,0
55	+ 2,99	+ 26,2	— ,06	+ 1,3	44 30,28	1 29,4	+ 0,98	— 4,2
56	+ 2,99	+ 26,2	— ,06	+ 1,3	44 32,36	1 10,2	+ 3,06	— 23,4
57	+ 2,97	+ 26,3	— ,05	+ 1,3	44 28,10	1 13,6	— 1,09	— 18,4
58	+ 2,97	+ 26,3	— ,01	— 0,1	44 28,77	1 29,5	— 0,07	+ 2,4
59	+ 2,99	+ 26,2	+ ,09	+ 0,8	44 27,67	1 8,7	+ 0,32	+ 3,1
60	+ 2,99	+ 26,2	+ ,23	+ 2,2	44 25,36	0 44,4	— 0,46	+ 1,1
61	+ 2,99	+ 26,2	— ,19	+ 0,5	44 24,83	0 12,8	+ 0,60	— 7,3
62	+ 2,99	+ 26,2	+ ,29	+ 3,9	44 22,11	+ 37 59 51,0	— 0,46	— 4,8
63	+ 2,98	+ 26,3	+ ,10	— 5,3	44 13,46	57 33,4	+ 0,16	— 2,8
64	+ 3,01	+ 26,2	+ ,10	— 5,3	44 13,68	57 32,1	+ 0,38	— 4,1
65	+ 2,98	+ 26,3	— ,24	+ 2,1	44 7,98	56 26,2	— 0,67	+ 2,0
66	+ 2,98	+ 26,3	— ,21	+ 1,8	44 8,64	56 10,4	+ 0,50	— 5,8
67	....	....	— ,18	+ 1,4	44 9,47	55 48,8	+ 1,75	— 20,9
68	+ 2,98	+ 26,3	— ,26	+ 1,5	44 7,45	56 9,6	— 0,15	+ 1,8
69	+ 2,98	+ 26,3	— ,16	+ 1,8	44 7,20	56 1,7	— 0,29	— 4,4
70	+ 2,98	+ 26,3	— ,16	+ 1,8	44 6,96	56 2,8	— 0,28	+ 0,6
71	+ 2,98	+ 26,3	— ,19	+ 2,0	44 6,72	55 57,0	— 0,24	— 1,0
72	....	....	— ,08	+ 1,1	44 6,45	55 52,2	+ 0,06	+ 3,4
73	+ 2,98	+ 26,3	— ,10	+ 1,7	44 6,65	55 52,5	+ 0,26	+ 3,8
74	+ 2,98	+ 26,3	— ,03	+ 1,6	44 5,18	55 17,2	— 0,25	— 16,3
75	+ 2,95	+ 26,4	+ ,09	+ 1,2	44 3,65	55 10,7	+ 0,17	+ 8,2
76	+ 2,95	+ 26,4	+ ,13	+ 1,3	44 3,10	55 3,3	+ 0,04	+ 7,6
77	+ 2,95	+ 26,4	+ ,14	+ 1,3	44 2,95	55 2,5	+ 0,03	+ 9,1
78	+ 2,95	+ 26,4	+ ,16	+ 1,4	44 2,68	54 55,3	+ 0,20	+ 5,8
79	+ 2,95	+ 26,4	+ ,17	+ 1,4	44 2,30	54 53,3	— 0,15	+ 7,4
80	—	+ 26,3	—	+ 2,1	—	54 40,9	—	— 1,9
81	+ 2,98	+ 26,3	+ ,24	+ 2,3	44 1,30	54 34,3	— 0,45	— 0,3
82	+ 2,98	—	+ ,22	—	44 1,08	—	— 0,49	—
83	+ 2,98	+ 26,3	— ,16	+ 0,7	44 0,67	54 32,5	— 0,84	+ 1,7
84	+ 2,98	+ 26,3	+ ,26	+ 2,8	44 1,02	54 29,3	+ 0,18	+ 9,4
85	+ 2,98	+ 26,3	+ ,27	+ 3,0	44 1,20	54 19,1	+ 0,83	+ 7,0
86	+ 2,98	+ 26,3	— ,07	+ 0,1	44 0,11	54 13,2	— 0,17	+ 2,5
87	+ 3,01	+ 26,3	+ ,36	+ 2,2	43 54,54	52 40,8	— 0,39	— 1,8
88	+ 2,98	+ 26,4	+ ,36	+ 2,2	43 54,44	52 40,1	— 0,49	— 2,5



N <sup>o</sup> .	Temps local.	TM.Gr. corr.	Lieu.	Observateur.	*	 — *	
						$\alpha$	$\delta$
	h m s	1892 nov.				m s	" "
89	6 1 53	14,207 572	Coll. Romano	Millosevich	38	— 3 13,47	— 8 7,3
90	6 34 49	227 892	Berlin	von Knorre	37	— 2 5,47	— 0 24,3
91	7 7 33	250 708	Urania	Witt	38	— 3 14,40	— 8 18,7
92	6 21 19	255 724	Greenwich	Bryant	38	— 3 13,92	— 7 22,6
93	6 44 22	256 745	Marseille	Esmiol	38	— 3 15,02	— 8 23,8
94	6 37 45	267 136	Greenwich	Bryant	22	+ 0 0,22	+ 12 23,0
95	7 38 23	269 974	Kremsmünster	Schwab	45	— 5 12,19	— 3 22,9
96	6 43 58	271 453	Greenwich	Davidson	38	— 3 12,54	— 8 32,4
97	7 3 14	284 832	"	"	22	+ 0 2,81	+ 12 0,5
98	8 8 45	297 354	Padoue	Abetti	22	+ 0 3,19	+ 11 48,1
99	8 8 45	297 354	"	"	38	— 3 14,46	— 8 55,8
100	7 27 0	301 336	Greenwich	Lewis	22	+ 0 1,02	+ 11 54,3
100a	—	320 915	Cambridge (Angl.)	Graham	38	— 3 16,10	— 8 42,8
100b	—	320 915	" "	"	49	— 7 4,88	— 5 48,4
101	7 58 12	323 001	Greenwich	Lewis	25	— 0 23,00	— 20 5,8
102	8 2 6	325 710	"	Davidson	25	— 0 21,17	— 20 8,8
103	8 2 6	325 710	"	"	26	— 0 25,67	— 18 19,8
104	7 50 12	515 014	Harvard Coll.	Wendell	38	— 3 21,25	— 9 58,9
105	14 2 12	538 645	Urania	Witt	38	— 3 20,90	— 10 3,8
106	15 57 10	627 413	Kiel	Lamp	48	— 7 7,04	— 0 58,4
107	7 20 34	634 747	Mt. Hamilton	Barnard	22	— 0 4,50	+ 10 10,4
108	9 43 53	977 374	Windsor N.S.W.	Tebbutt	38	— 3 28,64	— 12 43,6
109	9 43 53	977 374	"	"	49	— 7 17,44	— 9 48,2
110	5 47 16	15,197 363	Coll. Romano	Millosevich	22	— 0 14,83	+ 6 24,5
111	5 48 8	200 450	Jéna	Knopf	22	— 0 15,40	+ 6 36,8
112	5 56 15	201 061	Berlin	von Knorre	8	+ 3 12,14	—
113	6 1 18	204 568	"	"	8	—	+ 2 37,8
114	5 58 39,7	205 524	Leipzig	Hayn	22	— 0 15,97	+ 6 36,7
115	6 2 32	225 537	Genève	Kammernann	22	— 0 15,79	+ 6 25,6
116	6 1 22,2	243 276	Bordeaux	Picart	8	+ 3 10,90	+ 2 25,2
117	9 1 9	343 330	Carlsruhe	Ristenpart	22	— 0 15,76	+ 5 21,4
118	8 57 20	350 730	Lyon	Le Cadet	22	— 0 18,48	+ 5 42,3
119	8 53 41	352 954	Alger	Rambaud	36	— 2 16,34	+ 12 18,9
120	9 37 10	376 691	Marseille	Esmiol	8	+ 3 7,93	+ 1 34,9
121	10 9 1	407 300	Paris	Callandreau	22	— 0 19,72	+ 5 16,1
122	10 35 55	425 980	"	"	22	— 0 20,10	+ 5 11,0
123	10 47 8	426 976	Lyon	Le Cadet	22	— 0 20,38	+ 5 12,5
124	8 4 49,1	583 994	Columbia, Miss.	Updegraff	22	— 0 21,8	+ 4 44,4
125	9 4 50	627 958	Northfield	Wilson	22	— 0 23,40	+ 3 56,0
126	6 0 14	16,213 366	Göttingen	Schur	22	— 0 27,25	+ 0 6,2
127	6 16 0	214 727	Berlin	von Knorre	22	— 0 33,70	+ 0 17,1
128	6 34 30	256 254	Alger	Sy	22	— 0 33,82	— 0 2,8
129	7 11 13	281 749	"	Rambaud	22	— 0 34,98	— 0 6,5
130	7 26 40 <sup>1)</sup>	301 005	Liverpool	Plummer	22	— 0 34,54	— 0 7,9
131	9 36 24	363 390	Hambourg	Schorr	22	— 0 35,82	— 0 39,1
132	12 41 30	491 926	"	"	22	— 0 38,38	—
133	12 50 24	498 105	"	"	22	—	— 1 38,5

<sup>1)</sup> Temps moyen de Greenwich.

N.	Réd. au jour.		Parallaxe.		Position géocentrique.		O - C	
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
	s	"	s	"	h m s	° ' "	s	"
89	+ 2,98	+ 26,4	— ,26	+ 1,2	0 43 45,88	+ 37 50 3,8	— 0,07	— 5,8
90	+ 2,97	+ 26,4	— ,18	+ 1,9	43 45,71	50 6,1	+ 0,19	+ 4,1
91	+ 2,98	+ 26,4	— ,14	+ 1,7	43 45,07	49 52,9	+ 0,03	— 0,7
92	+ 2,98	+ 26,4	— ,20	+ 1,8	43 45,49	50 49,1	+ 0,55	+ 57,4
93	+ 2,98	+ 26,4	— ,20	+ 1,0	43 44,39	49 47,1	— 0,52	— 4,2
94	+ 2,95	+ 26,4	— ,18	+ 1,7	43 41,30	49 48,1	— 3,39	+ 0,6
95	+ 3,00	+ 26,5	— ,12	+ 1,1	43 45,08	49 19,2	+ 0,45	— 27,2
96	+ 2,98	+ 26,4	— ,17	+ 1,7	43 46,90	49 39,1	+ 2,30	— 6,8
97	+ 2,95	+ 26,5	— ,15	+ 1,6	43 43,92	49 25,6	— 0,40	— 15,3
98	+ 2,95	+ 26,5	— ,08	+ 0,8	43 44,37	49 12,4	+ 0,31	— 23,9
99	+ 2,98	+ 26,4	— ,08	+ 0,8	43 45,07	49 14,9	+ 1,01	— 21,4
100	+ 2,95	+ 26,5	— ,12	+ 1,5	43 42,16	49 19,3	— 1,81	— 15,5
100 <sub>a</sub>	+ 2,98	+ 26,4	— ,09	+ 1,5	43 43,42	49 28,8	— 0,14	+ 1,3
100 <sub>b</sub>	+ 3,01	+ 26,4	— ,09	+ 1,5	43 43,63	49 28,2	+ 0,07	+ 0,7
101	+ 2,95	+ 26,5	— ,09	+ 1,4	43 45,83	49 25,4	+ 2,31	— 1,3
102	+ 2,95	+ 26,5	— ,08	+ 1,4	43 47,67	49 22,4	+ 4,21	— 3,3
103	+ 2,95	+ 26,5	— ,08	+ 1,4	43 48,10	49 22,6	+ 4,64	— 3,1
104	+ 2,97	+ 26,5	— ,11	+ 0,6	43 38,24	48 11,7	— 1,28	— 3,6
105	+ 2,97	— 26,5	+ ,28	+ 3,0	43 38,98	48 9,2	— 0,06	+ 2,7
106	+ 3,00	+ 26,4	+ ,27	+ 4,0	43 37,65	47 32,3	+ 0,44	— 1,2
107	+ 2,94	+ 26,5	— ,17	+ 0,2	43 36,58	47 34,1	— 0,49	+ 4,4
108	+ 2,97	+ 26,5	+ ,07	— 5,3	43 31,03	45 21,1	+ 0,80	— 1,7
109	+ 3,00	+ 26,5	+ ,07	— 5,3	43 31,22	45 21,7	+ 0,99	— 1,1
110	+ 2,94	+ 26,6	— ,26	+ 1,3	43 26,16	43 49,4	+ 0,18	— 11,1
111	+ 2,94	+ 26,6	— ,22	+ 2,0	43 25,63	44 2,4	— 0,29	+ 3,0
112	+ 2,91	—	— ,21	—	43 26,01	—	+ 0,11	—
113	—	+ 26,6	—	+ 2,0	—	43 59,3	—	+ 1,5
114	+ 2,94	+ 26,6	— ,21	+ 1,9	43 25,07	44 2,2	— 0,75	+ 4,7
115	+ 2,94	+ 26,6	— ,23	+ 1,5	43 25,23	43 50,7	— 0,21	+ 0,7
116	+ 2,91	+ 26,6	— ,24	+ 1,4	43 24,74	43 46,1	— 0,36	+ 2,8
117	+ 2,94	+ 26,6	+ ,00	+ 1,1	43 25,49	43 46,1	+ 2,28	+ 40,3
118	+ 2,94	+ 26,6	— ,01	+ 0,8	43 22,76	43 6,7	— 0,31	+ 3,7
119	+ 2,95	+ 26,5	— ,01	— 0,1	43 22,63	43 4,4	— 0,40	+ 2,2
120	+ 2,91	+ 26,7	+ ,05	+ 0,6	43 22,06	42 55,1	— 0,52	+ 1,8
121	+ 2,94	+ 26,6	+ ,09	+ 1,1	43 21,62	42 40,8	— 0,39	— 1,0
122	+ 2,94	+ 26,6	+ ,12	+ 1,2	43 21,27	42 35,8	— 0,39	+ 1,0
123	+ 2,94	+ 26,6	+ ,15	+ 1,0	43 21,02	42 37,1	— 0,62	+ 2,7
124	+ 2,94	+ 26,6	— ,09	+ 0,2	43 19,36	41 28,2	+ 0,61	— 2,2
125	+ 2,94	+ 26,6	+ ,01	+ 0,6	43 17,86	41 20,2	— 0,09	+ 1,2
126	+ 2,93	+ 26,7	— ,20	+ 1,9	43 13,79	37 31,8	+ 6,11	— 6,7
127	+ 2,93	+ 26,7	— ,19	+ 1,9	43 7,35	37 42,7	— 0,30	+ 4,7
128	+ 2,93	+ 26,7	— ,22	+ 0,4	43 7,20	37 21,3	+ 0,25	— 1,0
129	+ 2,93	+ 26,7	— ,17	+ 0,2	43 6,09	37 17,4	— 0,44	+ 4,8
130	+ 2,93	+ 26,7	— ,12	+ 1,7	43 6,58	37 17,5	+ 0,38	+ 12,1
131	+ 2,93	+ 26,7	+ ,05	+ 1,5	43 5,47	36 46,1	+ 0,31	+ 4,3
132	+ 2,93	—	+ ,23	—	43 3,09	—	+ 0,04	—
133	—	+ 26,7	—	+ 2,5	—	35 47,7	—	— 3,2

N <sup>o</sup> .	Temps local.	TM.Gr. corr.	Lieu.	Observateur.	*		
						$\alpha$	$\delta$
	h m s	1892 nov.				m s	" "
134	13 52 46 <sup>1)</sup>	16,569 117	Cath. Un. of Am.	Searle	1	+12 40,58	— 3 57,4
134a	14 55 24	577 672	Copenhagen	Pechüle	22	— 0 41,05	— 2 8,0
135	15 7 49 <sup>1)</sup>	621 232	Cath. Un. of Am.	Searle	2	+10 18,99	+ 9 24,7
136	10 20 51	627 432	Columbia Coll.	Rees	22	—	— 2 25,1
137	10 25 6	630 384	"	"	22	— 0 40,40	—
138	7 44 23	651 209	Mt. Hamilton	Barnard	22	— 0 41,04	— 2 32,8
139	11 4 44	657 673	Poughkeepsie	Miss Whitney	22	— 0 41,92	— 2 32,8
140	11 45 57	690 219	Haverford	Jones	31	— 2 21,14	+ 6 59,8
141	11 45 57	690 219	"	"	22	— 0 42,34	— 2 49,5
142	14 52 23	808 083	Harvard Coll.	Wendell	22	— 0 43,95	— 3 33,0
143	5 47 39,0	17,197 777	Leipzig	Hayn	22	— 0 49,61	— 5 58,3
144	5 56 10	203 443	Coll. Romano	Millosevich	22	— 0 48,84	— 5 58,1
145	6 12 9	203 825	Vienne	Palisa	31	— 2 27,91	+ 3 37,3
146	6 5 56	207 686	Berlin	von Knorre	9	+ 2 19,33	—
147	6 18 32	208 258	Vienne	Holetschek	..	....	....
148	6 7 47	208 971	Berlin	von Knorre	9	—	— 0 50,1
149	6 18 0	225 135	Bothkamp	Möller	22	— 0 49,85	— 6 22,5
150	6 44 27	226 254	Vienne	Bidschhof	..	....	....
151	6 54 17	241 260	Berlin	von Knorre	9	+ 2 19,29	—
152	6 56 9	242 557	"	"	9	—	— 1 0,8
153	7 8 32	242 978	Vienne	Weiss	..	....	....
154	6 44 34	244 017	Hambourg	Schorr	22	— 0 49,78	— 6 14,6
155	7 31 16 <sup>1)</sup>	304 150	Liverpool	Plummer	22	— 0 49,67	— 6 39,2
156	8 50 30	359 170	Greenwich	Crommelin	22	— 0 49,54	— 7 1,1
157	11 0 54	409 654	Prague	Laska	18	— 0 7,50	— 1 26,1
158	11 55 23	459 367	Kiel	Lamp	31	— 2 31,55	+ 1 56,9
159	6 36 0 <sup>2)</sup>	479 790	Boston	Coit	22	— 0 51,90	—
160	7 59 38	521 414	Harvard Coll.	Wendell	22	— 0 55,33	— 7 58,7
161	7 56 12	526 308	Albany	Boss	31	— 2 32,92	+ 1 37,4
162	10 5 39	992 337	Windsor, N.S.W.	Tebbutt	31	— 2 37,61	— 1 26,8
163	6 32 58	18,223 547	Prague	Weinek	22	— 1 0,14	— 13 10,2
164	6 5 34	236 059	Alger	Sy	9	+ 2 5,35	— 7 22,3
165	6 58 34	241 324	Prague	Spitaler	22	— 1 3,72	— 13 21,9
166	6 56 43	242 898	Berlin	von Knorre	17	+ 0 6,19	+ 1 4,3
167	6 5 48	244 749	Greenwich	Davidson	31	— 2 41,41	— 3 9,5
168	6 19 54	254 539	"	"	22	— 1 2,20	— 12 49,8
169	7 2 44	256 096	Kiel	Lamp	31	— 2 41,19	— 3 0,5
170	6 41 19	260 884	Alger	Rambaud	9	+ 2 5,02	— 7 31,6
171	7 40 40	270 558	Prague	Laska	22	— 1 4,33	— 13 21,6
172	7 25 21	299 989	Greenwich	Edney	31	— 2 48,72	— 4 12,5
173	8 7 6	301 277	Hambourg	Schorr	31	— 2 42,50	— 3 19,7
174	10 8 2	412 957	Greenwich	Edney	22	— 1 9,43	— 13 45,4
175	12 30 29	472 608	Kremsmünster	Schwab	31	— 2 44,81	— 4 14,6
176	7 2 43,3	540 720	Columbia, Miss.	Updegraff	31	— 2 43,5	— 5 6,0
177	13 36 38 <sup>1)</sup>	557 811	Cath. Un. of Am.	Searle	2	+ 9 51,80	— 3 16,8
178	10 59 59	654 271	Poughkeepsie	Miss Whitney	31	— 2 45,70	— 5 37,4
179	9 43 56	654 956	Northfield	Wilson	31	— 2 47,19	— 5 35,0

<sup>1)</sup> Temps moyen de Greenwich.<sup>2)</sup> Temps moyen de Washington.

N.	Réd. au jour.		Parallaxe.		Position géocentrique.		O — C	
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
	s	"	s	"	h m s	° ' "	s	"
134	+ 2,81	+ 26,9	— ,02	+ 0,1	0 43 1,59	+ 37 35 55,5	— 0,21	+ 31,4
134a	+ 2,93	+ 26,7	+ ,26	+ 3,6	43 0,45	35 19,3	— 1,21	— 1,5
135	+ 2,83	+ 27,1	+ ,10	+ 0,2	43 0,74	35 24,9	— 0,22	+ 20,6
136	— —	+ 26,7	— —	+ 0,5	— —	34 59,1	— —	— 2,9
137	+ 2,93	— —	+ ,14	— —	43 0,98	— —	+ 0,16	— —
138	+ 2,93	+ 26,7	— ,11	+ 0,1	43 0,09	34 51,0	— 0,39	— 2,0
139	+ 2,93	+ 26,7	+ ,19	+ 0,8	42 59,51	34 51,7	— 0,84	+ 1,1
140	+ 2,94	+ 26,7	+ ,24	+ 0,9	42 58,85	34 48,2	— 1,01	+ 10,0
141	+ 2,93	+ 26,8	+ ,24	+ 0,9	42 59,14	34 35,2	— 0,72	+ 3,0
142	+ 2,93	+ 26,8	+ ,35	+ 2,9	42 57,64	33 53,7	— 0,37	+ 0,1
143	+ 2,92	+ 26,8	— ,21	+ 2,0	42 51,41	31 27,5	— 0,68	+ 1,6
144	+ 2,92	+ 26,8	— ,24	+ 1,1	42 52,15	31 26,8	+ 0,14	+ 3,1
145	+ 2,94	+ 26,8	— ,20	+ 1,5	42 51,64	31 26,4	— 0,36	+ 2,8
146	+ 2,90	— —	— ,19	— —	42 51,77	— —	— 0,18	— —
147	....	....	— ,19	+ 1,5	42 53,11	31 7,9	+ 1,17	— 14,0
148	— —	+ 26,9	— —	+ 2,0	— —	31 27,0	— —	+ 5,4
149	+ 2,92	+ 26,8	— ,17	+ 2,0	42 51,21	31 3,3	— 0,48	— 12,2
150	....	....	— ,17	+ 1,4	42 51,61	31 17,5	— 0,06	+ 2,4
151	+ 2,90	— —	— ,14	— —	42 51,78	— —	+ 0,33	— —
152	— —	+ 26,9	— —	+ 1,7	— —	31 16,0	— —	+ 7,1
153	....	....	— ,14	+ 1,2	42 51,20	31 15,1	— 0,23	+ 6,4
154	+ 2,92	+ 26,8	— ,15	+ 1,8	42 51,30	31 11,0	— 0,11	+ 2,7
155	+ 2,92	+ 26,8	— ,11	+ 1,7	42 51,45	30 46,3	+ 0,91	+ 0,8
156	+ 2,92	+ 26,8	— ,00	+ 1,3	42 51,69	30 24,0	+ 1,95	— 0,6
157	+ 2,92	+ 26,8	+ ,16	+ 1,5	42 51,55	30 27,5	+ 2,54	+ 22,1
158	+ 2,93	+ 26,8	+ ,19	+ 2,2	42 48,38	29 46,7	+ 0,07	+ 0,2
159	+ 2,92	— —	— ,16	— —	42 49,17	— —	+ 1,15	— —
160	+ 2,92	+ 26,9	— ,08	+ 0,5	42 45,82	29 25,7	— 1,61	+ 2,7
161	+ 2,93	+ 26,8	— ,08	+ 0,6	42 46,74	29 25,6	— 0,62	+ 4,5
162	+ 2,93	+ 26,9	+ ,12	— 5,1	42 42,25	26 15,8	+ 1,19	— 8,0
163	+ 2,91	+ 26,9	— ,17	+ 1,6	42 40,91	24 15,3	+ 2,81	— 40,5
164	+ 2,89	+ 27,0	— ,24	+ 0,6	42 37,73	24 53,5	— 0,22	+ 2,5
165	+ 2,91	+ 26,9	— ,14	+ 1,4	42 37,36	24 3,4	— 0,52	— 45,6
166	+ 2,90	+ 26,9	— ,13	+ 1,7	42 37,80	24 51,6	— 0,06	+ 3,2
167	+ 2,93	+ 26,9	— ,19	+ 1,8	42 38,14	24 40,0	+ 0,30	— 7,7
168	+ 2,91	+ 26,9	— ,17	+ 1,8	42 38,85	24 35,9	+ 1,13	— 8,1
169	+ 2,93	+ 26,9	— ,12	+ 1,8	42 38,43	24 49,0	+ 0,73	+ 6,0
170	+ 2,89	+ 27,0	— ,20	+ 0,3	42 37,44	24 43,9	— 0,20	+ 2,4
171	+ 2,91	+ 26,9	— ,09	+ 1,3	42 36,80	24 3,6	— 0,72	— 34,3
172	+ 2,93	+ 26,9	— ,10	+ 1,5	42 30,92	23 36,7	— 6,23	— 50,0
173	+ 2,93	+ 26,9	— ,05	+ 1,8	42 37,19	24 29,8	+ 0,05	+ 3,7
174	+ 2,91	+ 27,0	+ ,10	+ 1,4	42 31,89	23 40,0	— 3,88	— 3,6
175	+ 2,93	+ 26,9	+ ,25	+ 2,0	42 35,18	23 35,1	+ 0,13	+ 14,3
176	+ 2,93	+ 26,9	— ,16	+ 0,4	42 36,08	22 42,1	+ 1,84	— 12,8
177	+ 2,81	+ 27,3	— ,02	+ 0,1	42 33,41	22 43,5	— 0,63	— 4,8
178	+ 2,92	+ 26,9	+ ,19	+ 0,8	42 34,22	22 11,1	+ 1,31	— 0,5
179	+ 2,92	+ 26,9	+ ,08	+ 0,7	42 32,62	22 13,4	— 0,29	+ 2,1



N <sup>o</sup> .	Temps local.	TM.Gr. corr.	Lieu.	Observateur.	*	☾ — *	
						z	δ
	h m s	1892 nov.				m s	" "
180	12 15 32	18,710 658	Haverford	Collins	31	— 2 48,03	— 5 56,9
181	12 58 10	735 944	Albany	Lay	19	— 0 36,12	+ 1 44,9
182	9 7 52	952 159	Windsor, N.S.W.	Tebbutt	31	— 2 49,17	— 7 35,8
183	5 46 1	19,190 891	Prague	Spitaler	31	— 2 50,96	— 9 44,8
184	5 55 30,0	203 124	Leipzig	Hayn	29	— 2 55,51	+ 7 39,8
185	6 8 12	218 742	Göttingen	Schur	31	— 2 52,04	— 9 16,7
186	7 13 36	246 390	Vienne	Palisa	20	— 0 41,42	— 1 28,0
187	8 11 54	300 077	Jéna	Knopf	31	— 2 53,44	— 9 46,4
188	8 25 13	301 442	Prague	Gruss	22	— 1 15,91	— 19 37,5
189	8 13 8	305 413	Hambourg	Schorr	29	— 2 6,20	+ 6 54,8
190	8 55 52	322 724	Prague	Laska	22	— 1 15,69	— 19 52,6
191	8 41 55	344 576	Alger	Sy	22	— 1 16,37	— 19 35,4
191a	—	365 091	Cambridge (Angl.)	Graham	31	— 2 54,74	— 10 8,9
192	12 34 37	475 426	Kremsmünster	Schwab	31	— 2 56,41	— 10 56,6
193	12 57 42	491 455	"	"	29	— 2 8,73	+ 5 43,5
194	7 33 21	510 729	Poughkeepsie	Miss Whitney	17	— 0 8,78	— 6 54,1
195	10 43 26	635 053	Harvard Coll.	Wendell	29	— 2 9,74	+ 2 2,0
196	10 48 0,8	697 112	Columbia, Miss.	Updegraff	5	+ 2 47,8	+ 4 31,3
197	8 45 43	936 725	Windsor, N.S.W.	Tebbutt	31	— 3 0,86	— 13 59,8
198	6 47 28	20,238 907	Coll. Romano	Millosevich	13	+ 0 26,33	+ 9 9,0
199	6 0 56,7	242 722	Bordeaux	Rayet	5	+ 2 44,36	+ 1 4,7
200	6 20 17	254 699	Greenwich	Crommelin	13	+ 0 28,97	+ 8 55,0
201	7 31 35	289 225	Marseille	Esmiol	5	+ 2 43,14	+ 0 40,4
202	7 29 3 <sup>1)</sup>	304 150	Liverpool	Plummer	13	+ 0 26,90	+ 8 29,4
203	10 58 18	414 783	Padoue	Abetti	5	+ 2 43,48	— 0 21,1
204	10 58 18	414 783	"	"	13	+ 0 25,40	+ 7 53,1
205	11 40 33	444 122	"	"	5	+ 2 43,78	— 0 47,2
206	11 40 33	444 122	"	"	13	+ 0 25,54	+ 7 28,8
207	6 5 5	449 616	Columbia Coll.	Rees	13	+ 0 26,30	+ 6 58,2
208	6 17 17	458 087	"	Jacoby	13	+ 0 24,93	+ 6 58,5
209	6 33 10	469 184	Albany	Lay	29	— 2 16,79	— 0 20,4
210	12 25 50	480 836	Hambourg	Schorr	5	+ 2 41,93	— 0 32,3
211	7 0 41	487 992	Poughkeepsie	Miss Whitney	13	+ 0 24,70	+ 7 29,0
212	13 55 33	768 406	Harvard Coll.	Wendell	13	+ 0 21,90	+ 4 45,4
213	5 18 54,9	21,177 610	Leipzig	Hayn	13	+ 0 19,24	+ 2 55,2
214	5 49 46	216 357	Genève	Kammermann	13	+ 0 19,56	+ 3 0,4
215	6 17 44,0	223 085	Christiania	Schroeter	13	+ 0 19,62	—
216	7 11 48	233 488	Koenigsberg	Cohn	13	+ 0 18,99	—
217	5 55 37,2	238 969	Bordeaux	Rayet	5	+ 2 37,31	— 5 28,9
218	6 49 43,2	245 297	Christiania	Schroeter	13	—	+ 2 36,0
219	6 32 5	247 853	Marseille	Esmiol	5	+ 2 36,56	— 5 31,1
220	7 36 33	250 675	Koenigsberg	Cohn	13	—	+ 2 34,3
221	6 55 30 <sup>1)</sup>	279 099	Liverpool	Plummer	13	+ 0 19,02	+ 2 7,5
222	7 10 38	289 607	Greenwich	Lewis	13	+ 0 18,98	+ 1 54,9
223	8 9 47	330 681	"	Edney	13	+ 0 18,69	+ 0 18,1
224	9 35 23	383 630	Paris	Callandreu	13	+ 0 18,46	+ 1 54,3
225	9 58 39	399 786	"	"	13	+ 0 18,08	+ 1 43,2

<sup>1)</sup> Temps de moyen de Greenwich.



N <sup>o</sup> .	Réd. au jour.		Parallaxe.		Position géocentrique.		O - C	
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
	s	"	s	"	h m s	° ' "	s	"
180	+ 2,92	+ 26,9	+ ,28	+ 1,2	0 42 31,98	+ 37 21 52,0	- 0,28	+ 2,0
181	+ 2,90	+ 27,0	+ ,30	+ 1,8	42 31,98	21 39,3	0,00	- 1,1
182	+ 2,92	+ 27,0	+ ,04	- 5,2	42 30,60	19 46,8	+ 1,04	- 31,1
183	+ 2,92	+ 27,0	- ,21	+ 1,8	42 28,56	18 4,8	+ 1,55	- 41,9
184	+ 2,91	+ 27,0	- ,19	+ 1,9	42 26,20	18 43,5	- 0,69	+ 1,5
185	+ 2,92	+ 27,0	- ,18	+ 1,8	42 27,51	18 32,9	+ 0,79	- 3,1
186	+ 2,90	+ 27,0	- ,12	+ 1,2	42 25,87	18 28,2	- 0,57	+ 2,7
187	+ 2,92	+ 27,0	- ,04	+ 1,2	42 26,25	18 2,6	+ 0,36	- 2,4
188	+ 2,91	+ 27,1	- ,03	- 1,2	42 25,28	17 47,8	- 0,59	- 16,7
189	+ 2,91	+ 27,0	- ,04	+ 1,5	42 25,66	17 58,1	- 0,17	- 4,9
190	+ 2,91	+ 27,1	+ ,01	+ 1,2	42 25,54	17 32,7	- 0,12	- 23,7
191	+ 2,91	+ 27,1	- ,01	- 0,1	42 24,84	17 48,6	- 0,60	+ 0,6
191a	+ 2,92	+ 27,0	+ ,02	+ 1,4	42 25,01	17 40,3	- 0,22	+ 0,1
192	+ 2,92	+ 27,0	+ ,26	+ 2,0	42 23,58	16 53,2	- 0,56	- 4,8
193	+ 2,91	+ 27,0	+ ,27	+ 2,2	42 23,44	16 47,5	- 0,54	- 4,4
194	+ 2,89	+ 27,1	- ,10	+ 0,5	42 22,85	16 52,2	- 0,85	+ 11,5
195	+ 2,91	+ 27,0	+ ,17	+ 0,8	42 22,33	13 4,6	- 0,27	- 172,5
196	+ 2,86	+ 27,1	+ ,18	+ 0,5	42 20,80	15 39,6	- 1,22	+ 6,2
197	+ 2,91	+ 27,1	+ ,01	- 5,1	42 18,87	13 43,0	- 0,98	- 18,8
198	+ 2,88	+ 27,1	- ,16	+ 0,7	42 16,97	12 6,1	- 0,32	- 0,2
199	+ 2,86	+ 27,2	- ,21	+ 1,3	42 16,97	12 13,9	- 0,29	+ 9,0
200	+ 2,88	+ 27,1	- ,16	+ 1,7	42 19,61	11 53,1	+ 2,45	- 7,2
201	+ 2,86	+ 27,2	- ,10	+ 0,7	42 15,86	11 49,0	- 1,02	+ 1,9
202	+ 2,88	+ 27,1	- ,10	+ 1,6	42 17,60	11 27,4	+ 0,82	- 14,6
203	+ 2,86	+ 27,2	+ ,18	+ 1,2	42 16,48	10 48,0	+ 0,59	- 11,1
204	+ 2,88	+ 27,1	+ ,18	+ 1,2	42 16,38	10 50,7	+ 0,49	- 8,4
205	+ 2,86	+ 27,2	+ ,23	+ 1,4	42 16,83	10 22,1	+ 1,17	- 25,8
206	+ 2,88	+ 27,1	+ ,23	+ 1,4	42 16,56	10 26,6	- 0,90 <sup>1)</sup>	- 21,3
207	+ 2,88	+ 27,1	- ,22	+ 0,9	42 16,88	9 55,5	+ 1,26	- 50,3
208	+ 2,88	+ 27,1	- ,20	+ 0,8	42 15,53	9 55,7	- 0,03	- 46,9
209	+ 2,90	+ 27,1	- ,18	+ 0,9	42 14,92	10 42,4	- 0,55	+ 4,1
210	+ 2,86	+ 27,2	+ ,23	+ 2,4	42 14,98	10 38,0	- 0,40	+ 4,1
211	+ 2,88	+ 27,1	- ,14	+ 0,6	42 15,36	10 26,0	+ 0,03	- 5,1
212	+ 2,87	+ 27,1	+ ,33	+ 2,5	42 13,02	7 44,3	- 0,26	- 59,7
213	+ 2,87	+ 27,2	- ,22	+ 2,0	42 9,81	5 53,7	- 0,79	- 14,0
214	+ 2,87	+ 27,2	- ,21	+ 1,4	42 10,14	5 58,3	- 0,23	+ 5,4
215	+ 2,87	—	- ,13	—	42 10,28	—	- 0,05	—
216	+ 2,87	—	- ,10	—	42 9,68	—	- 0,58	—
217	+ 2,85	+ 27,3	- ,21	+ 1,3	42 9,91	5 40,4	- 0,32	- 3,8
218	—	+ 27,2	—	+ 2,3	—	5 34,8	—	- 7,0
219	+ 2,85	+ 27,3	- ,17	+ 0,9	42 9,20	5 37,8	- 0,98	- 3,0
220	—	+ 27,2	—	+ 1,7	—	5 32,5	—	- 7,3
221	+ 2,87	+ 27,2	- ,13	+ 1,7	42 9,68	5 5,7	- 0,31	- 23,2
222	+ 2,87	+ 27,2	- ,10	+ 1,5	42 9,67	4 52,9	- 0,26	- 32,0
223	+ 2,87	+ 27,2	- ,03	+ 1,3	42 9,45	3 15,9	- 0,24	- 113,3
224	+ 2,87	+ 27,2	+ ,08	+ 1,2	42 9,32	4 52,0	- 0,07	+ 3,0
225	+ 2,87	+ 27,2	+ ,10	+ 1,2	42 8,97	4 40,9	- 0,33	- 1,9

<sup>1)</sup> Dans ce nombre s'est glissé une erreur: lisez + 0°90.

N <sup>o</sup> .	Temps local.	TM.Gr. corr.	Lieu.	Observateur.	*	☞ — *	
						α	δ
	h m s	1892 nov.				m s	' "
226	10 47 8	21,433 453	Paris	Callandreau	13	+ 0 17,95	+ 1 30,4
227	7 10 30	533 185	Evanston	Hough	15	— 0 6,65	+ 1 9,9
228	13 51 12	544 425	Carlsruhe	Ristenpart	13	+ 0 24,29	— 0 10,0
229	13 51 27 <sup>1)</sup>	567 937	Cath. Un. of Am.	Searle	41	— 5 28,03	+ 13 28,2
230	7 45 40,0	570 379	Columbia, Miss.	Updegraff	13	+ 0 17,7	+ 0 42,8
231	10 25 51,8	630 647	Columbia Coll.	Rees	13	+ 0 17,1	— 0 7,3
232	15 37 6 <sup>1)</sup>	641 301	Princeton	Reed	13	+ 0 16,49	—
233	7 58 4	660 420	Mt. Hamilton	Barnard	13	+ 0 16,71	+ 0 10,2
234	16 7 2 <sup>1)</sup>	662 086	Princeton	Reed	13	—	+ 0 10,0
235	11 31 9	679 675	Haverford	Jones	13	+ 0 20,74	— 0 3,1
236	9 38 42	973 406	Windsor, N.S.W.	Tebbutt	4	+ 2 46,46	+ 12 54,8
237	9 38 42	973 406	"	"	41	— 5 29,55	+ 10 30,7
238	6 11 56	22,203 403	Vienne	Palisa	13	+ 0 14,63	— 3 21,9
239	6 8 5	213 143	Padoue	Abetti	5	+ 2 31,41	— 11 53,3
240	6 8 5	213 143	"	"	13	+ 0 13,32	— 3 48,3
241	6 11 6	213 542	Coll. Romano	Millosevich	13	+ 0 14,83	— 3 27,1
242	6 19 4 <sup>1)</sup>	253 743	Liverpool	Plummer	13	+ 0 14,75	— 3 42,4
243	8 41 49	344 342	Alger	Sy	13	+ 0 13,13	— 4 11,1
244	9 6 22	361 390	"	Ram baud	13	+ 0 13,68	— 4 21,1
245	7 24 30	504 024	Albany	Boss	13	+ 0 13,05	— 5 24,2
246	8 11 29	529 371	Harvard Coll.	Wendell	13	+ 0 11,66	— 5 22,6
247	7 10 38,1	545 995	Columbia, Miss.	Updegraff	13	+ 0 13,3	— 5 45,4
248	14 51 20	586 125	Carlsruhe	Ristenpart	11	+ 0 38,52	+ 15 23,9
249	9 34 14	648 001	Northfield	Wilson	41	— 5 32,00	+ 6 20,3
250	9 34 14	970 247	Windsor, N.S.W.	Tebbutt	41	— 5 33,10	+ 4 16,6
251	6 2 24	23,209 139	Padoue	Abetti	13	+ 0 12,95	— 10 4,4
252	6 20 58	220 337	Coll. Romano	Millosevich	13	+ 0 11,87	— 9 53,5
253	7 54 54	235 993	Poulkova	Renz	4	+ 2 41,20	+ 4 57,1
254	6 13 29 <sup>1)</sup>	249 808	Liverpool	Plummer	4	+ 2 41,56	+ 4 59,3
255	7 38 34	268 825	Prague	Gruss	4	+ 2 42,07	+ 5 10,8
256	10 27 4	410 913	Marseille	Esmiol	4	+ 2 40,59	+ 4 2,7
257	7 56 50	519 141	Harvard Coll.	Wendell	13	+ 0 9,88	— 11 33,6
258	7 9 0	531 891	Evanston	Hough	12	+ 0 18,33	— 1 26,1
259	15 4 58	578 807	Prague	Laska	4	+ 2 40,65	—
260	10 42 41	634 308	Harvard Coll.	Wendell	13	+ 0 9,64	— 12 20,3
261	12 4 21	702 615	Haverford	Jones	41	— 5 34,19	— 0 52,3
262	9 49 1	980 455	Windsor, N.S.W.	Tebbutt	4	+ 2 43,11	+ 0 42,3
263	9 49 1	980 455	"	"	41	— 5 32,81	— 1 48,3
264	5 58 16,5	24,209 402	Christiania	Schroeter	4	—	— 1 7,8
265	6 13 9,7	215 108	Leipzig	Hayn	11	+ 0 35,60	+ 5 17,4
266	6 1 43	224 484	Genève	Kammermann	4	+ 2 40,81	— 1 5,3
267	6 28 43	225 660	Coll. Romano	Millosevich	4	+ 2 40,64	— 1 3,7
268	6 6 25	229 858	Marseille	Esmiol	4	+ 2 40,17	— 1 9,6
269	7 15 55,5	263 322	Christiania	Schroeter	4	+ 2 42,16	—
270	7 59 12	283 094	Prague	Gruss	13	+ 0 13,44	— 16 20,3
270a	—	416 657	Cambridge (Angl.)	Graham	41	— 5 33,85	— 4 56,7
271	12 24 56	462 302	Vienne	Palisa	4	+ 2 40,35	— 2 41,7

<sup>1)</sup> Temps moyen de Greenwich.

N.	Réd. au jour.		Parallaxe.		Position géocentrique.		O — C	
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
226	+ 2,87	+ 27,2	+ ,16	+ 1,4	o 42 8,90	+ 37 4 28,3	— 0,21	— 1,7
227	+ 2,87	+ 27,2	— ,12	+ 0,6	42 8,42	3 53,5	— 0,15	+ 1,6
228	+ 2,87	+ 27,2	+ ,29	+ 2,8	42 15,37	2 49,3	+ 6,86	— 58,3
229	+ 2,92	+ 27,1	+ ,02	+ 0,1	42 7,26	3 52,4	— 1,12	+ 13,8
230	+ 2,87	+ 27,2	— ,08	+ 0,2	42 8,41	3 39,5	+ 0,04	+ 1,8
231	+ 2,87	+ 27,2	+ ,16	+ 0,6	42 8,05	2 49,8	0,01	— 24,9
232	+ 2,87	—	+ ,18	—	42 7,46	—	— 0,54	—
233	+ 2,87	+ 27,2	— ,06	+ 0,1	42 7,44	3 6,8	— 0,46	+ 3,4
234	—	+ 27,2	—	+ 0,9	—	3 7,4	—	+ 4,7
235	+ 2,87	+ 27,2	+ ,24	+ 1,0	42 11,77	2 54,4	+ 3,96	— 1,6
236	+ 2,84	+ 27,4	+ ,10	— 5,0	42 7,86	0 47,6	+ 1,44	— 16,4
237	+ 2,91	+ 27,2	+ ,10	— 5,0	42 5,81	0 49,9	— 0,61	— 14,1
238	+ 2,86	+ 27,3	— ,17	+ 1,4	42 5,24	+ 36 59 36,1	— 0,23	— 0,2
239	+ 2,84	+ 27,4	— ,25	+ 1,2	42 3,96	59 16,0	— 1,47	— 16,6
240	+ 2,86	+ 27,3	— ,25	+ 1,2	42 3,85	59 9,5	— 1,58	— 23,1
241	+ 2,86	+ 27,3	— ,20	+ 0,9	42 5,41	59 30,4	— 0,02	— 2,0
242	+ 2,86	+ 27,3	— ,16	+ 1,9	42 5,37	59 16,1	+ 0,09	— 1,0
243	+ 2,86	+ 27,3	— ,01	— 0,0	42 3,92	58 45,5	— 1,02	+ 2,9
244	+ 2,86	+ 27,3	+ 0,5	— 0,0	42 4,51	58 35,5	— 0,37	— 0,6
245	+ 2,86	+ 27,3	— ,10	+ 0,6	42 3,73	57 53,0	— 0,63	— 8,8
246	+ 2,86	+ 27,3	— ,04	+ 0,5	42 2,40	57 34,5	— 1,91	+ 2,4
247	+ 2,86	+ 27,3	— ,12	+ 0,3	42 3,96	57 11,5	— 0,30	— 14,3
248	+ 2,85	+ 27,3	+ ,29	+ 3,4	42 4,85	57 2,5	+ 0,71	— 8,0
249	+ 2,91	+ 27,2	— ,09	+ 0,8	42 3,17	56 45,3	— 0,78	— 1,7
250	+ 2,90	+ 27,3	+ ,10	— 4,9	42 2,25	54 36,0	— 0,87	— 8,4
251	+ 2,85	+ 27,4	— ,25	+ 1,2	42 3,47	52 53,5	+ 0,83	— 20,2
252	+ 2,85	+ 27,4	— ,18	+ 0,8	42 2,46	53 4,0	— 0,16	— 5,2
253	+ 2,83	+ 27,4	— ,03	+ 2,1	42 2,46	52 57,0	— 0,13	— 6,5
254	+ 2,82	+ 27,4	— ,16	+ 1,9	42 2,68	52 59,0	+ 0,11	+ 0,8
255	+ 2,82	+ 27,4	— ,06	+ 1,3	42 3,29	53 9,9	+ 0,75	+ 18,9
256	+ 2,82	+ 27,5	+ ,17	+ 1,1	42 2,04	52 1,7	— 0,29	+ 4,6
257	+ 2,85	+ 27,4	— ,04	+ 0,5	42 0,61	51 23,6	— 1,59	+ 7,6
258	+ 2,85	+ 27,4	— ,11	+ 0,6	42 1,53	51 3,9	— 0,65	7,3
259	+ 2,82	—	+ ,28	—	42 2,21	—	+ 0,07	—
260	+ 2,85	+ 27,5	+ ,18	+ 0,9	42 0,59	50 37,4	— 1,48	+ 5,0
261	+ 2,90	+ 27,4	+ ,28	+ 1,3	42 1,34	49 33,4	— 0,70	— 33,1
262	+ 2,82	+ 27,4	+ ,13	— 4,8	42 4,52	48 35,3	+ 2,61	+ 13,9
263	+ 2,89	+ 27,4	+ ,13	— 4,8	42 2,56	48 31,3	+ 0,65	+ 9,9
264	—	+ 27,5	—	+ 2,4	—	46 52,5	—	— 2,3
265	+ 2,84	+ 27,4	— ,15	+ 1,6	42 1,48	46 54,3	— 0,48	+ 1,6
266	+ 2,82	+ 27,5	— ,18	+ 1,3	42 1,91	46 53,9	— 0,05	+ 4,8
267	+ 2,82	+ 27,5	— ,16	+ 0,8	42 1,76	46 55,0	— 0,20	+ 6,3
268	+ 2,82	+ 27,5	— ,19	+ 1,0	42 1,26	46 49,3	— 0,71	+ 2,2
269	+ 2,82	—	— ,07	—	42 3,37	—	+ 1,39	—
270	+ 2,84	+ 27,5	— ,03	+ 1,2	42 4,17	46 37,7	+ 2,18	+ 10,7
270 a	+ 2,89	+ 27,4	+ ,12	+ 1,6	42 1,51	45 29,3	— 0,57	— 7,3
271	+ 2,82	+ 27,5	+ ,26	+ 2,1	42 1,89	45 18,3	— 0,23	— 1,1

N <sup>o</sup> .	Temps local.	TM.Gr.Corr.	Lieu.	Observateur.	*	☞ — *	
						$\alpha$	$\delta$
	h m s	1892 nov.				m s	"
272	6 38 0	24,510 306	Evanston	Hough	11	+ 0 35,93	+ 3 29,8
272a	15 20 17	594 512	Copenhague	Pechüle	11	+ 0 34,90	+ 2 51,2
273	15 49 43 <sup>1)</sup>	649 889	Charlottesville	Stone	11	+ 0 35,87	+ 2 39,2
274	6 10 19	25,163 254	Poulkova	Renz	11	+ 0 37,09	— 0 47,7
275	6 14 56	213 492	Berlin	von Knorre	11	+ 0 37,34	— 0 59,9
276	6 29 5	232 821	Hambourg	Schorr	11	+ 0 37,54	— 1 7,1
277	6 49 52	259 982	Marseille	Esmiol	4	+ 2 41,87	— 7 37,5
278	7 19 22	267 304	Bothkamp	Möller	6	+ 1 56,74	+ 7 14,3
279	9 32 6	370 517	Genève	Kammermann	11	+ 0 37,77	— 1 54,0
280	10 50 39	385 229	Koenigsberg	Cohn	3	+ 5 17,45	+ 1 29,4
281	10 7 41	399 035	Lyon	Le Cadet	11	+ 0 37,81	— 2 10,4
282	12 42 6	474 163	Vienne	Palisa	11	+ 0 37,49	— 2 32,5
283	13 8 23	500 678	Urania	Witt	11	+ 0 38,02	— 3 12,0
283a	13 16 48	508 705	Copenhague	Pechüle	11	+ 0 37,18	— 2 53,1
284	10 29 45,9	684 792	Columbia, Miss.	Updegraff	11	+ 0 38,2	— 4 29,7
285	5 49 20,8	26,198 452	Leipzig	Hayn	10	+ 1 5,02	+ 7 48,7
286	6 10 41	226 107	Strasbourg	Kobold	6	+ 2 0,00	+ 1 10,4
287	7 4 36	256 990	Bothkamp	Möller	10	+ 1 6,11	+ 7 18,1
287a	—	260 967	Cambridge (Angl.)	Graham	34	— 3 21,00	+ 6 59,6
288	9 2 3	366 685	Greenwich	Crommelin	11	+ 0 43,33	— 8 50,9
289	9 15 49	376 244	"	"	10	+ 1 8,64	+ 5 55,5
290	11 24 19	427 343	Dresde	v. Engelhardt	11	+ 0 42,02	— 8 33,7
291	13 1 26	487 528	Vienne	Palisa	34	— 3 20,87	+ 4 56,0
292	12 41 35,8	489 351	Christiania	Schroeter	11	+ 0 42,56	—
293	14 35 10	565 818	Jéna	Knopf	11	+ 0 42,70	— 9 22,9
294	9 47 4	27,364 911	Padoue	Abetti	10	+ 1 12,58	+ 0 7,4
295	9 47 4	364 911	"	"	11	+ 0 48,48	— 14 52,8
296	11 57 44,4	490 074	Bordeaux	Rayer	7	+ 2 2,18	+ 8 36,1
1892 DÉC.							
297	6 33 11	5,600 602	Mt. Hamilton	Barnard	24	+ 0 12,27	+ 8 6,0
298	6 50 46	612 812	"	"	24	+ 0 14,81	—
299	5 46 26	6,208 619	Strasbourg	Kobold	14	+ 2 21,69	— 1 32,6
300	6 10 54	585 060	Mt. Hamilton	Barnard	24	+ 0 36,36	+ 2 44,2
301	6 42 37	7,234 476	Coll. Romano	Millosevich	24	+ 0 53,75	— 0 53,0
302	8 22 50	536 297	Harvard Coll.	Wendell	24	+ 0 59,65	— 2 12,5
303	9 6 7	706 660	Mt. Hamilton	Barnard	24	+ 1 5,52	— 3 21,4
304	5 55 13	8,190 775	Vienne	Palisa	24	+ 1 18,52	— 5 52,6
305	6 7 3	198 991	"	"	21	+ 2 12,71	+ 4 3,4
306	9 18 58	9,339 439	Dresde	v. Engelhardt	27	+ 1 30,59	+ 6 5,0
307	8 31 12	541 965	Harvard Coll.	Wendell	33	+ 0 33,61	+ 2 23,1
308	9 42 3	598 440	Albany	Boss	33	+ 0 36,47	+ 2 9,0
309	10 36 6	636 366	Poughkeepsie	Miss Whitney	..	....	....
310	11 9 30	659 165	Albany	Lay	33	—	+ 1 45,5
311	11 28 14	672 173	"	"	33	+ 0 39,55	—
312	5 52 55	10,206 715	Hambourg	Schorr	33	+ 0 55,69	— 0 58,1
313	6 37 5	250 102	Marseille	Esmiol	16	+ 4 2,89	+ 4 23,1

<sup>1)</sup> Temps moyen de Greenwich.



N.	Réd. au jour.		Parallaxe.		Position géocentrique.		O — C	
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
	s	"	s	"	h m s	° ' "	s	"
272	+ 2,83	+ 27,5	— ,15	+ 0,7	0 42 1,80	+ 36 45 5,9	— 0,37	+ 4,6
272 a	+ 2,83	+ 27,5	+ ,24	+ 3,9	42 1,16	44 30,5	— 1,10	+ 1,0
273	+ 2,83	+ 27,5	+ ,19	+ 0,5	42 2,08	44 15,1	— 0,25	+ 6,5
274	+ 2,83	+ 27,5	— ,12	+ 2,3	42 2,99	40 50,0	— 0,30	— 5,5
275	+ 2,83	+ 27,5	— ,14	+ 1,7	42 3,22	40 37,2	— 0,19	+ 0,5
276	+ 2,83	+ 27,5	— ,12	+ 1,7	42 3,44	40 30,0	— 0,02	+ 0,6
277	+ 2,81	+ 27,6	— ,13	+ 0,8	42 3,01	40 21,3	— 0,52	+ 2,1
278	+ 2,81	+ 27,5	— ,07	+ 1,6	42 3,57	40 19,3	+ 0,02	+ 2,8
279	+ 2,82	+ 27,5	+ ,09	+ 1,0	42 3,87	39 42,4	+ 0,04	+ 4,6
280	+ 2,78	+ 27,6	+ ,16	+ 2,0	42 3,60	39 47,3	— 0,27	+ 15,1
281	+ 2,82	+ 27,6	+ ,14	+ 1,0	42 3,96	39 26,1	+ 0,05	— 1,0
282	+ 2,82	+ 27,6	+ ,27	+ 2,3	42 3,77	39 5,3	— 0,36	+ 6,4
283	+ 2,82	+ 27,6	+ ,25	+ 2,8	42 4,28	38 26,3	+ 0,06	— 22,7
283 a	+ 2,82	+ 27,6	+ ,24	+ 3,0	42 3,43	38 45,4	— 0,81	— 0,6
284	+ 2,82	+ 27,6	+ ,18	+ 0,6	42 4,40	37 6,4	— 0,42	— 33,9
285	+ 2,81	+ 27,6	— ,16	+ 1,6	42 6,25	34 28,3	— 0,64	0,0
286	+ 2,80	+ 27,6	— ,15	+ 1,4	42 6,74	34 15,3	— 0,28	— 2,7
287	+ 2,81	+ 27,6	— ,08	+ 1,7	42 7,42	33 57,8	+ 0,26	— 8,7
287 a	+ 2,85	+ 27,5	— ,12	+ 1,6	42 7,37	34 11,3	+ 0,19	+ 6,3
288	+ 2,81	+ 27,6	+ ,05	+ 1,4	42 9,38	32 46,0	+ 1,69	— 39,6
289	+ 2,81	+ 27,6	+ ,07	+ 1,4	42 10,10	32 34,9	+ 2,37	— 47,2
290	+ 2,81	+ 27,6	+ ,20	+ 1,9	42 8,22	33 3,7	+ 0,23	+ 0,6
291	+ 2,85	+ 27,6	+ ,27	+ 2,5	42 7,89	32 8,7	— 0,36	— 32,0
292	+ 2,81	—	+ ,20	—	42 8,76	—	+ 0,46	—
293	+ 2,81	+ 27,7	+ ,27	+ 2,2	42 8,97	32 14,9	+ 0,26	+ 3,3
294	+ 2,80	+ 27,7	+ ,24	+ 1,7	42 14,20	26 47,2	+ 0,58	— 28,7
295	+ 2,80	+ 27,7	+ ,24	+ 1,7	42 14,71	26 44,5	+ 1,09	— 31,4
296	+ 2,79	+ 27,6	+ ,26	+ 1,7	42 14,16	26 38,0	— 0,35	+ 8,2
297	+ 2,73	+ 28,0	— ,10	+ 0,2	0 44 17,41	+ 35 39 16,5	— 0,87	+ 5,3
298	+ 2,73	—	— ,07	—	44 19,98	—	+ 1,42	—
299	+ 2,71	+ 28,0	— ,13	+ 1,3	44 32,35	35 51,6	— 0,25	— 1,0
300	+ 2,72	+ 28,0	— ,12	+ 0,3	44 41,47	33 54,8	— 0,34	+ 4,0
301	+ 2,72	+ 28,1	— ,07	+ 0,6	44 58,91	30 18,0	+ 0,62	— 4,6
302	+ 2,71	+ 28,1	+ ,06	+ 0,6	45 4,93	28 58,5	— 1,27	+ 11,7
303	+ 2,71	+ 28,1	+ ,12	+ 0,3	45 10,86	27 49,3	+ 0,12	— 3,6
304	+ 2,70	+ 28,1	— ,11	+ 1,2	45 23,62	25 19,0	— 0,30	+ 0,4
305	+ 2,69	+ 28,1	— ,10	+ 1,2	45 23,71	25 20,5	— 0,44	+ 4,6
306	+ 2,69	+ 28,1	+ ,11	+ 1,5	45 57,29	19 27,1	+ 0,44	+ 0,5
307	+ 2,70	+ 28,1	+ ,08	+ 0,7	46 0,96	18 23,7	— 1,94	— 1,3
308	+ 2,70	+ 28,1	+ ,16	+ 0,9	46 3,90	18 9,8	— 0,70	+ 1,9
309	....	....	+ ,21	+ 1,2	46 7,32	17 48,1	+ 1,58	— 8,3
310	—	+ 28,1	—	+ 1,5	—	17 46,9	—	— 2,6
311	+ 2,70	—	+ ,25	—	46 7,07	—	+ 0,25	—
312	+ 2,69	+ 28,1	— ,09	+ 1,6	46 22,86	15 3,4	— 0,38	— 1,4
313	+ 2,66	+ 28,1	— ,07	+ 0,9	46 22,56	13 47,1	— 2,02	— 64,8






N <sup>o</sup> .	Réd. au jour.		Parallaxe.		Position géocentrique.		O — C	
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
	s	"	s	"	h m s	° ' "	s	"
314	+ 2,71	+ 28,1	+ ,10	+ 1,6	0 46 26,14	+ 35 14 24,8	— 2,43	+ 10,6
315	+ 2,66	+ 28,1	+ ,10	+ 1,6	46 26,71	14 25,3	— 1,86	+ 11,1
316	+ 2,66	+ 28,1	+ ,19	+ 1,3	46 28,94	14 7,2	— 0,94	+ 5,4
317	+ 2,71	+ 28,1	— ,01	+ 0,8	46 34,23	13 17,8	+ 0,13	— 4,4
318	+ 2,67	+ 28,1	— ,04	+ 1,3	46 57,66	9 56,6	+ 1,45	— 4,7
319	+ 2,65	+ 28,1	— ,10	+ 1,2	48 3,26	0 39,5	— 1,17	— 0,4
320	+ 2,65	+ 28,1	+ ,16	+ 1,3	48 10,08	+ 34 59 46,3	— 0,60	— 6,0
321	+ 2,71	+ 28,1	+ ,21	+ 1,3	48 11,03	59 33,1	— 0,73	— 11,0
322	+ 2,65	+ 28,1	+ ,22	+ 2,8	48 15,03	59 22,3	+ 0,27	+ 0,7
323	+ 2,67	+ 28,2	+ ,27	+ 2,5	48 15,67	59 13,8	+ 0,22	— 2,6
324	+ 2,64	+ 28,1	— ,09	+ 1,2	48 41,21	56 5,1	— 0,33	— 0,7
325	+ 2,70	+ 28,1	+ ,02	+ 0,7	48 42,90	55 48,3	— 1,43	+ 2,4
326	+ 2,64	+ 28,1	+ ,16	+ 1,5	48 47,03	55 29,1	+ 0,06	+ 1,3
327	+ 2,68	+ 28,2	+ ,17	+ 1,3	48 47,79	55 13,6	— 0,70	— 2,9
328	—	+ 28,1	—	+ 1,1	—	49 45,7	—	— 9,4
329	+ 2,68	—	+ ,21	—	49 35,58	—	— 1,22	—
330	+ 2,67	+ 28,1	— ,08	+ 1,2	49 59,98	47 19,7	— 0,51	— 1,4
331	+ 2,66	+ 28,1	+ ,10	+ 1,6	50 7,28	46 27,9	+ 0,48	— 14,2
332	+ 2,68	+ 28,1	+ ,10	+ 1,6	50 6,69	46 45,4	— 0,11	+ 3,3
333	+ 2,68	+ 28,1	+ ,17	+ 1,2	50 8,13	46 34,3	— 0,02	+ 0,4
334	+ 2,67	+ 28,1	+ ,24	+ 2,3	50 9,75	46 19,4	— 0,40	— 2,2
335	+ 2,66	+ 28,1	+ ,07	+ 0,7	50 11,96	46 1,3	— 1,40	— 0,8
336	+ 2,66	+ 28,1	— ,02	+ 0,8	50 15,07	45 56,3	+ 1,38	— 3,8
337	+ 2,65	+ 28,1	— ,00	+ 1,1	50 43,17	43 4,2	— 0,39	+ 1,0
338	+ 2,67	+ 28,1	+ ,18	+ 1,2	50 50,10	42 18,7	— 0,25	— 5,4
339	+ 2,64	+ 28,1	+ ,10	+ 0,7	52 27,05	33 48,7	— 0,18	— 0,6
340	+ 2,63	+ 28,1	+ ,10	+ 1,2	53 0,83	31 8,2	— 0,22	+ 1,8
341	+ 2,63	+ 28,1	+ ,07	+ 1,8	53 1,02	31 7,4	— 0,28	+ 2,2
342	+ 2,65	+ 28,1	+ ,12	+ 0,8	53 11,74	29 58,4	— 1,27	— 12,2
343	—	+ 28,1	—	+ 0,7	—	30 1,5	—	+ 1,1
344	+ 2,62	—	+ ,22	—	53 15,70	—	— 1,24	—
345	+ 2,62	—	+ ,23	—	53 16,13	—	— 1,20	—
346	—	+ 28,1	—	+ 1,7	—	29 40,0	—	+ 2,3
347	+ 2,62	+ 28,1	— ,02	+ 1,4	54 37,14	23 55,7	+ 2,40	— 17,8
348	+ 2,60	+ 28,1	+ ,13	+ 0,8	54 49,96	23 9,0	— 0,97	+ 1,6
349	+ 2,61	+ 28,1	+ ,07	+ 1,6	55 28,33	20 37,8	— 0,65	+ 0,2
350	+ 2,57	+ 28,0	+ ,06	+ 0,8	55 42,71	19 35,7	— 0,19	— 3,9
351	— 0,76	+ 8,5	+ ,09	+ 0,3	1 7 39,13	+ 33 49 58,5	— 0,89	— 17,9
352	— 0,77	+ 8,5	+ ,02	+ 1,0	8 19,34	49 9,1	— 0,18	— 9,9
353	— 0,77	+ 8,5	+ ,07	+ 0,8	8 41,63	48 39,4	+ 0,57	— 9,7
354	— 0,77	+ 8,5	+ ,00	+ 1,0	9 26,32	47 55,4	+ 0,03	+ 6,2
355	— 0,78	+ 8,4	+ ,10	+ 0,9	10 59,01	45 42,9	— 0,32	— 15,0
356	— 0,76	+ 8,6	+ ,07	+ 0,6	13 16,24	43 43,3	— 0,70	+ 2,3
357	— 0,81	+ 8,4	+ ,14	+ 1,4	15 26,20	41 59,7	— 0,92	+ 1,0
358	— 0,81	+ 8,4	+ ,17	+ 1,6	16 42,72	41 10,3	— 0,70	— 0,6

N <sup>o</sup> .	Temps local.	TM. Gr. corr	Lieu.	Observateur.	*	☞ — *	
						z	u
	h m s	1893 janv.				m s	° "
359	8 39 9	12,565 259	Charlottesville	Lovett	60	— 0 36,23	— 0 11,8
360	7 28 6	13,515 835	"	"	60	— —	— 0 50,8
361	7 55 53	535 127	"	"	60	+ 0 36,33	— —
362	7 12 33	14,529 375	Evanston	Hough	60	+ 1 52,87	— —
363	7 42 0	550 825	"	"	60	— —	— 1 16,4
364	8 46 17	16,306 377	Vienne	Holetschek	60	+ 4 8,72	— 1 54,6
365	9 22 44	355 490	Strasbourg	Kobold	60	+ 4 12,56	— 1 55,2
365 <sup>a</sup>	14 13 4	543 734	Copenhague	Pechüle	64	— 2 47,72	+ 1 42,9
366	8 5 22	566 872	Evanston	Hough	60	+ 4 29,40	— —
367	8 19 18	576 547	"	"	60	— —	— 2 0,4
368	8 21 19	593 148	Northfield	Wilson	61	+ 1 3,11	— 10 13,7
369	11 15 35	652 995	Harvard Coll.	Wendell	61	+ 1 7,36	— 10 19,3
370	6 52 16	17,244 314	Kiel	Lamp	64	— 1 52,69	+ 1 34,2
370 <sup>a</sup>	7 48 53	276 875	Copenhague	Pechüle	64	— 1 50,57	+ 1 33,4
371	7 50 18	291 217	Strasbourg	Kobold	64	— 1 49,15	+ 1 34,0
372	9 8 51	310 414	Koenigsberg	Cohn	64	— 1 47,68	+ 1 34,2
373	8 22 49	318 282	Genève	Kammermann	64	— 1 47,15	+ 1 33,9
374	9 36 13	358 641	Hambourg	Schorr	64	— 1 43,82	+ 1 30,8
375	7 5 50	500 017	Charlottesville	Lovett	64	— 1 32,80	— —
376	7 24 14	512 793	"	"	64	— —	+ 1 35,0
377	7 41 25	524 725	"	"	64	— 1 30,68	— —
378	9 7 11	563 747	Harvard Coll.	Wendell	61	+ 2 19,07	— 10 24,9
379	9 8 32	585 218	Charlottesville	Lovett	64	— —	+ 1 32,6
380	6 17 3	18,215 708	Munich	Oertel	64	— 0 36,32	+ 1 27,5
381	6 42 58	220 569	Vienne	Palisa	64	— 0 35,93	+ 1 27,4
382	6 47 54	229 314	Prague	Grusz	64	— 0 35,24	+ 1 30,0
383	6 43 27	238 102	Kiel	Lamp	64	— 0 34,31	+ 1 26,6
384	7 10 33	245 041	Prague	Láska	64	— 0 33,82	+ 1 31,2
385	6 53 4	245 263	Hambourg	Schorr	64	— 0 33,86	+ 1 26,1
386	9 37 17	250 562	Kazan	Gratschew	64	— 0 33,85	+ 1 27,2
386 <sup>a</sup>	7 27 23	261 857	Copenhague	Pechüle	64	— 0 32,76	+ 1 26,5
387	6 58 40 <sup>1)</sup>	276 855	Liverpool	Plummer	64	— 0 31,68	+ 1 27,7
388	8 13 40	307 353	Strasbourg	Kobold	64	— 0 28,99	+ 1 27,9
389	8 45 31	333 955	Genève	Kammermann	64	— 0 26,92	+ 1 28,3
390	12 10 16	469 887	Carlsruhe	Ristenpart	64	— 0 16,37	+ 1 23,8
391	7 42 17	550 664	Evanston	Hough	64	— 0 9,61	— —
392	7 47 0	553 940	"	"	64	— —	+ 1 29,6
393	7 35 40	561 271	Northfield	Wilson	64	— 0 8,91	+ 1 27,8
394	8 17 37	590 401	"	Sivashian	64	— 0 6,75	+ 1 26,9
395	8 20 38	19,197 248	Kazan	Trocki	64	+ 0 42,11	+ 1 27,8
396	5 49 42	201 173	Hambourg	Schorr	64	+ 0 42,39	+ 1 27,7
397	6 38 49	230 733	Munich	Oertel	64	+ 0 44,61	+ 1 28,2
398	6 34 37	231 879	Kiel	Lamp	64	+ 0 44,63	+ 1 27,8
399	6 57 37	252 698	Carlsruhe	Ristenpart	64	+ 0 47,10	+ 1 28,5
399 <sup>a</sup>	7 53 52	280 157	Copenhague	Pechüle	64	+ 0 48,05	+ 1 27,9
400	10 40 57	294 681	Kazan	Gratschew	64	+ 0 49,56	+ 1 27,4
401	8 5 40	301 708	Strasbourg	Kobold	64	+ 0 50,15	+ 1 28,7

<sup>1)</sup> Temps moyen de Greenwich.

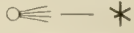
N.	Réd. au jour.		Parallaxe.		Position géocentrique.		O — C	
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
359	— 0,81	+ 8,4	+ ,17	+ 0,7	1 16 56,63	+ 33 40 55,7	— 1,52	— 6,8
360	— —	+ 8,4	— —	+ 0,5	— —	40 16,5	— —	— 9,7
361	— 0,82	— —	+ ,11	— —	18 9,12	— —	— 1,42	— —
362	— 0,84	— —	+ 0,9	— —	18 25,62	— —	— 0,06	— —
363	— —	+ 8,3	— —	+ 0,8	— —	39 51,1	— —	— 2,6
364	— 0,87	+ 8,2	+ ,15	+ 1,4	21 41,50	39 13,4	— 0,61	— 1,7
365	— 0,87	+ 8,2	+ ,17	+ 1,6	21 45,34	39 12,8	— 0,58	— 1,6
365a	— 0,82	+ 8,4	+ ,13	+ 3,3	21 59,73	39 12,4	— 0,81	+ 0,9
366	— 0,87	— —	+ ,13	— —	22 2,16	— —	— 0,18	— —
367	— —	+ 8,2	— —	+ 0,9	— —	39 7,1	— —	— 3,9
368	— 0,85	+ 8,3	+ ,14	+ 1,1	22 3,46	39 13,5	— 0,92	+ 2,7
369	— 0,85	+ 8,3	+ ,22	+ 1,9	22 7,79	39 8,7	— 1,25	— 1,3
370	— 0,83	+ 8,4	+ ,06	+ 1,4	22 54,68	39 1,8	— 0,54	— 1,1
370a	— 0,83	+ 8,4	+ ,09	+ 1,6	22 56,83	39 1,2	— 0,96	— 1,4
371	— 0,83	+ 8,4	+ ,11	+ 1,2	22 58,27	39 1,4	— 0,62	— 1,1
372	— 0,83	+ 8,4	+ ,14	+ 1,8	22 59,77	39 2,2	— 0,63	— 0,1
373	— 0,83	+ 8,4	+ ,14	+ 1,2	23 0,30	39 1,3	— 0,72	— 0,9
374	— 0,83	+ 8,4	+ ,15	+ 1,9	23 3,64	38 58,9	— 0,34	— 2,9
375	— 0,84	— —	+ ,09	— —	23 14,59	— —	— 0,69	— —
376	— —	+ 8,4	— —	+ 0,5	— —	39 1,7	— —	+ 1,2
377	— 0,84	— —	+ ,12	— —	23 16,74	— —	— 0,48	— —
378	— 0,87	+ 8,3	+ ,18	+ 1,2	23 19,44	39 2,4	— 0,74	+ 2,3
379	— —	+ 8,4	— —	+ 0,9	— —	38 59,7	— —	— 0,2
380	— 0,85	+ 8,3	+ ,04	+ 0,9	24 11,01	38 54,5	— 0,70	— 1,9
381	— 0,85	+ 8,3	+ ,06	+ 1,0	24 11,42	38 54,5	— 0,68	— 1,8
382	— 0,85	+ 8,3	+ ,06	+ 1,1	24 12,11	38 57,2	— 0,68	+ 0,9
383	— 0,85	+ 8,3	+ ,05	+ 1,3	24 13,03	38 54,0	— 0,45	— 2,3
384	— 0,85	+ 8,3	+ ,08	+ 1,1	24 13,55	38 58,4	— 0,48	+ 2,2
385	— 0,85	+ 8,3	+ ,06	+ 1,3	24 13,49	38 53,5	— 0,56	— 2,7
386	— 0,85	+ 8,3	+ ,15	+ 2,0	24 13,59	38 55,3	— 0,88	— 0,9
386a	— 0,85	+ 8,3	+ ,08	+ 1,5	24 14,61	38 54,1	— 0,75	— 2,1
387	— 0,85	+ 8,3	+ ,06	+ 1,3	24 15,67	38 55,1	— 0,88	— 1,0
388	— 0,85	+ 8,3	+ ,13	+ 1,3	24 18,43	38 55,3	— 0,54	— 0,7
389	— 0,85	+ 8,3	+ ,15	+ 1,3	24 20,52	38 55,7	— 0,56	— 0,3
390	— 0,85	+ 8,3	+ ,19	+ 2,5	24 31,11	38 52,4	— 0,75	— 3,2
391	— 0,85	— —	+ ,13	— —	24 37,81	— —	— 0,46	— —
392	— —	+ 8,3	— —	+ 0,8	— —	38 56,5	— —	+ 1,0
393	— 0,85	+ 8,3	+ ,11	+ 0,9	24 38,49	38 54,8	— 0,62	— 0,7
394	— 0,85	+ 8,3	+ ,14	+ 1,0	24 40,68	38 54,0	— 0,75	— 1,4
395	— 0,86	+ 8,3	+ ,11	+ 1,7	25 29,50	38 55,6	— 0,30	— 0,2
396	— 0,86	+ 8,3	+ ,02	+ 1,2	25 29,60	38 55,0	— 0,51	— 0,8
397	— 0,86	+ 8,3	+ ,06	+ 1,0	25 31,95	38 55,3	— 0,52	— 0,6
398	— 0,86	+ 8,3	+ ,03	+ 1,3	25 31,96	38 55,2	— 0,60	— 0,7
399	— 0,86	+ 8,3	+ ,07	+ 1,1	25 34,45	38 55,7	+ 0,23	— 0,3
399a	— 0,86	+ 8,3	+ ,10	+ 1,6	25 35,43	38 55,6	— 1,00	— 0,5
400	— 0,86	+ 8,3	+ ,16	+ 2,3	25 37,00	38 55,8	— 0,59	— 0,3
401	— 0,87	+ 8,3	+ ,12	+ 1,2	25 37,53	38 56,0	— 0,57	— 0,1



N <sup>o</sup> .	Temps local.	TM.GR. corr.	Lieu.	Observateur.	*		
						$\alpha$	$\delta$
	h m s	1893 janv.				m s	" "
402	8 52 53	19,338 980	Genève	Kammermann	64	+ 0 53,12	+ 1 29,0
403	6 43 59	484 665	Charlottesville	Lovett	64	+ 1 4,65	—
404	7 9 28	502 361	"	"	64	—	+ 1 32,1
405	6 36 14	504 711	Evanston	Hough	64	+ 1 6,79	+ 1 30,1
406	7 35 25	520 380	Charlottesville	Lovett	64	+ 1 7,88	—
407	7 57 24	535 645	"	"	64	—	+ 1 32,2
408	9 41 47	587 593	Harvard Coll.	Wendell	64	+ 1 12,79	+ 1 30,4
409	9 40 30	593 975	Albany	Lay	64	+ 1 13,34	+ 1 27,9
410	7 25 37	20,158 955	Kazan	Trocki	64	+ 1 59,17	+ 1 35,8
410a	—	211 797	Cambridge (Angl.)	....	Mér.	—	—
411	6 38 13	230 226	Munich	Oertel	64	+ 2 4,85	+ 1 33,6
412	8 20 26	293 387	Prague	Gruss	65	+ 0 5,96	+ 20 52,7
413	8 22 51	302 159	Padoue	Abetti	62	+ 3 26,62	— 13 40,7
414	8 22 51	302 159	"	"	63	+ 2 28,89	+ 2 30,2
415	8 22 51	302 159	"	"	64	+ 2 11,17	+ 1 32,4
416	7 59 25 <sup>1)</sup>	318 858	Liverpool	Plummer	64	+ 2 12,15	—
417	8 14 11 <sup>1)</sup>	329 112	"	"	64	—	+ 1 32,4
418	9 17 48	334 035	Kremsmünster	Schwab	64	+ 2 13,64	+ 1 34,0
419	9 27 16	334 476	Vienne	Palisa	64	+ 2 13,35	+ 1 32,3
420	9 1 52	345 128	Genève	Kammermann	64	+ 2 14,26	+ 1 34,0
420a	8 53 25,8 <sup>1)</sup>	356 361	Oxford		65a	— 0 4,87	— 1 56,4
421	9 33 47	371 100	Lyon	Le Cadet	64	+ 2 16,18	+ 1 34,4
422	9 27 41	380 150	Greenwich	Crommelin	64	+ 2 14,93	+ 1 25,9
423	7 9 14	502 109	Charlottesville	Lovett	66	— 0 35,70	—
424	7 38 17	522 280	"	"	66	—	+ 0 39,4
425	8 0 54	537 984	"	"	66	— 0 32,68	—
426	8 24 16	554 210	"	"	66	—	+ 0 39,6
427	8 53 2	574 185	"	"	66	— 0 30,03	—
428	9 19 27	583 588	Haverford	Jones	64	+ 2 33,43	+ 1 36,5
429	9 16 39	590 584	Charlottesville	Lovett	66	—	+ 0 39,7
430	11 7 59	647 358	Harvard Coll.	Wendell	64	+ 2 38,60	+ 1 39,7
431	5 23 32	21,182 823	Hambourg	Schorr	69	— 1 54,54	+ 3 40,3
432	8 26 19	201 014	Kazan	Trocki	66	+ 0 21,22	+ 0 48,1
433	6 53 7	232 666	Prague	Láska	67	— 0 34,45	— 10 17,3
434	8 53 40	272 202	Poulkova	Renz	66	+ 0 26,78	+ 0 45,4
435	7 48 55,4	281 695	Christiania	Schroeter	69	— 1 46,10	+ 3 42,8
436	10 41 40	294 999	Kazan	Gratschew	64	+ 3 31,51	—
437	8 38 25	312 878	Padoue	Abetti	62	+ 4 49,12	— 13 41,9
438	8 38 25	312 878	"	"	64	+ 3 33,62	+ 1 34,1
439	6 45 52	472 533	Albany	Lay	64	+ 3 45,82	+ 1 51,2
440	6 35 38	478 687	Charlottesville	Lovett	66	+ 0 43,84	+ 0 53,5
441	7 20 53	510 108	"	"	66	+ 0 46,28	+ 0 53,9
442	7 54 15	533 277	"	"	66	+ 0 48,14	+ 0 54,8
443	8 19 20 <sup>2)</sup>	546 608	Boston	Coit	69	— 1 25,03	+ 3 44,7
444	9 20 35	580 593	Columbia Coll.	Jacoby	68	— 1 0,87	+ 21 41,1
445	9 36 55	591 935	"	Monell	68	— 1 0,63	+ 21 40,1
446	10 24 20	616 959	Harvard Coll.	Wendell	69	— 1 19,21	+ 3 50,2

<sup>1)</sup> Temps moyen de Greenwich.<sup>2)</sup> Temps moyen de Washington.

N.	Réd. au jour.		Parallaxe.		Position géocentrique.		O — C	
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
	s	"	s	"	h m s	° ' "	s	"
402	— 0,87	+ 8,2	+ ,16	+ 1,3	1 25 40,55	+ 33 38 56,3	— 0,59	+ 0,1
403	— 0,87	—	+ ,08	—	25 52,00	—	— 0,81	—
404	—	+ 8,2	—	+ 0,5	—	38 58,6	—	+ 1,7
405	— 0,87	+ 8,2	+ ,06	+ 0,6	25 54,12	38 56,7	— 0,30	— 0,2
406	— 0,87	—	+ ,12	—	25 55,27	—	— 0,40	—
407	—	+ 8,2	—	+ 0,6	—	38 58,8	—	+ 1,8
408	— 0,87	+ 8,2	+ ,19	+ 1,4	26 0,25	38 57,8	— 0,81	+ 0,5
409	— 0,87	+ 8,2	+ ,19	+ 1,4	26 0,80	38 55,3	— 0,78	— 2,0
410	— 0,88	+ 8,2	+ ,08	+ 1,5	26 46,51	39 3,3	— 0,55	+ 2,1
410a	—	—	,00	+ 1,1	26 51,26	39 5,0	— 0,06	+ 3,3
411	— 0,88	+ 8,2	+ ,06	+ 1,0	26 52,17	39 0,6	— 0,64	— 1,2
412	— 0,83	+ 8,2	+ ,13	+ 1,4	26 57,30	39 8,0	— 0,61	+ 5,6
413	— 0,89	+ 8,2	+ ,14	+ 1,1	26 58,63	38 58,6	+ 0,01	— 3,9
414	— 0,88	+ 8,2	+ ,14	+ 1,1	26 58,45	38 58,1	— 0,17	— 4,4
415	— 0,88	+ 8,2	+ ,14	+ 1,1	26 58,57	38 59,5	— 0,05	— 3,0
416	— 0,88	—	+ ,10	—	26 59,51	—	— 0,46	—
417	—	+ 8,2	—	+ 1,4	—	38 59,8	—	— 2,9
418	— 0,88	+ 8,2	+ ,17	+ 1,5	27 1,07	39 1,5	— 0,13	— 1,3
419	— 0,88	+ 8,2	+ ,17	+ 1,6	27 0,78	38 59,9	— 0,46	— 2,9
420	— 0,88	+ 8,2	+ ,16	+ 1,4	27 1,68	39 1,4	— 0,42	— 1,5
420a	— 0,87	+ 8,3	+ ,14	+ 1,6	27 2,31	39 7,5	— 0,69	+ 4,5
421	— 0,88	+ 8,2	+ ,18	+ 1,5	27 3,62	39 1,9	— 0,58	— 1,3
422	— 0,88	+ 8,2	+ ,16	+ 1,7	27 2,35	38 53,6	— 2,58	— 9,6
423	— 0,86	—	+ ,09	—	27 14,07	—	— 0,73	—
424	—	+ 8,3	—	+ 0,5	—	39 5,5	—	+ 0,8
425	— 0,86	—	+ ,14	—	27 17,14	—	— 0,57	—
426	—	+ 8,3	—	+ 0,7	—	39 5,9	—	+ 0,8
427	— 0,86	—	+ ,18	—	27 19,83	—	— 0,81	—
428	— 0,89	+ 8,2	+ ,19	+ 1,1	27 20,87	39 3,6	— 0,53	— 1,8
429	—	+ 8,3	—	+ 1,0	—	39 6,3	—	+ 0,8
430	— 0,89	+ 8,2	+ ,21	+ 1,9	27 26,06	39 7,6	— 0,51	+ 1,5
431	— 0,86	+ 8,3	+ ,00	+ 1,2	28 9,53	39 11,1	— 0,57	— 2,2
432	— 0,86	+ 8,3	+ ,12	+ 1,7	28 11,02	39 15,4	— 0,58	+ 1,9
433	— 0,87	+ 8,3	+ ,07	+ 1,1	28 14,64	39 14,5	+ 0,46	+ 0,5
434	— 0,86	+ 8,3	+ ,12	+ 2,0	28 16,58	39 13,0	— 0,82	— 1,6
435	— 0,86	+ 8,3	+ ,09	+ 1,8	28 18,06	39 14,2	— 0,12	— 0,6
436	— 0,90	—	+ ,16	—	28 18,91	—	— 0,35	—
437	— 0,91	+ 8,1	+ ,15	+ 1,7	28 21,12	38 57,9	+ 0,40	— 17,4
438	— 0,90	+ 8,1	+ ,15	+ 1,7	28 21,01	39 1,7	+ 0,29	— 13,6
439	— 0,90	+ 8,1	+ ,08	+ 0,7	28 33,14	39 17,8	— 0,62	0,0
440	— 0,88	+ 8,2	+ ,07	+ 0,3	28 33,57	39 19,3	— 0,70	+ 1,3
441	— 0,88	+ 8,2	+ ,11	+ 0,5	28 36,05	39 19,9	— 0,79	+ 1,4
442	— 0,88	+ 8,2	+ ,14	+ 0,6	28 37,94	39 20,9	— 0,79	+ 2,0
443	— 0,86	+ 8,3	+ ,16	+ 1,1	28 39,20	39 15,4	— 0,62	— 3,7
444	— 0,86	+ 8,2	+ ,19	+ 1,2	28 42,97	39 20,8	+ 0,37	+ 1,1
445	— 0,86	+ 8,2	+ ,20	+ 1,3	28 43,22	39 19,9	— 0,31	0,0
446	— 0,86	+ 8,3	+ ,21	+ 1,9	28 45,07	39 21,7	— 0,51	+ 1,4


N <sup>o</sup> .	Temps local.	TM. Gr. corr.	Lieu.	Observateur.	*	 — *	
						$\alpha$	$\delta$
	h m s	1893 janv.				m s	" "
446a	6 24 45	22,218 006	Copenhague	Pechüle	64	+ 4 46,68	+ 2 2,6
447	8 59 56	224 267	Kazan	Gratschew	66	+ 1 45,25	+ 1 6,8
448	9 27 56	243 709	"	"	69	— 0 27,64	+ 3 53,4
449	10 0 44	266 485	"	Trocki	69	— 0 25,64	+ 3 57,0
450	7 43 41,6	277 974	Christiania	Schroeter	69	— 0 24,29	+ 4 0,8
451	8 55 4	322 654	Coll. Romano	Millosevich	69	— 0 21,52	+ 4 4,6
452	8 40 25	23,262 821	Poulkova	Renz	71	— 2 22,52	— 0 39,5
453	8 29 20	299 296	Prague	Láska	69	+ 1 0,48	— —
454	8 26 11	309 472	Hambourg	Schorr	69	+ 1 0,47	+ 4 23,9
455	9 10 19	334 848	Padoue	Abetti	69	+ 1 2,97	+ 4 22,0
456	9 10 19	334 848	"	"	70	+ 0 24,30	— 8 30,9
457	10 37 52	390 482	Dresde	v. Engelhardt	69	+ 1 7,44	+ 4 29,3
458	11 23 10	403 142	Koenigsberg	Cohn	71	— 2 11,13	— 0 31,5
459	11 24 17	420 778	Prague	Láska	69	+ 1 10,01	+ 4 31,1
460	6 26 0	471 818	Charlottesville	Lovett	69	+ 1 13,13	+ 4 33,7
461	6 32 0	501 410	Evanston	Hough	69	+ 1 16,62	— —
462	6 40 36	507 382	"	"	69	— —	+ 4 32,1
463	6 59 40	24,140 575	Kazan	Gratschew	71	— 1 9,29	— 0 8,5
464	8 49 23	320 222	Padoue	Abetti	69	+ 2 24,54	+ 4 49,0
465	8 49 23	320 222	"	"	70	+ 1 46,18	— 8 0,3
465a	6 24 32	25,217 584	Copenhague	Pechüle	71	+ 0 20,79	+ 0 24,8
466	7 48 51	226 833	Poulkova	Renz	71	+ 0 22,26	+ 0 23,0
467	9 28 56	244 132	Kazan	Trocki	72	— 0 29,02	— 7 3,5
468	10 43 23	295 829	"	Gratschew	73	— 1 23,89	+ 5 16,0
469	9 48 53	381 136	Lyon	Le Cadet	72	— 0 17,70	— 6 55,1
470	7 35 16	519 733	Charlottesville	Lovett	72	— 0 5,92	— 6 55,9
471	8 11 13 <sup>1)</sup>	540 610	Boston	Coit	72	— 0 2,36	— —
472	8 37 40	550 431	Columbia Coll.	Jacoby	72	— 0 3,01	— 6 38,9
473	8 48 55	561 936	Haverford	Collins	72	— 0 2,34	— 6 46,0
474	8 18 12	26,194 926	Kazan	Trocki	72	+ 0 51,21	— 6 20,7
475	7 42 11	222 112	Poulkova	Renz	71	+ 1 46,84	+ 1 4,9
476	8 35 20	310 284	Padoue	Abetti	72	+ 1 2,16	— 6 20,9
476a	8 45 57	315 690	Copenhague	Pechüle	71	+ 1 54,17	+ 1 13,7
477	7 25 24	512 792	Charlottesville	Lovett	72	+ 1 18,39	— 6 13,3
478	7 13 53	530 222	Evanston	Hough	72	+ 1 20,33	— —
479	7 24 0	537 246	"	"	72	— —	— 6 10,7
480	9 54 20	646 445	Madison	Flint	74	— 0 23,16	— 0 52,0
481	8 10 36	27,241 753	Poulkova	Renz	74	+ 0 28,01	— 0 29,4
482	6 19 29	248 833	Greenwich	Lewis	74	+ 0 29,42	— 0 27,3
483	6 28 27	255 059	"	Crommelin	74	+ 0 30,08	— 0 27,2
484	6 33 2	258 242	"	Bryant	74	+ 0 28,64	— 0 39,0
485	6 37 5 <sup>2)</sup>	261 054	Liverpool	Plummer	72	+ 2 22,75	— 5 29,9
486	8 24 7,4	336 832	Bordeaux	Picart	72	+ 2 29,74	— 5 30,9
487	7 18 51	508 152	Charlottesville	Lovett	72	+ 2 43,65	— 5 18,9
488	8 52 33	28,333 449	Strasbourg	Kobold	75	— 2 55,74	— 3 28,2
489	6 58 40	29,241 193	Coll. Romano	Millosevich	75	— 1 35,56	— 2 34,9
490	9 24 21,4	30,378 385	Bordeaux	Rayet	76	— 1 28,45	+ 8 55,9

<sup>1)</sup> Temps moyen de Washington.<sup>2)</sup> Temps moyen de Greenwich.

N <sup>o</sup> .	Réd. au jour.		Parallaxe.		Position géocentrique.		O — C	
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
	s	"	s	"	h m s	° ' "	s	"
446a	— 0,91	+ 8,0	+ ,04	+ 1,4	1 29 33,95	+ 33 39 29,8	— 0,97	— 2,2
447	— 0,89	+ 8,2	+ ,13	+ 1,3	29 35,03	39 34,1	— 0,40	+ 2,0
448	— 0,87	+ 8,2	+ ,14	+ 1,9	29 36,56	39 24,8	— 0,47	— 7,7
449	— 0,87	+ 8,2	+ ,15	+ 2,1	29 38,57	39 28,6	— 0,34	— 4,4
450	— 0,87	+ 8,2	+ ,08	+ 1,8	29 39,85	39 32,1	0,00	— 1,1
451	— 0,88	+ 8,2	+ ,17	+ 1,1	29 42,70	39 35,2	— 0,83	+ 1,0
452	— 0,87	+ 8,3	+ ,11	+ 1,9	31 0,76	39 57,8	— 0,57	+ 0,5
453	— 0,89	—	+ ,14	—	31 4,66	—	+ 0,30	—
454	— 0,89	+ 8,2	+ ,12	+ 1,6	31 4,63	39 55,0	— 0,57	— 3,6
455	— 0,89	+ 8,2	+ ,17	+ 1,4	31 7,18	39 52,9	— 0,13	— 6,4
456	— 0,89	+ 8,3	+ ,17	+ 1,4	31 7,07	39 52,9	— 0,24	— 6,4
457	— 0,89	+ 8,2	+ ,18	+ 2,1	31 11,66	40 0,9	— 0,28	+ 0,1
458	— 0,87	+ 8,3	+ ,16	+ 2,4	31 12,20	40 6,3	— 0,79	+ 5,1
459	— 0,89	+ 8,2	+ ,18	+ 2,3	31 14,23	40 2,9	— 0,23	+ 1,2
460	— 0,89	+ 8,2	+ ,07	+ 0,3	31 17,24	40 3,5	— 1,47	+ 0,4
461	— 0,89	—	+ ,07	—	31 20,73	—	— 0,44	—
462	—	+ 8,1	—	+ 0,6	—	40 2,1	—	— 2,0
463	— 0,88	+ 8,3	+ ,07	+ 1,4	32 13,94	40 28,3	— 0,56	+ 5,9
464	— 0,91	+ 8,1	+ ,16	+ 1,2	32 28,72	40 19,6	— 0,88	— 9,8
465	— 0,91	+ 8,2	+ ,16	+ 1,2	32 28,92	40 23,2	— 0,68	— 6,2
465a	— 0,90	+ 8,2	+ ,05	+ 1,4	33 43,98	41 1,5	— 1,16	— 1,2 <sup>1)</sup>
466	— 0,90	+ 8,2	+ ,09	+ 1,8	33 45,49	41 0,1	— 0,43	— 1,9
467	— 0,90	+ 8,3	+ ,14	+ 1,9	33 46,99	41 1,4	— 0,40	— 1,3
468	— 0,89	+ 8,2	+ ,16	+ 2,3	33 51,47	40 58,1	— 0,29	— 6,6
469	— 0,90	+ 8,2	+ ,18	+ 1,6	33 58,35	41 9,4	— 0,62	+ 1,4
470	— 0,90	+ 8,2	+ ,13	+ 0,5	34 10,08	41 7,5	— 0,63	— 6,1
471	— 0,90	—	+ ,16	—	34 13,67	—	+ 1,19	—
472	— 0,90	+ 8,2	+ ,17	+ 1,0	34 13,03	41 25,0	— 0,15	+ 10,2
473	— 0,90	+ 8,2	+ ,18	+ 1,0	34 13,71	41 17,9	— 0,57	+ 2,6
474	— 0,92	+ 8,2	+ ,12	+ 1,6	35 7,18	41 43,8	— 0,89	+ 1,9
475	— 0,92	+ 8,1	+ ,09	+ 1,7	35 10,05	41 41,8	— 0,33	— 1,3
476	— 0,92	+ 8,2	+ ,15	+ 1,2	35 18,16	41 43,2	+ 0,26	— 3,8
476a	— 0,92	+ 8,1	+ ,13	+ 1,7	35 17,42	41 50,6	— 1,00	+ 3,3
477	— 0,92	+ 8,2	+ ,12	+ 0,5	35 34,36	41 50,1	— 0,82	— 6,0
478	— 0,92	—	+ ,11	—	35 36,29	—	— 0,38	—
479	—	+ 8,2	—	+ 0,7	—	41 52,9	—	— 4,3
480	— 0,90	+ 8,2	+ ,19	+ 1,5	35 46,15	42 13,0	+ 0,80	+ 11,8
481	— 0,91	+ 8,1	+ ,10	+ 1,8	36 37,22	42 25,8	— 0,40	— 5,0
482	— 0,91	+ 8,1	+ ,05	+ 1,1	36 38,58	42 27,2	+ 0,35	— 3,9
483	— 0,91	+ 8,1	+ ,06	+ 1,1	36 39,25	42 27,3	+ 0,49	— 4,1
484	— 0,91	+ 8,1	+ ,06	+ 1,1	36 37,81	42 15,5	— 1,22	— 16,1
485	— 0,93	+ 8,1	+ ,05	+ 1,2	36 38,64	42 34,1	— 0,64	+ 2,4
486	— 0,93	+ 8,1	+ ,15	+ 1,2	36 45,73	42 33,1	— 0,06	— 2,4
487	— 0,93	+ 8,1	+ ,12	+ 0,5	36 59,61	42 44,4	— 0,91	+ 0,3
488	— 0,90	+ 8,3	+ ,15	+ 1,4	38 11,10	43 28,8	— 0,69	+ 1,0
489	— 0,91	+ 8,2	+ ,10	+ 0,7	39 31,22	44 21,3	+ 0,53	+ 1,3
490	— 0,92	+ 8,1	+ ,18	+ 1,5	41 9,89	45 39,0	— 0,40	+ 7,9

<sup>1)</sup> Erreur de 1"; lisez — 0"2.



N <sup>o</sup> .	Temps local.	TM.Gr. corr.	Lieu.	Observateur.	*	 — *	
						$\alpha$	$\delta$
	h m s	1893 janv.				m s	" "
491	7 7 35	30,525 483	Evanston	Hough	75	+ 0 16,08	— 1 15,2
492	7 4 58	538 869	Northfield	Wilson	75	+ 0 18,12	— 1 17,8
1893 FÉVR.							
493	9 6 20,7	1,365 696	Bordeaux	Rayet	75	+ 2 58,80	+ 0 55,8
494	8 32 43,0	2,342 253	"	"	76	+ 2 54,75	+ 12 27,9
495	7 29 59	3,240 221	Koenigsberg	Cohn	79	— 0 51,34	+ 0 19,2
495 <sup>a</sup>	7 53 30	278 541	Copenhague	Pechüle	79	— 0 48,63	+ 0 19,8
496	9 9 0	348 811	Genève	Kammermann	79	— 0 41,24	+ 0 29,0
497	8 11 37	531 290	Poughkeepsie	Miss Whitney	78	— 0 6,23	— 7 39,6
498	9 16 5	619 156	Madison	Flint	77	+ 1 41,06	+ 1 35,8
499	6 54 52	4,240 426	Munich	Oertel	79	+ 0 39,04	+ 2 0,9
500	6 54 52	240 426	"	"	84	— 4 19,26	+ 2 43,4
501	7 59 1	271 836	Vienne	Palisa	80	+ 0 2,98	— 0 20,9
502	7 9 34	282 882	Greenwich	Bryant	78	+ 0 58,91	— 6 12,2
503	7 53 25	285 628	Hambourg	Schorr	79	+ 0 44,24	+ 1 44,1
504	8 53 3	297 810	Koenigsberg	Cohn	79	+ 0 44,06	+ 1 41,2
505	8 19 52	310 116	Strasbourg	Kobold	84	— 4 12,74	+ 2 29,0
506	8 36 20	343 131	Greenwich	Crommelin	78	+ 1 8,39	— 6 38,2
507	8 43 11,0	349 339	Bordeaux	Rayet	78	+ 1 8,11	— 6 23,6
508	6 51 12	475 360	Poughkeepsie	Miss Whitney	78	+ 1 18,00	— 5 39,9
509	7 25 56	552 971	Northfield	Wilson	78	+ 1 25,90	— 6 12,4
510	8 42 9	556 327	Haverford	Jones	78	+ 1 25,46	— 6 49,0
511	6 52 14	5,238 507	Munich	Oertel	84	— 2 48,47	+ 3 52,1
512	7 5 58	248 043	"	"	81	— 0 21,51	+ 1 10,9
513	9 2 45	277 147	Poulkova	Renz	81	— 0 18,34	+ 1 11,3
514	7 51 36	290 398	Strasbourg	Kobold	84	— 2 43,35	+ 4 0,8
515	7 22 18 <sup>1)</sup>	291 633	Liverpool	Plummer	84	— 2 45,06	+ 3 57,8
516	8 48 21	316 718	Coll. Romano	Millosevich	84	— 2 40,35	+ 4 11,7
517	8 34 13	341 671	Greenwich	Bryant	81	— 0 12,40	+ 1 31,0
518	8 49 7	351 917	"	"	78	+ 2 36,89	— 4 51,4
519	9 42 12	388 777	"	Crommelin	84	— 2 33,20	+ 3 24,1
520	6 53 30	6,239 295	Munich	Oertel	82	+ 0 30,10	— 0 3,4
521	7 7 20	253 446	Hambourg	Schorr	84	— 1 14,33	+ 5 23,9
522	6 42 56	264 206	Greenwich	Bryant	84	— 1 16,31	+ 5 48,2
523	7 14 24	286 056	"	Hudson	84	— 1 12,45	+ 5 41,7
524	8 1 30	297 181	Strasbourg	Kobold	86	— 3 34,19	— 6 38,1
525	8 20 24	298 913	Padoue	Abetti	83	— 0 54,07	— 8 36,6
526	8 20 24	298 913	"	"	84	— 1 10,75	+ 5 34,3
527	8 24 46	319 932	Marseille	Coggia	84	— 1 8,24	+ 5 32,8
528	9 2 57	344 337	Genève	Kammermann	84	— 1 6,46	+ 5 43,5
529	10 14 29	388 818	Lyon	Le Cadet	84	— 1 1,28	+ 5 49,5
530	6 41 33	7,228 487	Coll. Romano	Millosevich	84	+ 0 15,89	+ 7 9,0
531	8 12 19	326 181	Greenwich	Hollis	84	+ 0 24,96	+ 7 26,7
532	8 37 35	592 058	Madison	Flint	85	+ 0 29,32	— 3 50,5
533	7 6 17	8,280 237	Greenwich	Bryant	86	— 0 31,59	— 2 56,6
534	7 24 9	292 644	"	"	84	+ 1 53,40	+ 9 29,9

<sup>1)</sup> Temps moyen de Greenwich.

N.	Réd. au jour.		Parallaxe.		Position géocentrique.		O — C	
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
491	— 0,93	+ 8,1	+ ,09	+ 0,7	1 41 22,83	+ 33 45 40,9	— 0,40	+ 0,1
492	— 0,93	+ 8,1	+ ,10	+ 0,8	41 24,88	45 38,4	+ 0,47	— 3,2
493	— 0,96	+ 8,0	+ ,14	+ 1,7	1 44 5,57	+ 33 47 52,8	— 0,71	+ 2,5
494	— 0,97	+ 7,9	+ ,16	+ 1,2	45 33,02	49 10,5	— 0,63	+ 5,1
495	— 0,95	+ 8,1	+ ,10	+ 1,4	46 53,65	50 21,0	— 0,84	+ 2,7
495 <sup>a</sup>	— 0,95	+ 8,1	+ ,11	+ 1,5	46 56,37	50 21,7	— 1,58	+ 0,2
496	— 0,95	+ 8,1	+ ,17	+ 1,4	47 3,82	50 30,8	— 0,48	+ 3,5
497	— 0,96	+ 8,1	+ ,15	+ 0,9	47 20,82	50 38,2	+ 0,03	— 4,4
498	— 0,97	+ 8,0	+ ,18	+ 1,4	47 27,88	50 38,9	— 0,86	— 11,2
499	— 0,97	+ 8,0	+ ,09	+ 1,0	48 24,00	52 2,2	— 1,09	+ 18,7
500	— 0,93	+ 8,2	+ ,09	+ 1,0	48 24,31	52 2,3	— 0,78	+ 18,8
501	— 0,96	+ 8,1	+ ,13	+ 1,2	48 27,12	51 44,7	— 0,82	— 1,6
502	— 0,97	+ 8,1	+ ,10	+ 1,2	48 25,89	52 5,9	— 3,06	+ 18,7
503	— 0,97	+ 8,0	+ ,11	+ 1,4	48 29,22	51 45,8	+ 0,02	— 1,7
504	— 0,97	+ 8,0	+ ,13	+ 1,7	48 29,06	51 43,2	— 1,24	— 5,4
505	— 0,93	+ 8,2	+ ,14	+ 1,3	48 30,88	51 48,2	— 0,54	— 1,4
506	— 0,97	+ 8,0	+ ,14	+ 1,5	48 35,41	51 40,1	+ 0,99	— 12,4
507	— 0,97	+ 8,0	+ ,16	+ 1,3	48 35,15	51 54,5	+ 0,15	+ 1,4
508	— 0,97	+ 8,0	+ ,10	+ 0,6	48 44,98	52 37,5	— 1,47	+ 33,1
509	— 0,98	+ 8,0	+ ,12	+ 0,9	48 52,89	52 5,3	— 0,63	— 5,7
510	— 0,98	+ 8,0	+ ,17	+ 1,0	48 52,50	51 28,8	— 1,32	— 42,5
511	— 0,95	+ 8,2	+ ,09	+ 1,0	49 55,08	53 11,0	— 0,99	— 1,8
512	— 0,97	+ 8,0	+ ,10	+ 1,0	49 55,95	53 8,2	— 0,99	— 5,5
513	— 0,97	+ 8,0	+ ,12	+ 2,0	49 59,14	53 9,6	— 0,47	— 6,8
514	— 0,95	+ 8,2	+ ,13	+ 1,2	50 0,24	53 19,9	— 0,58	+ 2,3
515	— 0,95	+ 8,2	+ ,09	+ 1,3	49 58,49	53 17,0	— 2,44	— 0,7
516	— 0,95	+ 8,2	+ ,17	+ 1,1	50 3,28	53 30,7	+ 0,05	+ 10,7
517	— 0,97	+ 8,0	+ ,14	+ 1,5	50 5,10	53 28,8	— 0,41	+ 6,5
518	— 0,99	+ 8,0	+ ,14	+ 1,6	50 3,89	53 27,0	— 2,56	+ 3,8
519	— 0,95	+ 8,1	+ ,16	+ 1,8	50 10,42	52 43,7	+ 0,60	— 42,9
520	— 0,98	+ 8,0	+ ,09	+ 1,0	51 27,86	54 37,0	— 0,01	— 9,6
521	— 0,96	+ 8,1	+ ,09	+ 1,3	51 29,21	54 43,0	+ 0,04	— 4,9
522	— 0,97	+ 8,1	+ ,08	+ 1,1	51 27,21	55 7,1	— 2,95	+ 18,1
523	— 0,97	+ 8,1	+ ,10	+ 1,2	51 31,09	55 0,7	— 1,08	+ 9,7
524	— 0,95	+ 8,2	+ ,13	+ 1,2	51 32,52	54 51,7	— 0,68	— 0,4
525	— 0,97	+ 8,1	+ ,15	+ 1,2	51 32,57	54 50,3	— 0,79	— 2,0
526	— 0,97	+ 8,1	+ ,15	+ 1,2	51 32,84	54 53,3	— 0,52	+ 1,0
527	— 0,97	+ 8,1	+ ,16	+ 1,1	51 35,36	54 51,7	+ 0,07	— 2,6
528	— 0,97	+ 8,1	+ ,16	+ 1,4	51 37,14	55 2,7	— 0,40	+ 6,1
529	— 0,97	+ 8,1	+ ,18	+ 1,8	51 42,34	55 9,1	+ 0,72	+ 8,2
530	— 0,98	+ 8,0	+ ,10	+ 0,6	52 59,42	56 27,3	+ 0,26	+ 4,1
531	— 0,98	+ 8,0	+ ,13	+ 1,4	53 8,52	56 45,8	+ 0,32	+ 12,9
532	— 0,99	+ 8,0	+ ,16	+ 1,1	53 32,24	56 58,0	— 0,60	— 1,6
533	— 0,98	+ 8,1	+ ,10	+ 1,2	54 35,06	58 33,1	— 1,74	+ 23,1
534	— 1,00	+ 7,9	+ ,11	+ 1,2	54 36,92	58 48,7	— 1,04	+ 37,3

N <sup>o</sup> .	Temps local.	TM.Gr. corr.	Lieu.	Observateur.	*	☾ — *	
						α	δ
	h m s	1893 févr.				m s	' "
535	10 32 22	8,339 101	Poulkova	Renz	86	— 0 24,74	— 3 19,8
536	7 45 7	512 434	Poughkeepsie	Miss Whitney	86	— 0 8,88	— 2 54,2
537	7 23 12	9,258 921	Padoue	Abetti	87	— 0 19,27	— 8 57,8
538	7 23 12	258 921	"	"	88	— 1 6,52	+ 8 35,0
539	7 41 29	10,304 498	Greenwich	Bryant	87	+ 1 17,80	— 7 7,5
540	9 7 57	331 566	Padoue	Abetti	87	+ 1 23,11	— 7 7,2
541	9 7 57	331 566	"	"	88	+ 0 35,96	+ 10 28,6
542	7 34 14	11,266 400	"	"	90	— 2 27,92	— 5 47,2
543	7 34 14	266 400	"	"	91	— 2 39,65	— 5 28,1
544	7 47 50	281 113	Hambourg	Schorr	90	— 2 26,39	— 5 42,2
545	8 39 11	592 805	Madison	Flint	89	— 0 43,93	— 1 0,6
546	10 17 15	660 900	"	"	89	— 0 37,09	— 0 59,2
547	8 5 19,1	12,291 079	Christiania	Schroeter	89	—	+ 0 24,3
548	8 19 43,4	301 082	"	"	89	+ 0 25,32	—
549	8 30 59	13,293 213	Vienne	Palisa	91	+ 0 32,64	— 1 28,0
550	9 56 45	381 057	Genève	Kammermann	90	+ 0 54,60	— 1 53,8
551	9 42 26	606 306	Charlottesville	Stone	91	+ 1 2,70	— 0 52,1
552	8 52 51	14,269 453	Poulkova	Renz	93	+ 0 8,78	+ 3 11,2
553	8 35 27,0	343 058	Bordeaux	Picart	91	+ 2 13,26	+ 0 43,9
554	9 10 45	349 024	Genève	Kammermann	91	+ 2 12,81	+ 0 35,5
555	8 47 14	349 789	Greenwich	Hudson	92	+ 0 40,20	— 9 18,4
556	8 20 34	589 996	Northfield	Wilson	90	+ 2 50,22	+ 0 49,4
557	8 20 34	589 996	"	"	91	+ 2 38,51	+ 1 8,8
557a	8 15 18	15,292 586	Copenhague	Pechüle	93a	— 0 32,81	—
557b	8 32 30	304 530	"	"	93a	—	+ 4 15,7
558	8 35 11 <sup>1)</sup>	341 330	Liverpool	Plummer	95	— 1 54,81	+ 4 21,6
559	9 4 37	344 674	Genève	Kammermann	95	— 1 53,66	+ 4 29,5
560	10 16 15	389 929	Strasbourg	Kobold	95	— 1 49,35	+ 4 29,4
561	9 50 59	393 965	Greenwich	Hollis	95	— 1 48,60	+ 4 4,3
562	10 3 44	402 818	"	"	94	— 1 43,34	+ 9 53,8
563	6 53 0	16,242 584	Hambourg	Schorr	95	— 0 25,71	+ 6 25,1
564	6 59 23	274 718	Greenwich	Bryant	95	— 0 23,93	+ 6 17,0
565	7 5 18	278 826	"	"	96	— 0 43,27	— 11 2,6
566	8 50 20	330 180	Strasbourg	Kobold	95	— 0 17,85	+ 6 32,2
567	8 37 23 <sup>1)</sup>	342 768	Liverpool	Plummer	95	— 0 18,76	+ 6 25,9
568	8 37 23 <sup>1)</sup>	342 768	"	"	94	— 0 12,82	+ 12 45,0
569	6 52 45	528 837	Northfield	Wilson	95	+ 0 2,20	+ 6 57,9
570	8 10 12	529 124	Poughkeepsie	Miss Whitney	95	— 0 1,30	+ 7 18,9
571	8 56 20	604 259	Madison	Flint	95	+ 0 8,50	+ 7 11,1
572	7 5 28	17,265 565	Lyon	Le Cadet	97	+ 0 17,21	— 10 11,0
573	8 15 13	281 902	Vienne	Palisa	92	+ 5 21,47	— 2 34,0
574	8 26 20	317 910	Genève	Kammermann	98	— 1 7,14	+ 2 42,7
575	7 6 55	18,266 482	Lyon	Le Cadet	99	— 0 1,15	— 3 14,2
576	9 7 43	346 555	Genève	Kammermann	99	+ 0 6,54	— 2 27,5
577	8 59 13,3	359 202	Bordeaux	Rayer	96	+ 2 41,37	— 6 21,6

<sup>1)</sup> Temps moyen de Greenwich.

N.	Réd. au jour.		Parallaxe.		Position géocentrique.		O — C	
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
	s	"	s	"	h m s	° ' "	s	"
535	— 0,99	+ 8,1	+ ,13	+ 2,3	1 54 41,93	+ 33 58 11,0	— 0,36	— 5,2
536	— 0,99	+ 8,0	+ ,14	+ 0,8	54 57,80	58 35,0	— 0,64	+ 0,8
537	— 0,99	+ 8,1	+ ,12	+ 0,9	56 7,38	59 52,8	— 0,82	— 0,5
538	— 0,98	+ 8,0	+ ,12	+ 0,9	56 7,22	59 55,6	— 0,98	+ 2,3
539	— 1,01	+ 8,0	+ ,12	+ 1,3	57 44,43	+ 34 1 43,4	— 1,98	— 4,1
540	— 1,01	+ 8,0	+ ,17	+ 1,4	57 49,79	1 43,8	+ 0,83	— 6,8
541	— 1,00	+ 7,9	+ ,17	+ 1,4	57 49,73	1 49,6	+ 0,77	— 1,0
542	— 0,99	+ 8,1	+ ,13	+ 1,0	59 17,20	3 34,5	— 0,06	— 1,6
543	— 0,99	+ 8,1	+ ,13	+ 1,0	59 16,99	3 36,1	— 0,27	0,0
544	— 0,99	+ 8,1	+ ,11	+ 1,4	59 18,71	3 39,9	+ 0,05	+ 2,1
545	— 1,00	+ 8,0	+ ,16	+ 1,2	59 47,01	4 13,5	— 1,19	— 0,1
546	— 1,00	+ 8,0	+ ,19	+ 1,7	59 53,88	4 15,4	— 0,78	— 6,1
547	— —	+ 8,0	— —	+ 2,3	— —	5 39,5	— —	+ 4,3
548	— 1,01	— —	+ ,13	— —	59 56,22	— —	+ 0,70	— —
549	— 1,02	+ 8,0	+ ,15	+ 1,4	2 2 29,27	7 36,5	— 0,97	+ 1,3
550	— 1,03	+ 7,9	+ ,17	+ 1,7	2 39,72	7 28,4	+ 1,07	— 17,5
551	— 1,03	+ 7,9	+ ,20	+ 1,3	2 59,37	8 12,2	— 0,87	— 1,2
552	— 1,02	+ 7,9	+ ,12	+ 1,9	4 3,55	9 30,7	— 0,37	— 4,5
553	— 1,04	+ 7,8	+ ,16	+ 1,3	4 9,88	9 48,1	— 1,13	+ 3,7
554	— 1,04	+ 7,8	+ ,17	+ 1,5	4 9,44	9 39,9	— 2,14	— 5,3
555	— 1,04	+ 8,0	+ ,14	+ 1,6	4 14,36	9 18,3	+ 2,70	— 27,0
556	— 1,05	+ 7,8	+ ,15	+ 1,2	4 35,30	10 11,0	+ 0,51	— 4,3
557	— 1,04	+ 7,8	+ ,15	+ 1,2	4 35,12	10 12,9	+ 0,33	— 2,4
557 <sup>a</sup>	— 1,02	— —	+ ,12	— —	5 41,00	— —	— 1,60	— —
557 <sup>b</sup>	— —	+ 8,1	— —	+ 1,7	— —	11 56,2	— —	+ 10,5
558	— 1,02	+ 8,0	+ ,13	+ 1,5	5 45,79	11 47,4	— 1,53	— 3,0
559	— 1,02	+ 8,0	+ ,17	+ 1,5	5 46,98	11 55,3	— 0,66	+ 4,4
560	— 1,02	+ 8,0	+ ,17	+ 1,9	5 51,29	11 55,6	— 0,73	— 1,1
561	— 1,02	+ 8,0	+ ,15	+ 1,9	5 52,02	11 30,2	— 0,39	— 27,0
562	— 1,02	+ 8,0	+ ,16	+ 1,9	5 52,72	10 55,3	— 0,54	— 63,0
563	— 1,03	+ 7,9	+ ,09	+ 1,2	7 14,84	13 50,5	+ 0,17	+ 1,6
564	— 1,03	+ 7,9	+ ,10	+ 1,2	7 16,63	13 42,4	— 1,16	— 8,6
565	— 1,04	+ 8,0	+ ,10	+ 1,2	7 15,99	13 36,7	— 2,20	— 14,9
566	— 1,03	+ 7,9	+ ,15	+ 1,5	7 22,76	13 57,9	— 0,42	— 0,4
567	— 1,03	+ 7,9	+ ,13	+ 1,5	7 21,83	13 51,6	— 2,58	— 8,4
568	— 1,04	+ 8,0	+ ,13	+ 1,5	7 23,19	13 44,1	— 1,22	— 15,9
569	— 1,04	+ 7,9	+ ,11	+ 0,8	7 42,76	14 22,9	+ 0,26	— 1,4
570	— 1,04	+ 7,9	+ ,14	+ 0,8	7 39,29	14 43,9	— 3,23	+ 19,5
571	— 1,04	+ 7,9	+ ,17	+ 1,3	7 49,12	14 36,6	— 0,72	+ 2,3
572	— 1,05	+ 8,0	+ ,12	+ 0,9	8 54,17	16 3,5	— 0,11	+ 1,6
573	— 1,04	+ 8,0	+ ,14	+ 1,3	8 55,63	16 2,4	— 0,25	— 1,7
574	— 1,03	+ 8,0	+ ,15	+ 1,3	8 58,68	16 17,5	— 0,71	+ 8,6
575	— 1,05	+ 7,9	+ ,12	+ 0,9	10 31,79	18 20,9	— 0,42	+ 4,0
576	— 1,05	+ 7,9	+ ,16	+ 1,5	10 39,52	19 8,2	— 0,54	+ 40,4
577	— 1,07	+ 7,8	+ ,17	+ 1,4	10 40,67	18 17,7	— 0,63	— 11,8



N <sup>o</sup> .	Temps local.	TM. Gr. corr.	Lieu.	Observateur.	★	☉ — ★	
						α	δ
	h m s	1893 MARS.				m s	' "
578	8 31 37	8,252 751	Poulkova	Renz	100	+ 0 29,92	— 1 45,5
579	8 47 37	9,326 431	Strasbourg	Kobold	101	+ 0 9,86	— 1 2,2
580	9 2 24	10,336 609	"	"	101	+ 1 56,11	+ 2 0,8
581	8 25 48	11,591 415	Northfield	Wilson	102	+ 0 28,14	+ 1 21,1
582	7 57 55	13,267 774	Vienne	Palisa	103	— 1 10,35	— 0 15,6

## § 21. Notes au tableau du § 20.

Les observateurs à *Greenwich* ont souvent fait usage d'une étoile de comparaison, dont j'ai déterminé la position la plus probable parce que d'autres astronomes avaient employé la même étoile. Dans ce cas les positions de la comète obtenues à *Greenwich* ont été réduites; elles serviront à justifier mon opinion peu favorable de ces mesures.

Dans les notes suivantes les numéros d'ordre se rapportent au tableau du § 20.

24. HAYN (*Leipzig*); AN. 3179, page 183: α app. de la comète doit être augmentée de 2<sup>s</sup>. La même remarque s'applique aux observations 33 et 50 du même astronome; il a probablement employé 0<sup>h</sup> 44<sup>m</sup> 3<sup>s</sup>.98 au lieu de 5<sup>s</sup>.98 pour l'asc. droite de son étoile n<sup>o</sup> 5.

60, 62, 80, 82, 91, 105 et 283. Sept observations de M. GUSTAV WITT à l'Observatoire de la Société *Urania* à *Berlin*; AN. 3192, p. 385. Il n'avait pas encore appliqué la réduction au jour.

123. M. GEORGE LE CADET (*Lyon*), AN. 3130. Dans AN. 3139 M. LE CADET donne une valeur corrigée de la décl. app. de la comète; Δδ était erronée, la vraie valeur (+ 5' 12".5) se trouve dans le *Bull. Astronomique*, tome X, p. 282.

196. M. MILTON UPDEGRAFF, Observatory of the State University at *Columbia*, Missouri; *Astron. Journ.* 283. J'ai changé le signe de ☉ — ★ en asc. droite; en lisant + 2<sup>m</sup> 47<sup>s</sup>.8 au lieu de — 2<sup>m</sup> 47<sup>s</sup>.8. Avec le signe négatif la relation ☉ = ★ + + (☉ — ★) n'était pas satisfaite.

280. M. COHN, *Koenigsberg*, AN. 3133. Erreur en δ; j'ai adopté ☉ — ★.

315. Observation de M. PLUMMER à *Liverpool* (Bidston, Birkenhead); *Monthly Notices* liii; avril 1893. Erreur de 10<sup>s</sup> dans la réduction de l'étoile de comp. (zone 324 de *Leyde*). La position

N.	Réd. au jour.		Parallaxe.		Position géocentrique.		O — C	
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
	s	"	s	"	h m s	° ' "	s	"
578	— 1,15	+ 7,8	+ ,11	+ 1,7	2 40 57,64	+ 35 4 47,1	— 1,43	+ 16,2
579	— 1,15	+ 7,8	+ ,15	+ 1,5	42 49,91	7 18,8	— 1,71	— 11,0
580	— 1,16	+ 7,7	+ ,15	+ 1,6	44 36,15	10 21,8	— 1,68	+ 2,9
581	— 1,16	+ 7,8	+ ,15	+ 1,3	46 48,29	13 41,4	— 1,90	— 8,4
582	— 1,16	+ 7,9	+ ,14	+ 1,3	49 46,25	18 35,3	— 1,47	+ 2,7

app. de la comète est d'accord avec l'éphéméride. M. PLUMMER a probablement soupçonné une erreur en  $\Delta\alpha$  et corrigé cette valeur de  $10^s$ ; j'ai adopté  $+ 4^m 6^s87$  au lieu de  $+ 4^m 16^s87$ .

316. Obs. de M. G. RAYET (*Bordeaux*); AN. 3144. La même erreur dans  $\alpha$  de l'étoile. J'ai adopté la valeur donnée de  $\oslash - *$ .

329. Obs. de M. W.-O. LAY, Dudley Observatory, *Albany* (E. U.); *Astron. Journal* 284. La diff.  $\oslash - *$  en asc. droite ne s'y trouve pas; je l'ai déduite des positions app. de la comète et de l'étoile.

347. Obs. de M. SCHORR (*Hambourg*); AN. 3215, p. 371. Erreur considérable dans la pos. app. de la comète. On a observé une étoile  $10^m5$ , qui se trouvait, au dire de M. SCHORR, dans le centre de la comète; 1895 juin 27 il m'écrivit, que la position n'avait pas été exactement centrale, en ajoutant: „das Wort „ziemlich“ ist leider aus irgend einem Versehen im Druck nicht aufgenommen worden.”

410a. Observation méridienne de *Cambridge* (Angl.), communiquée par M. GRAHAM. Observateur inconnu; M. GRAHAM m'écrivit: „the observation was made by a junior Assistant”. J'ai augmenté l'ascension droite de  $10^s$  et M. GRAHAM a vérifié ce changement. L'observation avait été faite à 7 fils; les passages n'étant pas d'accord, le calculateur avait diminué le dernier fil de  $10^s$  au lieu d'augmenter les autres de cette quantité.

499 et 500. Deux obs. de M. K. OERTEL (*Munich*); AN. 3155, p. 167. La comète présenta une concentration marquée de lumière, de l'éclat d'une étoile de la grandeur 9,8. Aux jours suivants, lorsque la comète n'était qu'une nébulosité extrêmement faible, M. OERTEL soupçonna une erreur, causée par une étoile fixe, sur laquelle la comète se fût probablement projetée. Au 6 févr. il trouva réellement au lieu critique une étoile de la  $10^me$  grandeur; une comparaison avec notre  $*$  79 donna

$$\alpha \text{ app.} = 1^h 48^m 24^s00 \quad \delta \text{ app.} = + 33^\circ 51' 58''1.$$

Les deux positions soi-disant de la comète ont été rejetées.

552. Obs. de M. F. RENZ (*Poulkova*); AN. 3238. Il donne pour la pos. app. de la comète

$$\alpha = 2^h 4^m 3^s 40 \quad \delta = + 34^\circ 9' 29'' 6$$

tandis que l'équation  $\infty \approx$  app. = \* + réd. + ( $\infty \approx$  — \*) me donne

$$\alpha = 2^h 4^m 3^s 41 \quad \delta = + 34^\circ 9' 28'' 6.$$

J'ai adopté les valeurs données de ( $\infty \approx$  — \*).

## § 22. Des écarts moyens.

En me servant de la méthode ordinairement suivie, j'aurais maintenant attribué aux observateurs des poids, plus ou moins arbitraires, d'après leur expérience dans cette catégorie d'observations, d'après la force de leurs instruments, et, autant que possible, d'après leurs remarques touchant l'état de l'atmosphère et de la comète. Cette méthode est sans doute la plus facile, mais il m'a semblé préférable de lui substituer une autre, qui exigera plus de travail, mais dont les résultats ne dépendront pas des préjugés inévitables du calculateur.

En voici le projet. Je diviserai les observations en lieux normaux *provisoires*, en formant les moyennes des écarts  $O-C$ ; guidé par ces moyennes je vais tracer deux courbes pour les erreurs en asc. droite et en déclinaison, et la lecture de ces courbes sera comparée avec les observations individuelles de chaque observateur. De cette manière on obtiendra non seulement son équation personnelle, mais aussi la valeur moyenne de ses erreurs accidentelles, dont il sera facile de déduire le poids de ses observations.

En formant les moyennes des écarts, je n'ai pu faire usage: 1° des observations de M. PECHÛLE à *Copenhague*, qui n'étaient pas encore publiées; 2° de celles de *Cambridge* (Angl.) et d'*Oxford*, que l'on ne m'a communiquées que plus tard; 3° de celles qui se rapportent aux étoiles désignées par *Leyde*(M). D'ailleurs j'ai cru devoir exclure: 1° les observations faites à *Greenwich* à cause de leurs erreurs énormes; 2° celles de M. TEBBUTT à *Windsor* (New South Wales), parce que la comète se montrait pour lui trop près de l'horizon; 3° toutes les observations, dont les écarts surpassent 25 en ascension droite, ou 40" en déclinaison; les deux différences ( $\infty \approx$  — \*) étant déterminées simultanément (micromètre circulaire, cross reticule) j'ai exclu les deux coordonnées, quand l'une d'entre elles était erronée. De cette manière j'ai obtenu les nombres, qui figurent dans le tableau suivant; la deuxième colonne donne les numéros des observations et dans la dernière se trouvent les nombres des écarts individuels, dont les moyennes en  $\alpha$  et en  $\delta$  ont été déduites.

Tableau des écarts moyens.

N <sup>o</sup> .	Observations.	Date moyenne.	$\Delta \alpha$	$\Delta \delta$	No. d'obs.
1	1 — 20	1892 nov. 9,19	— 0 <sup>s</sup> 248	+ 2 <sup>''</sup> 04	17 : 17
2	21 — 40	„ 11,00	+ 0,069	— 2,67	14 : 14
3	41 — 60	„ 11,96	— 0,310	+ 4,51	15 : 15
4	61 — 80	„ 13,24	+ 0,066	— 0,76	17 : 18
5	81 — 100	„ 13,88	— 0,049	— 3,19	13 : 12
6	101 — 120	„ 15,06	— 0,303	+ 0,89	13 : 13
7	121 — 140	„ 16,23	— 0,176	+ 2,73	17 : 16
8	141 — 160	„ 17,25	— 0,021	+ 0,06	15 : 14
9	161 — 180	„ 18,37	+ 0,138	+ 1,92	12 : 12
10	181 — 200	„ 19,46	— 0,351	— 3,06	14 : 14
11	201 — 220	„ 20,85	— 0,261	— 5,59	13 : 13
12	221 — 240	„ 21,63	— 0,409	— 3,22	12 : 12
13	241 — 260	„ 22,94	— 0,304	— 1,86	19 : 18
14	261 — 280	„ 24,68	— 0,039	+ 1,20	17 : 17
15	281 — 300	„ 28,56	— 0,017	— 6,95	17 : 15
16	301 — 320	1892 déc. 9,76	— 0,311	— 0,12	17 : 17
17	321 — 340	„ 15,89	— 0,259	— 2,12	18 : 18
18	341 — 350	„ 21,51	— 0,425	— 3,94	8 : 8
19	351 — 363	1893 janv. 10,09	— 0,555	— 5,70	11 : 11
20	364 — 383	1893 janv. 17,31	— 0,648	— 1,22	17 : 17
21	384 — 403	„ 18,80	— 0,565	— 0,59	19 : 18
22	404 — 423	„ 20,04	— 0,494	— 0,39	14 : 14
23	424 — 443	„ 21,07	— 0,474	— 0,90	16 : 16
24	444 — 463	„ 22,92	— 0,424	— 0,81	19 : 18
25	466 — 485	1893 janv. 26,05	— 0,269	— 0,40	16 : 15
26	486 — 498	„ 30,79	— 0,330	— 0,27	11 : 11
27	499 — 516	1893 févr. 4,48	— 0,834	+ 0,16	12 : 12
28	517 — 538	„ 7,09	— 0,263	— 0,39	12 : 12
29	539 — 559	„ 13,08	— 0,451	— 2,00	15 : 15
30	560 — 577	„ 17,00	— 0,450	+ 1,94	11 : 11
31	578 — 582	1893 mars 10,56	— 1,638	+ 0,48	5 : 5

Par deux traits horizontaux les observations, faites pendant la période de l'aspect stellaire de la comète ont été séparées des autres; les circonstances étant alors tout autres, il sera nécessaire de discuter ces observations séparément. Moyennant toutes les observations de cette période, on trouve :

$$1893 \text{ janv. } 20,02 : \Delta \alpha = - 0^{\text{s}}521 ; \Delta \delta = - 0^{\text{''}}71$$

En satisfaisant rigoureusement aux dernières différences, j'ai tracé deux courbes, qu'il sera superflu de reproduire; en voici les lectures pour minuit moyen de *Greenwich*.



## Lectures des Courbes

pour min. moy. Gr.

Date.	$\Delta \alpha$	$\Delta \delta$	Date.	$\Delta \alpha$	$\Delta \delta$	Date.	$\Delta \alpha$	$\Delta \delta$
nov. 8,5	— 0 <sup>s</sup> 15	— 0 <sup>''</sup> 2	déc. 13,5	— 0 <sup>s</sup> 34	— 1 <sup>''</sup> 8	janv. 17,5	— 0 <sup>s</sup> 52	— 0 <sup>''</sup> 9
9,5	— ,15	— ,2	14,5	— ,35	— 1,8	18,5	— ,,,	— ,9
10,5	— ,16	— ,3	15,5	— ,36	— 1,8	19,5	— ,,,	— ,8
11,5	— ,16	— ,4	16,5	— ,37	— 1,8	20,5	— ,,,	— ,7
12,5	— ,17	— ,5	17,5	— ,38	— 1,8	21,5	— ,,,	— ,6
13,5	— ,17	— ,6	18,5	— ,40	— 1,8	22,5	— ,,,	— ,6
14,5	— ,18	— ,6	19,5	— ,42	— 1,8	23,5	— ,,,	— ,5
15,5	— ,18	— ,7	20,5	— ,44	— 1,9	24,5	— ,,,	— ,5
16,5	— ,19	— ,7	21,5	— ,45	— 1,9	25,5	— ,,,	— ,4
17,5	— ,19	— ,8	22,5	— ,46	— 1,9	26,5	— ,,,	— ,3
18,5	— ,20	— ,8	23,5	— ,47	— 1,9	27,5	— ,,,	— ,3
19,5	— ,20	— ,9	24,5	— ,48	— 1,9	28,5	— ,,,	— ,2
20,5	— ,21	— ,9	25,5	— ,49	— 1,9	29,5	— ,,,	— ,2
21,5	— ,22	— 1,0	26,5	— ,50	— 1,9	30,5	— ,,,	— ,2
22,5	— ,22	— 1,0	27,5	— ,51	— 1,9	31,5	— ,,,	— ,2
23,5	— ,23	— 1,1	28,5	— ,51	— 1,9	févr. 1,5	— ,,,	— ,1
24,5	— ,23	— 1,1	29,5	— ,52	— 1,8	2,5	— ,,,	— ,1
25,5	— ,24	— 1,2	30,5	— ,,,	— 1,8	3,5	— ,,,	— ,1
26,5	— ,24	— 1,2	31,5	— ,,,	— 1,8	4,5	— ,,,	— ,1
27,5	— ,25	— 1,3	janv. 1,5	— ,,,	— 1,8	5,5	— ,,,	,0
28,5	— ,25	— 1,3	2,5	— ,,,	— 1,8	6,5	— ,,,	,0
29,5	— ,25	— 1,4	3,5	— ,,,	— 1,7	7,5	— ,,,	,0
30,5	— ,26	— 1,4	4,5	— ,,,	— 1,7	8,5	— ,,,	,0
déc. 1,5	— ,26	— 1,4	5,5	— ,,,	— 1,7	9,5	— ,,,	,0
2,5	— ,27	— 1,4	6,5	— ,,,	— 1,6	10,5	— ,,,	,0
3,5	— ,27	— 1,5	7,5	— ,,,	— 1,6	11,5	— ,,,	,0
4,5	— ,28	— 1,5	8,5	— ,,,	— 1,5	12,5	— ,,,	,0
5,5	— ,28	— 1,5	9,5	— ,,,	— 1,4	13,5	— ,,,	,0
6,5	— ,29	— 1,6	10,5	— ,,,	— 1,4	14,5	— ,53	,0
7,5	— ,30	— 1,6	11,5	— ,,,	— 1,3	15,5	— ,53	,0
8,5	— ,30	— 1,6	12,5	— ,,,	— 1,3	16,5	— ,54	,0
9,5	— ,31	— 1,7	13,5	— ,,,	— 1,2	17,5	— ,54	,0
10,5	— ,32	— 1,7	14,5	— ,,,	— 1,1	18,5	— ,55	,0
11,5	— ,33	— 1,8	15,5	— ,,,	— 1,0			
12,5	— ,34	— 1,8	16,5	— ,,,	— 1,0			

La branche de la courbe étant trop hypothétique, je n'ai pas continué les lectures au delà du 18 février.

## § 23. Des équations personnelles, et des poids.

En comparant la lecture des courbes avec les écarts  $O-C$  d'un observateur quelconque, on trouve pour chacune de ses observations une valeur  $c$  de la correction, qu'il faut appliquer aux positions



*Aspect stellaire; 1. ABETTI.*

Date.	$e\alpha$	$e\delta$	$v\alpha$	$v\delta$	Date.	$e\alpha$	$e\delta$	$v\alpha$	$v\delta$
janv. 20	— 0°53	+ 3"2	0°17	4"1	janv. 23	— 0°39	+ 5"9	0°03	1"4
20	— ,35	+ 3,7	,01	3,6	23	— ,28	+ 5,9	,08	1,4
20	— ,47	+ 2,3	,11	5,0	24	+ ,36	+ 9,3	,72	2,0
21	— ,72	+ 16,8	,56	9,5	24	+ ,16	+ 5,7	,52	1,6
21	— ,81	+ 13,0	,45	5,7					
$e\alpha = - 0^{\circ}36$ $e\delta = + 7''3$ $f\alpha = \pm 0^{\circ}3123 = \pm 3''90$ (arc d'un gr. cercle.) $f\delta = \pm 4''04$ Moyenne : $f = \pm 3''97$									

*Remarque.* Les valeurs de  $f\alpha$  ont été réduites en arc de grand cercle en multipliant par  $15 \cos \delta$  (12,0 pour l'aspect nébuleux et 12,5 pour l'aspect stellaire). Les variations de la déclinaison sont assez petites pour négliger la variation du cosinus.

Si l'on suivait rigoureusement les préceptes de la méthode des moindres carrés, en adoptant des poids, proportionnels à  $\frac{1}{f^2}$ , on obtiendrait un système de poids tout à fait impraticable et impossible (de  $p = 1$  jusqu' à  $p = 325$ ); les valeurs de  $f$  se reposent parfois sur 3 ou 4 observations seulement, et seront donc trop incertaines pour suivre ces règles; j'ai adopté des poids de 1 à 6 d'après le rapport suivant:

Valeur de $f$	Poids
0"00 — 2"50	6
2,51 — 4,00	5
4,01 — 6,00	4
6,01 — 8,00	3
8,01 — 10,00	2
> 10"00	1

Les „erreurs moyennes” d'une observation pendant l'aspect stellaire sont encore plus incertaines, le nombre des observations étant beaucoup plus petit; c'est pourquoi j'ai adopté pour cette période de la visibilité les mêmes poids de l'autre période.

Les deux tableaux suivants n'auront pas besoin d'explication; à M. GRATSCHÉW (tabl. II) j'ai attribué le poids 3, en vue de son erreur moyenne par rapport à celles des autres astronomes pendant la période stellaire. La dernière colonne donne le nombre des observations en asc. droite et en déclinaison.

## Tableaux des équations personnelles et des poids.

TABLEAU I.  
Période nébuleuse.

Observateur.	$eu$	$ed$	$f$	$p$	Observateur.	$eu$	$ed$	$f$	$p$
Abetti	- 0 <sup>s</sup> 45	+ 10 <sup>s</sup> 2	± 8 <sup>s</sup> 23	2	Millosevich	- 0 <sup>s</sup> 30	- 0 <sup>s</sup> 5	± 4 <sup>s</sup> 22	4
Barnard	- ,06	- 0,1	5,28	4	Möller	- ,06	+ 4,1	5,70	4
Bidschof	+ ,09	- 4,2	1,88	6	Oertel	+ ,14	+ 5,6	4,82	4
Bigourdan	- ,17	- 6,3	2,30	6	Palisa	+ ,01	+ 0,1	3,54	5
Boss	+ ,48	- 0,8	3,20	5	Pechüle	+ ,78	- 2,6	3,04	5
Le Cadet	- ,18	- 2,4	3,76	5	Picart	- 0,1	- 1,8	3,90	5
Callandreau	+ ,07	- 0,8	1,77	6	Plummer	- ,18	+ 1,7	9,25	2
Cohn	+ ,20	- 5,0	9,39	2	Rambaud	+ ,16	- 3,0	1,34	6
Coit	- 1,53	- 11,8	9,29	2	Rayet	- ,01	- 4,6	3,51	5
Collins	+ ,17	- 0,7	2,00	6	Rees	- 0,2	+ 10,5	17,00	1
von Engelhardt	- 1,00	- 0,4	5,14	4	Renz	- ,10	+ 4,2	1,14	6
Esmiel	+ ,48	- 1,1	3,16	5	Ristenpart	- 1,24	- 9,2	13,24	1
Flint	+ ,04	+ 0,8	5,97	4	Schorr	- ,48	- 0,5	4,88	4
Graham	- ,05	- 1,7	2,91	5	Schroeter	- ,49	+ 0,8	7,16	3
Gruss	- ,92	- 2,7	13,00	1	Schur	- ,55	+ 4,1	4,51	4
Hayn	- ,49	- 1,1	1,98	6	Schwab	- ,06	+ 4,7	9,18	2
Holtschek	- 1,21	+ 11,8	8,25	2	Searle	,00	- 8,4	9,06	2
Hough	- ,04	- 0,2	3,01	5	Spitaler	- ,72	+ 42,9	10,13	1
Jacoby	- ,28	+ 18,1	20,54	1	Stone	+ ,18	- 3,2	4,51	4
Jones	+ ,68	+ 13,3	11,58	1	Sy	+ ,07	- 2,1	2,93	5
Kammermann	- ,01	- 4,3	7,20	3	Tebbutt	- ,77	+ 6,1	9,66	2
Knopf	- ,32	- 2,2	3,61	5	Trocki	+ ,12	- 0,6	3,18	5
von Knorre	- ,03	- 2,4	3,03	5	Updegraff	- ,37	+ 6,7	8,44	2
Kobold	+ ,08	- 0,3	2,32	6	Weiss	+ ,02	- 4,8	1,94	6
Lamp	- ,52	- 4,3	3,22	5	Wendell	+ ,81	+ 0,6	7,12	3
Láska	- ,65	+ 11,1	21,12	1	Whitney	+ ,18	- 4,9	10,18	1
Lay	+ ,25	+ 2,8	6,15	3	Wilson	- ,47	+ 3,1	4,98	4
Lovett	+ ,61	+ 2,5	4,28	4	Witt	+ ,04	+ 3,7	5,02	4

TABLEAU II.  
Période stellaire.

Observateur.	$eu$	$ed$	$f$	$p$	Observateur.	$eu$	$ed$	$f$	$p$
Abetti	- 0 <sup>s</sup> 36	+ 7 <sup>s</sup> 3	± 3 <sup>s</sup> 97	2	Oertel	+ 0 <sup>s</sup> 10	+ 0 <sup>s</sup> 4	± 0 <sup>s</sup> 78	3
Cohn	+ ,19	- 3,2	2,40	2	Palisa	+ ,05	+ 1,6	1,43	5
Gratschew	+ ,02	+ 1,0	2,86	3	Pechüle	+ ,38	+ 0,2	1,25	5
Gruss	+ ,12	- 4,0	1,90	1	Plummer	+ ,15	+ 1,2	2,60	2
Hough	- ,18	+ 0,5	1,76	5	Renz	+ ,18	0,0	1,77	6
Kammermann	+ ,05	- 1,4	1,58	3	Ristenpart	- ,26	+ 0,9	5,32	1
Kobold	+ ,06	0,0	0,41	6	Schorr	+ ,03	+ 1,9	0,40	4
Lamp	+ ,01	+ 0,5	0,73	5	Schroeter	- ,45	+ 0,2	0,62	3
Láska	- ,53	- 2,0	3,12	1	Trocki	- ,08	- 0,5	2,14	5
Lay	+ ,18	+ 0,3	1,34	3	Wendell	+ ,24	- 1,7	2,00	3
Lovett	+ ,23	- 1,6	1,47	4	Wilson	+ ,24	- 1,1	1,83	4



Nous allons maintenant justifier en peu de mots notre opinion défavorable des observations faites à *Greenwich*. En comparant les équations personnelles avec les valeurs  $O-C$ , on trouve des erreurs „accidentelles”, qui s'élèvent

pour M.	BRYANT	jusqu' à	2 <sup>s</sup> 11	en $\alpha$	et	43"1	en $\delta$
„	„	CROMMELIN	„	2 <sup>s</sup> 51	„	„	34"4
„	„	DAVIDSON	„	3,13	„	„	10,2
„	„	EDNEY	„	3,22	„	„	57,5
„	„	HOLLIS	„	0,54	„	„	38,6
„	„	LEWIS	„	2,88	„	„	22,9

Pour les valeurs de  $f$  on trouve dans le même ordre alphabétique:  $\pm 13"39$ ;  $\pm 15"40$ ;  $\pm 12"89$ ;  $\pm 39"30$ ;  $\pm 18"35$ ;  $\pm 15"35$ .

Les observations de MM. GRUSS, JACOBY, LASKA et REES ne sont pas supérieures à celles des observateurs de *Greenwich* et je déplore maintenant, que je ne les aie pas réjetées tout de même; mais elles sont peu nombreuses, et (en vertu du poids = 1) elles ne pourront altérer sensiblement les résultats.

#### § 24. Des lieux normaux.

Adoptant les équations personnelles et les poids du § précédent, et divisant les observations en 10 lieux normaux, il est facile de déduire pour ces lieux norm. 1° la date moyenne, 2° les corrections  $\Delta \alpha$  et  $\Delta \delta$ , qui doivent être appliquées aux positions calculées. Eu outre, j'ai déduit des observations mêmes le poids de chaque lieu normal. En comparant les moyennes  $\Delta \alpha$  et  $\Delta \delta$  avec les écarts individuels, on obtient les „erreurs accidentelles”  $v_\alpha$  et  $v_\delta$ , dont on déduira les erreurs probables des lieux normaux d'après l'expression connue

$$\varepsilon = \pm 0,674489 \sqrt{\frac{[p v v]}{[p] (n - 1)}}$$

où  $n$  désigne le nombre des observations.

Ces erreurs probables seront d'un côté *trop grandes*, parce que les valeurs de  $\Delta \alpha$  et de  $\Delta \delta$  ne sont pas constantes pendant la période des observations, qui ont concouru à la formation du lieu normal. Mais de l'autre côté elles seront *trop petites*, parce que la supposition, sur laquelle se fonde leur détermination, n'est pas satisfaite. La méthode des moindres carrés exige: 1° que le nombre des observations soit infiniment grand; 2° que ces observ. soient faites dans toutes les circonstances possibles. Or, un lieu normal est toujours formé d'observations relativement voisines, qui se rapportent à un état à peu près constant de la comète; et il est sûr,

que l'affaiblissement graduel d'une pale nébulosité, sans noyau marqué, sera une nouvelle source d'erreurs pas accidentelles, mais *systématiques*, car ces erreurs seront de la même sorte que les corrections de l'asc. droite, dépendantes de l'éclat d'une faible étoile (voir §§ 8 et 16). A cause de la marche lente de  $\Delta \alpha$  et de  $\Delta \delta$  il est même *a priori* vraisemblable, que les erreurs probables deviendront en somme *très petites*. Quoi qu'il en soit, j'ai cru devoir introduire ces erreurs, et les poids, qui s'en dérivent, tels que le calcul les avait données.

Dans la formation des moyennes j'ai exclu outre les obs., faites à Greenwich, les n<sup>os</sup> suiv.: 126 ( $\Delta \alpha = + 5^s 56$ ); 163 ( $\Delta \alpha = + 2^s 81$ ,  $\Delta \delta = - 40'' 5$ ); 195 ( $\Delta \alpha = + 0^s 54$ ,  $\Delta \delta = - 171'' 9$ ); 212 ( $\Delta \alpha = + 0^s 65$ ,  $\Delta \delta = - 59'' 1$ ); 228 ( $\Delta \alpha = + 5^s 62$ ,  $\Delta \delta = - 67'' 5$ ); 235 ( $\Delta \alpha = + 4^s 64$ ) et 313 ( $\Delta \delta = - 65'' 9$ ). L'équation pers. ou l'étoile de comp. étant inconnue j'ai attribué l'unité de poids seulement.

Je remarquerai encore, que le 7<sup>ième</sup> lieu normal ne renferme pas encore l'observation d'*Oxford* (Radeliffe Obs.).

N <sup>o</sup> .	Observations.	Date.	$\Delta \alpha$	Err. pr.	$\Delta \delta$	Err. pr.	No. d'obs.
1	1—109	nov. 12,2408	— 0 <sup>s</sup> 187	$\pm 0^s 0258$	— 0 <sup>''</sup> 31	$\pm 0'' 392$	93
2	110—212	„ 17,4989	— ,240	,0330	+ 0,01	0,501	90
3	213—296	„ 23,7826	— ,272	,0349	— 2,44	0,626	78 : 77
4	297—350	déc. 13,9803	— ,342	,0653	— 1,20	0,546	50 : 48
5	351—363	janv. 10,0557	— ,488	,0856	— 4,12	1,393	11
6	364—409	„ 18,1832	— ,526	,0156	— 0,72	0,123	44 : 43
7	410—465	„ 21,1722	— ,502	,0226	— 0,53	0,250	52 : 50
8	466—516	„ 30,3375	— ,470	,0417	— 0,15	0,546	46 : 45
9	517—577	févr. 12,8632	— ,549	,0608	+ 0,59	0,776	47
10	578—582	mars 10,3789	— 1,679	,0992	+ 2,33	3,733	5

### § 25. Des perturbations en $x$ , $y$ et $z$ durant la visibilité.

Pour le calcul des perturbations orthogonales nous ferons usage des éléments provisoires, calculés dans le § 14. D'abord nous en déduisons les constantes par rapport à l'écliptique et l'équinoxe moyen de 1892.0. On trouve:

$$\log a = 9.993\,7455 \quad ; \quad A' = + 77^{\circ} 39' 20'' 058$$

$$\log b = 9.977\,7141 \quad ; \quad B' = - 15\,33\,57.923$$

$$\log c = 9.550\,0671 \quad ; \quad C' = + 14\,25\,20.059$$

Nous choisissons un intervalle de 20 jours; en fixant l'époque d'osculation au 4 nov. 1892, la première époque du calcul des

perturbations devient 1892 oct. 5. Nous n'allons tenir compte que des perturbations causées par la Terre, par Mars et par Jupiter. Adoptant pour les masses de ces planètes:

$m_{\text{♁}} = 1 : 330\,000$  ;  $m_{\text{♂}} = 1 : 3\,093\,500$  ;  $m_{\text{♂}} = 1 : 1047.879$   
et faisant usage des notations de M. VON OPPOLZER, nous avons

$$\frac{\log (w k)^2 m_1}{\begin{array}{l} \text{♁} \quad 0.554\,7090 \\ \text{♂} \quad 9.582\,7728-10 \\ \text{♂} \quad 3.052\,9118. \end{array}}$$

Les planètes Vénus et Saturne étant à peu près en opposition avec la comète, elles n'ont pas causé des perturbations sensibles.

Les valeurs de la distance héliocentrique ( $r$ ) et de l'anomalie vraie ( $v$ ) sont tirées du calcul des éphémérides, à l'exception des 2 premières époques.

Je ne donnerai pas les quantités auxiliaires; il suffira de dire que les calculs ont été faits d'après les formules, que VON OPPOLZER donne pour l'application de la méthode d'ENCKE. Les tableaux suivants donnent les valeurs de  $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2\eta}{dt^2}$  et  $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$  (où  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$  désignent les perturbations des coord. par rapport à l'écliptique de 1892.0).

Tableaux des Perturbations.

X.

Date.	$^{II}f'$	$f'$	$\frac{d^2\xi}{dt^2}$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$
1892 oct. 5	+ 31,10		+ 79,63		(+ 0,55)		(+ 0,16)
		77,92		- 1,69		(- 0,59)	
„ 25	+ 3,18		+ 77,99		- 0,04		(+ 0,16)
		+ 0.07		- 1,73		- 0,43	
nov. 14	+ 3.25		+ 76,26		- 0,47		+ 0,16
		+ 76,33		- 2,20		- 0,27	
déc. 4	+ 79,58		+ 74,06		- 0,74		+ 0,17
		+ 150,39		- 2,94		- 0,10	
„ 24	+ 229,97		+ 71,12		- 0,84		+ 0,22
		+ 221,51		- 3,78		+ 0,12	
1893 janv. 13	+ 451,48		+ 67,34		- 0,72		+ 0,02
		+ 233,85		- 4,50		+ 0,14	
févr. 2	+ 740,33		+ 62,34		- 0,58		+ 0,11
		+ 351,69		5,08		+ 0,25	
„ 22	+ 1092,02		+ 57,76		- 0,33		(+ 0,12)
		+ 409,45		5,41		(+ 0,37)	
mars 14	+ 1501,47		+ 52,35		(+ 0,04)		(+ 0,12)

## Y.

Date.	$^{II}f'$	$I f'$	$\frac{d^2\eta}{dt^2}$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$
1892 oct. 5	+ 9,39		+ 17,75		(+ 0,44)		(- 0,32)
„ 25	+ 0,09	- 9,30	+ 9,60	- 8,15	+ 1,09	(+ 0,65)	(- 0,32)
nov. 14	+ <b>0.39</b>	+ <b>0.30</b>	+ 2,54	- 7,06	+ 1,42	+ 0,33	- 0,32
déc. 4	+ 3,23	+ 2,84	- 3,10	- 5,64	+ 1,43	+ 0,01	- 0,31
„ 24	+ 2,97	- 0,26	- 7,31	- 4,21	+ 1,13	- 0,30	- 0,03
		- 7,57		- 3,08		- 0,33	
1893 janv. 13	- 4,60	- 17,96	- 10,39	- 2,28	+ 0,80	- 0,39	- 0,06
févr. 2	- 22,56	- 30,63	- 12,67	- 1,87	+ 0,41	- 0,33	+ 0,06
„ 22	- 53,19	- 45,17	- 14,54	- 1,79	+ 0,08		(0,00)
mars 14	- 98,36		- 16,33		(- 0,25)	(- 0,33)	(0,00)

## Z.

Date.	$^{II}f'$	$I f'$	$\frac{d^2\zeta}{dt^2}$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$
1892 oct. 5	- 40,73		- 36,03		(+ 2,70)		(0,00)
„ 25	- 1,67	+ 39,06	- 39,03	- 3,00	+ 2,15	(- 0,55)	(0,00)
nov. 14	- <b>1.64</b>	+ <b>0.03</b>	- 39,88	- 0,85	+ 1,60	- 0,55	0,00
déc. 4	- 41,49	- 39,85	- 39,13	+ 0,75	+ 1,05	- 0,55	+ 0,05
„ 24	- 120,47	- 78,98	- 37,33	+ 1,80	+ 0,55	- 0,50	+ 0,15
		- 116,31		+ 2,35		- 0,35	
1893 janv. 13	- 236,78	- 151,29	- 34,98	+ 2,55	+ 0,20	- 0,25	+ 0,10
févr. 2	- 388,07	- 183,72	- 32,43	+ 2,50	- 0,05	- 0,15	+ 0,10
„ 22	- 571,79	- 213,65	- 29,93		- 0,20		(+ 0,10)
mars 14	- 785,44		- 27,63		(- 0,25)	(- 0,05)	(+ 0,10)

*Remarques:* 1°. Les perturbations sont exprimées en unités de la 7<sup>me</sup> décimale, la distance de la Terre au Soleil étant prise pour unité.



2°. Les nombres **gras** indiquent les constantes initiales, calculées d'après les expressions

$${}^I \mathbf{f}(a - \tfrac{1}{2} w) = -\frac{1}{24} \mathbf{f}^I(a - \tfrac{1}{2} w) + \frac{17}{5760} \mathbf{f}^{III}(a - \tfrac{1}{2} w)$$

$${}^{II} \mathbf{f}(a) = +\frac{1}{24} \mathbf{f}(a - w) - \frac{17}{5760} [2 \mathbf{f}^{II}(a - w) + \mathbf{f}^{II}(a)]$$

3°. Les nombres entre parenthèses ( ) ont été ajoutés hypothétiquement. Ils sont nécessaires pour calculer les perturbations elles-mêmes d'après la méthode de l'intégration numérique, mais leur influence est presque insensible.

§ 26. *Les perturbations en asc. droite et en déclinaison.*

Pour calculer  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$ , je me suis servi de l'expression

$$\iint f(v) dx^2 = {}^{II} \mathbf{f}(i) + Q_2^0(n) \mathbf{f}(i) + Q_2^2(n) \mathbf{f}^{II}(i) + Q_2^4(n) \mathbf{f}^{IV}(i) \dots$$

$$+ n [{}^I \mathbf{f}(i) + Q_2^1(n) \mathbf{f}^I(i) + Q_2^3(n) \mathbf{f}^{III}(i) + \dots]$$

(voir OPPOLZER II, page 56), ou de

$$\iint f(x) dx^2 = {}^{II} \mathbf{f}(i + \tfrac{1}{2}) + P_2^0(m) \mathbf{f}(i + \tfrac{1}{2}) + P_2^2(m) \mathbf{f}^{II}(i + \tfrac{1}{2}) + \dots$$

$$+ m [{}^I \mathbf{f}(i + \tfrac{1}{2}) + P_2^1(m) \mathbf{f}^I(i + \tfrac{1}{2}) + P_2^3(m) \mathbf{f}^{III}(i + \tfrac{1}{2}) + \dots]$$

Tirant les valeurs de  $Q_2^0, Q_2^1, \dots, P_2^0, P_2^1$  etc. des Tables de VON OPPOLZER, tome II, je trouve pour les perturbations aux époques des lieux normaux :

Lieu norm.	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	Lieu norm.	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
1	+ 6,53	+ 0,42	- 3,37	6	+ 525,57	- 9,08	- 275,59
2	+ 17,48	+ 1,01	- 9,06	7	+ 567,08	- 11,49	- 297,34
3	+ 39,11	+ 1,81	- 19,48	8	+ 703,44	- 20,52	- 368,73
4	+ 151,60	+ 3,34	- 79,30	9	+ 928,88	- 38,64	- 486,59
5	+ 425,93	- 4,80	- 223,49	10	+ 1427,74	- 90,36	- 746,98

Pour calculer les perturbations par rapport à l'équateur de 1892.0 je ferai usage des formules

$$\xi' = \xi$$

$$\eta' = \eta \cos \varepsilon - \zeta \sin \varepsilon$$

$$\zeta' = \eta \sin \varepsilon + \zeta \cos \varepsilon$$

où  $\varepsilon$  désigne l'inclinaison de l'écliptique ( $23^\circ 27' 11'' 84$ ). Je trouve :

L. norm.	$\eta'$	$\xi'$	L. norm.	$\eta'$	$\xi'$
1	+ 1,73	— 2,92	6	+ 101,36	— 256,44
2	+ 4,53	— 7,91	7	+ 107,80	— 277,35
3	+ 9,41	— 17,15	8	+ 127,93	— 346,43
4	+ 34,63	— 71,42	9	+ 158,22	— 461,77
5	+ 84,55	— 206,94	10	+ 214,40	— 721,23

Ces valeurs étant très petites, on peut calculer les perturbations en  $\alpha$  et en  $\delta$  à l'aide des expressions de la parallaxe :

$$\sigma_{\alpha} = \frac{1}{\rho \cos \delta} [-\xi' \sin \alpha + \eta' \cos \alpha]$$

$$\sigma_{\delta} = \frac{1}{\rho} [-\xi' \cos \alpha \sin \delta - \eta' \sin \alpha \sin \delta + \zeta' \cos \delta]$$

où  $\alpha$  et  $\delta$  désignent les asc. droites et les déclinaisons par rapport à l'équinoxe moyen de 1892.0; ces valeurs ont été tirées des éphémérides (ainsi que  $\log \rho$ ) et réduites à l'équinoxe moyen. De cette manière j'ai trouvé :

Perturbations en  $\alpha$  et en  $\delta$ .

N <sup>o</sup> .	Date.	$\sigma_{\alpha}$	$\sigma_{\delta}$
1	nov. 12,2408	+ 0 <sup>o</sup> 0074	— 0 <sup>o</sup> 0855
2	„ 17,4989	+ 0,0196	— 0,2221
3	„ 23,7826	+ 0,0330	— 0,4695
4	déc. 13,9803	+ 0,0267	— 1,6068
5	janv. 10,0557	— 0,5951	— 3,7211
6	„ 18,1832	— 0,9681	— 4,3359
7	„ 21,1722	— 1,1396	— 4,5829
8	„ 30,3375	— 1,7641	— 5,3403
9	févr. 12,8632	— 2,9642	— 6,4363
10	mars 10,3789	— 6,1333	— 8,3118

Ces perturbations doivent être additionnées, avec signes contraires, aux valeurs de  $\Delta \alpha$  et de  $\Delta \delta$ , calculées des observations (*voir* § 24), pour obtenir les écarts vrais entre l'orbite provisoire et les observations.

### § 27. Les équations de condition.

Pour former les équations de condition, il faut calculer les dérivées des coordonnées géocentriques par rapport aux 6 éléments

de l'orbite. En fixant l'époque au 4.0 nov. 1892, on trouve avec les éléments provisoires

$$M_o = 73662''5209$$

Les coefficients des équations ont été calculés deux fois à l'aide des expressions de VON OPPOLZER (*Lehrbuch* etc., II p. 390 et 391: Bei Bahnen periodischer Kometen kurzer Umlaufszeit). En réduisant  $\oslash$ ,  $\pi$  —  $\oslash$  et  $i$  à l'équateur moyen de 1892.0 on trouve:

$$\oslash' = 345^\circ 38' 57'' 163$$

$$\omega' = 358 \ 16 \ 56.310$$

$$i' = 42 \ 49 \ 47.069,$$

les autres éléments demeurant les mêmes. Au lieu de  $\sin i' \Delta \oslash'$  j'ai introduit  $\Delta \oslash'$ , en multipliant les expressions de VON OPP. par  $\sin i'$  ( $= 0.68$ ); voici les équations, que j'ai obtenues:

a. Ascensions droites.

1) 0,41551 $\Delta M_o$	+ 1,88417 <sub>n</sub> $\Delta \mu$	+ 0,29379 $\Delta \rho$	+ 0,06740 $\Delta \pi'$	+ 9,00320 $\Delta \oslash'$	+ 9,86526 <sub>n</sub> $\Delta i'$	= 0,34505 <sub>n</sub>
2) 0,39922	+ 1,86210 <sub>n</sub>	+ 0,28135	+ 0,05210	+ 8,95936	+ 9,86700 <sub>n</sub>	= 0,45824 <sub>n</sub>
3) 0,37897	+ 1,82330 <sub>n</sub>	+ 0,26782	+ 0,03370	+ 8,89038	+ 9,86581 <sub>n</sub>	= 0,51720 <sub>n</sub>
4) 0,31371	+ 1,57879 <sub>n</sub>	+ 0,23784	+ 9,98009	+ 8,41033	+ 9,84286 <sub>n</sub>	= 0,62929 <sub>n</sub>
5) 0,23684	+ 0,93997.	+ 0,22587	+ 9,93161	+ 8,69033 <sub>n</sub>	+ 9,77928 <sub>n</sub>	= 0,74740 <sub>n</sub>
6) 0,21676	+ 1,35539	+ 0,22605	+ 9,92221	+ 8,84481 <sub>n</sub>	+ 9,75440 <sub>n</sub>	= 0,76049 <sub>n</sub>
7) 0,20970	+ 1,44301	+ 0,22636	+ 9,91925	+ 8,88851 <sub>n</sub>	+ 9,74459 <sub>n</sub>	= 0,72586 <sub>n</sub>
8) 0,18900	+ 1,63230	+ 0,22782	+ 9,91164	+ 8,99553 <sub>n</sub>	+ 9,71231 <sub>n</sub>	= 0,64328 <sub>n</sub>
9) 0,16076	+ 1,80746	+ 0,23072	+ 9,90379	+ 9,10527 <sub>n</sub>	+ 9,65805 <sub>n</sub>	= 0,63983 <sub>n</sub>
10) 0,11267	+ 2,00166	+ 0,23509	+ 9,89604	+ 9,22894 <sub>n</sub>	+ 9,52852 <sub>n</sub>	= 1,19236 <sub>n</sub>

b. Déclinaisons.

11) 0,29875 $\Delta M_o$	+ 1,73543 $\Delta \mu$	+ 0,31607 $\Delta \rho$	+ 0,00065 $\Delta \pi'$	+ 9,88981 <sub>n</sub> $\Delta \oslash'$	+ 9,95685 $\Delta i'$	= 9,34242 <sub>n</sub>
12) 0,29102	+ 1,71857	+ 0,30805	+ 9,99429	+ 9,87190 <sub>n</sub>	+ 9,95660	= 9,36173
13) 0,27767	+ 1,69860	+ 0,29501	+ 9,98266	+ 9,84874 <sub>n</sub>	+ 9,95545	= 0,29447 <sub>n</sub>
14) 0,21108	+ 1,65033	+ 0,23505	+ 9,92301	+ 9,76365 <sub>n</sub>	+ 9,94775	= 9,61278
15) 0,08734	+ 1,62575	+ 0,13127	+ 9,81284	+ 9,63158 <sub>n</sub>	+ 9,93330	= 9,60206 <sub>n</sub>
16) 0,04557	+ 1,62161	+ 0,09716	+ 9,77611	+ 9,58865 <sub>n</sub>	+ 9,92898	= 0,55871
17) 0,02978	+ 1,61997	+ 0,08429	+ 9,76226	+ 9,57247 <sub>n</sub>	+ 9,92744	= 0,60746
18) 9,97987	+ 1,61319	+ 0,04362	+ 9,71858	+ 9,52120 <sub>n</sub>	+ 9,92297	= 0,71517
19) 9,90194	+ 1,59666	+ 9,97968	+ 9,65044	+ 9,44047 <sub>n</sub>	+ 9,91700	= 0,84696
20) 9,73581	+ 1,52558	+ 9,83800	+ 9,50272	+ 9,25951 <sub>n</sub>	+ 9,90791	= 1,02694

Il va sans dire que les seconds membres des équations 1—10 ont été obtenus en multipliant les écarts  $[(O-C)_a - \sigma_a]$  (exprimés en sec. d'arc) par  $\cos \delta$ .

Désignons par  $p$  le poids d'une équation, et par  $\varepsilon_a$  et  $\varepsilon_\delta$  les erreurs probables des lieux normaux (v. le tableau du § 24), on a:

$$1^\circ \text{ pour les asc. droites: } \sqrt{p} = \frac{1}{15 \cos \delta \cdot \varepsilon_a}$$

$$2^\circ \text{ pour les déclinaisons: } \sqrt{p} = \frac{1}{\varepsilon_\delta}$$

En adoptant ces poids, on suppose, que l'erreur probable d'une observation de l'unité de poids soit égale à 1"000 (en arc d'un grand cercle). Nous avons déjà démontré (*voir* § 24), que cette valeur sera probablement trop petite, et l'on verra plus tard, que la solution des équations donne réellement une valeur plus grande (1"449).

Les expressions pour  $\sqrt{p}$  donnent:

<i>Eq.</i>	$\log \sqrt{p}$	<i>Eq.</i>	$\log \sqrt{p}$	<i>Eq.</i>	$\log \sqrt{p}$	<i>Eq.</i>	$\log \sqrt{p}$
1	0.51448;	6	0.70964;	11	0.40658;	16	0.91025
2	0.40533;	7	0.54932;	12	0.30039;	17	0.60210
3	0.37753;	8	0.28409;	13	0.20377;	18	0.26298
4	0.09565;	9	0.12201;	14	0.26311;	19	0.10996
5	9.97144;	10	9.91505;	15	9.85604;	20	9.42794.

Multipliant les équations par  $\sqrt{p}$ , et introduisant les nouvelles inconnues:

$$\begin{aligned} x &= [0.95582] \Delta M_0 \\ y &= [2.53186] \Delta \mu \\ z &= [1.00741] \Delta \phi \\ u &= [0.68636] \Delta \pi' \\ v &= [0.49890] \Delta \oslash' \\ w &= [0.83923] \Delta i' \end{aligned}$$

$$\text{unité d'erreur} = [1.47013] \text{ secondes,}$$

on obtient les équations suivantes:

#### a. Ascensions droites.

$$\begin{aligned} 1) & 9,97417 x + 9,86679_n y + 9,80086 z + 9,89552 u + 9,01878 v + 9,54051_n w = 9,38940_n \\ 2) & 9,84873 + 9,73557_n + 9,67927 + 9,77107 + 8,86579 + 9,43310_n = 9,39344_n \\ 3) & 9,80068 + 9,66897_n + 9,63794 + 9,72487 + 8,76901 + 9,40411_n = 9,42460_n \\ 4) & 9,45354 + 9,14258_n + 9,32608 + 9,38938 + 8,00708 + 9,09928_n = 9,25481_n \\ 5) & 9,25246 + 8,37955 + 9,18990 + 9,21669 + 8,16287_n + 8,91149_n = 9,24871_n \\ 6) & 9,97058 + 9,53317 + 9,92828 + 9,94549 + 9,05555_n + 9,62481_n = 0,00000_n \\ 7) & 9,80320 + 9,46047 + 9,76827 + 9,78221 + 8,93893_n + 9,45468_n = 9,80505_n \\ 8) & 9,51727 + 9,38453 + 9,50450 + 9,50937 + 8,78072_n + 9,15717_n = 9,45724_n \\ 9) & 9,32695 + 9,39761 + 9,34532 + 9,33944 + 8,72838_n + 8,94083_n = 9,29171_n \\ 10) & 9,07190 + 9,38485 + 9,14273 + 9,12473 + 8,64509_n + 8,60434_n = 9,63728_n \end{aligned}$$

#### b. Déclinaisons.

$$\begin{aligned} 11) & 9,74951 x + 9,61015 y + 9,71524 z + 9,72087 u + 9,79749_n v + 9,52420 w = 8,27887_n \\ 12) & 9,63559 + 9,48710 + 9,60103 + 9,60832 + 9,67339_n + 9,41776 = 8,19199 \\ 13) & 9,52562 + 9,37051 + 9,49137 + 9,50007 + 9,55361_n + 9,31999 = 9,02811_n \\ 14) & 9,51837 + 9,38158 + 9,49075 + 9,49976 + 9,52786_n + 9,37163 = 8,40576 \\ 15) & 8,98756 + 8,94993 + 8,97990 + 8,98252 + 8,98872_n + 8,95011 = 7,98797_n \\ 16) & 0,00000 + 0,00000 + 0,00000 + 0,00000 + 0,00000_n + 0,00000 = 9,99883 \\ 17) & 9,67606 + 9,69021 + 9,67898 + 9,67800 + 9,67567_n + 9,69031 = 9,73943 \\ 18) & 9,28703 + 9,34431 + 9,29919 + 9,29520 + 9,28528_n + 9,34672 = 9,50802 \\ 19) & 9,05608 + 9,17476 + 9,08223 + 9,07404 + 9,05153_n + 9,18773 = 9,48679 \\ 20) & 8,20793 + 8,42166 + 8,25853 + 8,24430 + 8,18855_n + 8,49662 = 8,98475 \end{aligned}$$



§ 28. *Les équations normales. Solution de  $x$ ,  $z$ ,  $v$  et  $w$ .*

Il ne sera pas nécessaire de rappeler ici les expressions, d'après lesquelles on déduit les six équations normales (ou finales) des équations de condition. En désignant par  $s_i$  la somme

$$a_i + b_i + c_i + d_i + e_i + f_i + u_i$$

(où  $i$  est un nombre entier de 1—20), et par  $q$  successivement les coefficients  $a, \dots, n$ , on se servira de la relation

$$[s_i q_i] = [a, q_i] + [b, q_i] + [c, q_i] + [d, q_i] + [e, q_i] + [f, q_i] + [n, q_i]$$

pour vérifier la formation et la sommation des produits. Le tableau suivant donne dans la forme usuelle les équations normales (*num.*), auxquelles je suis arrivé:

$$\begin{array}{rcccccccc} + 2.17097w & - 1.77219v & + 0.62791z & + 0.37627x & + 1.88761y & + 0.50028u & = & + 2.30440 \\ & + 2.19060 & - 2.07499 & - 2.08218 & - 2.11479 & - 2.06096 & & - 1.16301 \\ & & + 4.03113 & + 4.58751 & + 1.45798 & + 4.28163 & & - 0.53901 \\ & & & + 5.35148 & + 1.07754 & + 4.93802 & & - 0.85955 \\ & & & & + 3.14813 & + 1.25681 & & + 1.07359 \\ & & & & & + 4.58075 & & - 0.68484 \end{array}$$

et pour la somme des carrés des erreurs on trouve

$$[n n] = 3.48757$$

(exprimée en unités de [1.47013] secondes d'arc).

On aura remarqué, que j'ai modifié l'arrangement des inconnues. En calculant l'orbite d'une comète périodique des observations d'une seule apparition, on trouve habituellement le moyen mouvement diurne avec peu d'exactitude; en outre on sait, que la longitude du périhélie et l'anomalie moyenne peuvent être modifiées réciproquement de sorte que les erreurs probables de ces deux éléments deviennent toujours plus grandes que celles des autres éléments. C'est pourquoi j'ai mis  $x$  dans la 4<sup>me</sup>,  $y$  dans la 5<sup>me</sup> et  $u$  dans la 6<sup>me</sup> colonne. Les résultats de la solution ne répondent pas tout à fait à ces considérations; c'est surtout  $\mu$  et par suite la période de révolution, qui s'est montré d'une exactitude inattendue, mais il ne m'a pas paru nécessaire de changer l'arrangement des inconnues et de reprendre ensuite la solution.

En faisant usage de tables de log. à 7 décimales, je trouve par la méthode des substitutions de GAUSS les équations d'élimination que voici:

$$\begin{array}{l} 0.336\ 6538w + 0.248\ 5103_n v + 9.797\ 8974z + 9.575\ 4996x \\ \quad \quad \quad + 0.275\ 9123y + 9.699\ 2131u = 0.362\ 5579 \\ (A_1) \left\{ \begin{array}{l} 9.871\ 5374v + 0.193\ 7976_n z + 0.249\ 2047_n x + 9.758\ 8440_n y \\ \quad \quad \quad + 0.218\ 1612_n u = 9.856\ 1853 \\ 9.754\ 4479z + 9.875\ 5102x + 9.467\ 3104_n y + 9.823\ 6042u \\ \quad \quad \quad = 9.480\ 9281 \\ 8.770\ 4424x + 9.364\ 3044_n y + 8.445\ 9658u = 8.736\ 3490 \end{array} \right. \end{array}$$

et la somme des carrés des erreurs s'est abaissée jusqu' à

$$[n \ n \ 4] = 0.13678$$

### § 29. *Solution de $y$ et $u$ .*

En continuant l'élimination je suis arrivé au cas mentionné par VON OPPOLZER (II p. 362); le coefficient de  $y$  dans la 5<sup>me</sup> équation d'élim. devient très petit, et celui de  $u$  dans la 6<sup>me</sup> même négatif, tandis qu'on sait, que tous les coefficients  $[aa]$ ,  $[bb \ 1]$ .....  $[ff \ 5]$  doivent être positifs. Il s'ensuit, que les valeurs de ces 2 coefficients sont du même ordre que les quantités négligées dans les calculs précédents. Je l'ai donc jugé inévitable de me servir de l'artifice, que VON OPPOLZER a indiqué p. 364 du tome II. Résolvant les équations ( $A_1$ ) par rapport à  $w$ ,  $v$ ,  $z$  et  $x$ , on obtient:

$$\left. \begin{aligned} x &= 0.59386 \ y + 9.67552_n \ u + 9.96591 \\ z &= 0.66940 \quad + 9.73767_n \quad + 9.83823_n \\ v &= 9.51484 \quad + 8.75494_n \quad + 0.23655 \\ w &= 8.83425 \quad + 8.56433_n \quad + 0.39930 \end{aligned} \right\} (B)$$

Les équations ( $B$ ) montrent, que  $\Delta \pi'$  est réellement l'élément le plus incertain, mais que l'incertitude de  $y$  sera plus petite que celle de  $x$  ou de  $z$ . L'arrangement le plus favorable à l'exactitude de la solution aurait été

$$w, \ v, \ y, \ z, \ x, \ u,$$

mais l'arrangement choisi, quoique moins favorable, ne sera pas d'une influence trop fâcheuse.

En substituant les expressions ( $B$ ) dans les équations de condition du dernier tableau de § 27, on trouve 20 nouvelles équations de condition entre  $y$  et  $u$ :

#### *a. Ascens. droites.*

- 1)  $8.30492 \ y + 7.01703 \ u = 7.99607$
- 2)  $6.56820 \quad + 6.69020 \quad = 8.24353_n$
- 3)  $8.13001_n \quad + 6.14613_n \quad = 8.20656_n$
- 4)  $8.26576_n \quad + 7.10037_n \quad = 7.06819$
- 5)  $7.88480_n \quad + 6.92428_n \quad = 7.80003_n$
- 6)  $8.21511_n \quad + 7.32634_n \quad = 8.42813_n$
- 7)  $7.56937_n \quad + 6.82607_n \quad = 8.62716$
- 8)  $8.07954 \quad + 7.11059 \quad = 8.97114$
- 9)  $8.40106 \quad + 7.49136 \quad = 8.85528$
- 10)  $8.59923 \quad + 7.73400 \quad = 9.43169_n$

## b. Déclinaisons.

$$\begin{aligned}
11) & 7.72263 y + 6.73239_n u = 8.79511 \\
12) & 7.43933 + 6.30103 = 8.67679 \\
13) & 6.75587 + 6.78533 = 9.04273_n \\
14) & 7.65992_n + 7.04532 = 8.87535_n \\
15) & 7.08279_n + 6.04139 = 8.95119_n \\
16) & 7.66839_n + 6.04139_n = 8.34183_n \\
17) & 6.36173_n + 6.46240_n = 8.43409 \\
18) & 7.46538 + 6.65321_n = 8.74523 \\
19) & 7.73078 + 6.78533_n = 8.96638 \\
20) & 7.33041 + 6.44716_n = 8.62377
\end{aligned}$$

Ces coefficients seront désignés par  $a'$ ,  $b'$ ,  $n'$ . En les comparant avec ceux du § 27, on remarquera une diminution considérable; on trouve (valeurs absolues):

$$[a' + b'] = 0.2076; [e + f] = 9.3894.$$

La dernière somme est 45 fois plus grande que la première; les produits et les carrés des coeff. seront donc en rapport de 1 : 2000. Quant aux coeff. de  $u$ , ce rapport est encore plus défavorable:

$$[b'] = 0.03402; [f] = 6.71304,$$

ou 170 fois plus grand. Il n'y a donc rien d'étonnant dans le désaccord entre le signe — de  $[ff]$  et la théorie, qui exige qu'il soit +.

Des équations de condition se déduisent deux nouvelles équations normales (numériques):

$$\begin{aligned}
0.003\,750\,75 y + 0.000\,387\,179 u &= -0.005\,394\,9 \\
&+ 0.000\,051\,9255 \quad -0.001\,368\,75
\end{aligned}$$

La somme des carrés des erreurs devient

$$[n' n'] = 0.1367119.$$

Cette valeur correspond à  $[n n 4]$ , et elle fournit une vérification satisfaisante de cette partie du calcul. En outre, tous les calculs ont été vérifiés avec soin.

Résolvant les équations normales, on obtient les deux dernières équations d'élimination:

$$\begin{aligned}
7.574\,1181 y + 6.587\,9118 u &= 7.731\,9834_n \\
5.077\,6636 u &= 6.909\,4759_n \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 7.574\,1181 y + 6.587\,9118 u \\ 5.077\,6636 u \end{aligned}} \right\} (A_2)
\end{aligned}$$

et la somme des carrés des erreurs devient

$$[n' n' 2] = 0.0738348.$$

## § 30. Les nouveaux éléments.

En résolvant successivement les équations d'élimination, on trouve pour les inconnues:

$$\begin{aligned}
 \log x &= 1.739\,9573 \\
 \log y &= 0.745\,8426 \\
 \log z &= 1.017\,2186 \\
 \log u &= 1.831\,8123_n \\
 \log v &= 0.869\,7042 \\
 \log w &= 0.730\,6074.
 \end{aligned}$$

Substituant à  $x, \dots, w$  leurs valeurs en  $\Delta M_0$  etc., et multipliant les seconds membres par l'unité d'erreur, on en déduit :

$$\begin{aligned}
 \Delta M_0 &= + 2' 59'' 583\,9 \\
 \Delta \mu &= + \quad 0.483\,184\,1 \\
 \Delta \phi &= + \quad 30.195\,2 \\
 \Delta \pi' &= - 6\,52.650\,5 \\
 \Delta \oslash' &= + 1\,9.332\,1 \\
 \Delta i' &= + \quad 22.988\,3.
 \end{aligned}$$

Appliquons ces corrections aux éléments provisoires, rapportés à l'équateur moyen de 1892.0; il vient :

*Système II.*

Ep. et osc. 1892 nov. 4.0 T.M.Gr.

$$\begin{aligned}
 \log a &= 0.559\,33973 \\
 \mu &= 514'' 040\,0769 \\
 \phi &= 24^\circ 10' 45'' 5185 \\
 \oslash' &= 345\,40\,6.495 \\
 \pi' &= 343\,49\,0.823 \\
 i' &= 42\,50\,10.057 \\
 M_0 &= 73842'' 1048.
 \end{aligned}$$

Réduisant  $\oslash'$ ,  $\pi'$  et  $i'$  à l'équateur de 1893.0 à l'aide des formules de VON OPPOLZER (I 206), on trouve :

$$\begin{aligned}
 \oslash' &= 345^\circ 40' 31'' 615 \\
 \pi' &= 343\,49\,54.514 \\
 i' &= 42\,50\,15.018.
 \end{aligned}$$

Ces éléments donnent pour les coordonnées rectilignes héliocentriques de la comète :

$$\begin{aligned}
 1^\circ. \quad & \text{Equateur et équinoxe de 1892.0} \\
 x &= [9.993\,7606\,82] \sin(v + 77^\circ 32' 14'' 263) \\
 y &= [9.876\,4293\,37] \sin(v - 21\,3\,35.8725) \\
 z &= [9.832\,4474\,75] \sin(v - 1\,51\,5.672) \\
 2^\circ. \quad & \text{Equateur et équinoxe de 1893.0} \\
 x &= [9.993\,7663\,88] \sin(v + 77^\circ 33' 2'' 633) \\
 y &= [9.876\,4103\,43] \sin(v - 21\,2\,36.1875) \\
 z &= [9.832\,4587\,41] \sin(v - 1\,50\,37.101).
 \end{aligned}$$



§ 31. *Comparaison avec les lieux normaux.*

Pour obtenir les coordonnées géocentriques de la comète, il faut ajouter à  $x, y, z$  les coordonnées rectilignes du Soleil. J'ai calculé celles-ci à l'aide des éphémérides du *Nautical Almanac* (en tenant compte des 4<sup>mes</sup> différences) et de la *Connaissance des Temps* (3<sup>mes</sup> diff.) en adoptant pour la différence en longitude

*Par. — Greenw.* = 0<sup>h</sup>006 492 (C. d. T. 1893).

Les deux valeurs étaient toujours d'accord à quelques unités de la 7<sup>me</sup> décimale près; en prenant leurs moyennes arithmétiques, je trouve:

Coordonnées du Soleil.

N <sup>o</sup> .	Date.	X.	Y.	Z.
1	1892 nov. 12,2408	— 0,624 5822 <sup>4</sup>	— 0,703 6262 <sup>0</sup>	— 0,305 2586 <sup>2</sup>
2	„ 17,4989	— 0,550 4019 <sup>6</sup>	— 0,752 7423 <sup>0</sup>	— 0,326 5699 <sup>7</sup>
3	„ 23,7826	— 0,455 6544 <sup>2</sup>	— 0,803 0060 <sup>0</sup>	— 0,348 3792 <sup>4</sup>
4	déc. 13,9803	— 0,119 9071 <sup>8</sup>	— 0,896 0463 <sup>5</sup>	— 0,388 7412 <sup>6</sup>
5	1893 janv. 10,0557	+ 0,346 0630 <sup>4</sup>	— 0,844 5285 <sup>7</sup>	— 0,366 3905 <sup>8</sup>
6	„ 18,1832	+ 0,475 2903 <sup>7</sup>	— 0,790 4797 <sup>3</sup>	— 0,342 9454 <sup>0</sup>
7	„ 21,1722	+ 0,520 4946 <sup>4</sup>	— 0,766 4405 <sup>7</sup>	— 0,332 5155 <sup>2</sup>
8	„ 30,3375	+ 0,649 5278 <sup>0</sup>	— 0,679 8312 <sup>8</sup>	— 0,294 9359 <sup>0</sup>
9	févr. 12,8632	+ 0,808 4478 <sup>0</sup>	— 0,520 7105 <sup>4</sup>	— 0,225 9084 <sup>8</sup>
10	mars 10,3789	+ 0,980 3751 <sup>5</sup>	— 0,149 7358 <sup>6</sup>	— 0,064 9639 <sup>6</sup>

Les coord. géoc. de la comète donnent sa position, rapportée à l'équinoxe moyen du commencement de l'année. D'après ce que nous avons dit dans le § 15 il faut calculer maintenant les réductions à l'équinoxe du jour à l'aide des mêmes tables du *Naut. Alm.*, qui ont servi à calculer l'éphéméride. Je trouve:

N <sup>o</sup> .	Réd. au jour.		N <sup>o</sup> .	Réd. au jour.	
	en $\alpha$ .	en $\delta$ .		en $\alpha$ .	en $\delta$ .
1	+ 25 <sup>h</sup> 90 <sup>2</sup>	+ 13 <sup>h</sup> 99 <sup>0</sup>	6	— 10 <sup>h</sup> 34 <sup>5</sup>	+ 0,51 <sup>9</sup>
2	+ 26,78 <sup>0</sup>	+ 14,27 <sup>8</sup>	7	— 9,84 <sup>8</sup>	+ 0,86 <sup>7</sup>
3	+ 27,92 <sup>0</sup>	+ 14,66 <sup>4</sup>	8	— 8,40 <sup>7</sup>	+ 1,93 <sup>1</sup>
4	+ 32,17 <sup>6</sup>	+ 16,22 <sup>8</sup>	9	— 6,44 <sup>4</sup>	+ 3,44 <sup>2</sup>
5	— 11,72 <sup>7</sup>	— 0,42 <sup>9</sup>	10	— 2,95 <sup>4</sup>	+ 5,93 <sup>8</sup>

Les positions apparentes doivent être corrigées pour l'effet des perturbations; il faut donc encore ajouter  $\sigma_\alpha$  et  $\sigma_\delta$  (voir § 26). De cette manière on obtient les positions *calculées*, qui figurent dans la tableau ci-dessous.

Positions calculées.

N°.	Asc. droite.	Décl.	N°.	Asc. droite.	Décl.
1	11 7' 56" 71 <sup>9</sup>	+ 38° 2' 11" 00	6	21 2' 9" 62 <sup>0</sup>	+ 33 38' 55" 66
2	10 41 52,40 <sup>8</sup>	+ 37 29 30,72	7	22 2 10,86 <sup>3</sup>	+ 33 39 12,41
3	10 30 24,91 <sup>7</sup>	+ 36 49 35,00	8	25 16 31,07 <sup>3</sup>	+ 33 45 28,04
4	12 8 7,69 <sup>5</sup>	+ 34 57 6,20	9	30 27 4,69 <sup>9</sup>	+ 34 6 43,35
5	18 28 35,66 <sup>3</sup>	+ 33 43 7,58	10	41 10 14,31 <sup>3</sup>	+ 35 10 27,03

Les positions *observées* seront déduites de l'éphéméride, en appliquant les corrections  $\Delta \alpha$  et  $\Delta \delta$ .

Positions observées.

N°.	Asc. droite.	Décl.	N°.	Asc. droite.	Décl.
1	11° 7' 56" 34	+ 38° 2' 11" 10	6	21° 2' 9" 19 <sup>5</sup>	+ 33° 38' 55" 75
2	10 41 52,60 <sup>5</sup>	+ 37 29 31,58	7	22 2 11,19	+ 33 39 12,58
3	10 30 25,72 <sup>5</sup>	+ 36 49 33,79	8	25 16 33,33	+ 33 45 28,27
4	12 8 8,23 <sup>5</sup>	+ 34 57 6,71	9	30 27 8,67	+ 34 6 43,89
5	18 28 34,96 <sup>5</sup>	+ 33 43 4,53	10	41 10 9,12	+ 35 10 28,32

En comparant les valeurs correspondantes on trouve les écarts  $v_{\alpha}$  et  $v_{\delta}$  (comptés dans le sens *Obs.—Calc.*); les premiers doivent être multipliés par le cosinus de la déclinaison pour les réduire en arc d'un grand cercle. Théoriquement on obtiendra les mêmes valeurs en substituant  $\Delta M_0$  etc. dans les 20 équations de condition (1<sup>er</sup> tableau de ces équ.). Voici les résultats de ces opérations.

Lieu.	Equations.		Calc. direct.		C. dir. — Equat.	
	cos $\delta$ . $v_{\alpha}$	$v_{\delta}$	cos $\delta$ . $v_{\alpha}$	$v_{\delta}$	cos $\delta$ . $v_{\alpha}$	$v_{\delta}$
1	— 0"30	— 0"06	— 0"30	+ 0"10	0"00	+ 0"16
2	+ 0,15	+ 0,67	+ 0,16	+ 0,86	+ ,01	+ ,19
3	+ 0,59	— 1,34	+ 0,65	— 1,21	+ ,06	+ ,13
4	+ 0,42	+ 0,42	+ 0,44	+ 0,51	+ ,02	+ ,09
5	— 0,66	— 3,11	— 0,58	— 3,05	+ ,08	+ ,06
6	— 0,46	— 0,02	— 0,35	+ 0,09	+ ,11	+ ,11
7	+ 0,24	+ 0,06	+ 0,27	+ 0,17	+ ,03	+ ,11
8	+ 1,75	+ 0,15	+ 1,87	+ 0,23	+ ,12	+ ,08
9	+ 3,17	+ 0,48	+ 3,29	+ 0,54	+ ,12	+ ,06
10	— 4,43	+ 1,21	— 4,24	+ 1,29	+ ,19	+ ,08

§ 32. *Deuxième approximation.*

L'accord entre le calcul direct et la substitution dans les équations est très satisfaisant: les deux résultats ne diffèrent que de 0"19 au plus, et la petitesse de ces différences prouve l'exactitude des équations initiales et des opérations numériques. Néanmoins je vais résoudre de nouveau les équations: 1° parce que toutes les différences (C. dir. — Equat.) sont positives; 2° parce que M. STONE, de l'Observatoire Radcliffe, avait eu l'obligeance de m'envoyer alors (déc. 1894) une observation faite à *Oxford* avec l'équatorial Barclay. Son équation personnelle étant inconnue, il faut attribuer, d'après le principe adopté, l'unité de poids. Son observation modifie un peu le 7<sup>me</sup> lieu normal, de sorte que les écarts deviennent:

$$\cos \delta. v_u = + 0''26 \quad v_\delta = + 0''21$$

Je n'ai pas changé le poids et la date moyenne de ce lieu; cela aurait nécessité un travail considérable, sans que l'exactitude se serait augmentée sensiblement.

Le premier membre de chaque équation demeurant le même, je ne donnerai que les nouveaux membres absolus.

*Equations de condition.* Multipliant  $\cos \delta. v_u$  et  $v_\delta$  par  $\sqrt{p}$  et divisant par l'unité d'erreur, il vient:

*a. Ascens. droites.*

$$\begin{array}{ll} C_1 = 8.52047_n & C_6 = 8.78314_n \\ C_2 = 8.13577 & C_7 = 8.49091 \\ C_3 = 8.71925 & C_8 = 9.08598 \\ C_4 = 8.27156 & C_9 = 9.16870 \\ C_5 = 8.26644_n & C_{10} = 9.07255_n \end{array}$$

*b. Déclinaisons.*

$$\begin{array}{ll} C_{11} = 7.93645 & C_{16} = 8.39436 \\ C_{12} = 8.76476 & C_{17} = 8.45419 \\ C_{13} = 8.81643_n & C_{18} = 8.15458 \\ C_{14} = 8.50055 & C_{19} = 8.37222 \\ C_{15} = 8.87021_n & C_{20} = 8.06840 \end{array}$$

*Equations normales.* Nous les désignerons par *N*. Arrangeant les inconnues dans le même ordre (*w, v, z, x, y, u*), on a:

$$\begin{array}{l} N_1 = + 0.035 \ 983 \\ N_2 = - 0.061 \ 457 \\ N_3 = + 0.085 \ 728 \\ N_4 = + 0.089 \ 141 \\ N_5 = + 0.068 \ 155 \\ N_6 = + 0.086 \ 910 \end{array}$$

et la somme des carrés des erreurs devient

$$[n\ n] = 0.076\ 515$$

*Elimination de  $w$ ,  $v$ ,  $z$  et  $x$ .* Les équations d'élimination seront désignées par  $E$ . Des équations  $N$  on tire :

$$\begin{aligned} E_w &= 8.556\ 0974 \\ E_v &= 8.506\ 2835_n \\ E_z &= 7.899\ 7476 \\ E_x &= 8.616\ 7224_n \\ [n\ n\ 4] &= 0.074\ 1336. \end{aligned}$$

*Elimination de  $y$  et  $u$ .* Des équations  $E$  on tirera les valeurs de  $w$ ,  $v$ ,  $z$  et  $x$ ; on trouve : <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} x &= 8.84628_n \\ z &= 9.02828 \\ v &= 8.13201 \\ w &= 7.95102 \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans les équations  $C$ , on trouve de nouvelles équations entre  $y$  et  $u$  :

*a. Ascens. droites.*

$$\begin{aligned} C'_1 &= 8.51587_n & C'_6 &= 8.90459_n \\ C'_2 &= 8.13497 & C'_7 &= 8.22295 \\ C'_3 &= 8.71473 & C'_8 &= 9.05304 \\ C'_4 &= 8.23055 & C'_9 &= 9.14687 \\ C'_5 &= 8.33276_n & C'_{10} &= 9.09260_n \end{aligned}$$

*b. Déclinaisons.*

$$\begin{aligned} C'_{11} &= 7.26007_n & C'_{16} &= 7.85266_n \\ C'_{12} &= 8.69870 & C'_{17} &= 8.10816 \\ C'_{13} &= 8.85785_n & C'_{18} &= 7.85986 \\ C'_{14} &= 3.38466 & C'_{19} &= 8.27418 \\ C'_{15} &= 8.88656_n & C'_{20} &= 8.03471 \end{aligned}$$

De ces équations se déduisent de nouvelles équations normales :

$$\begin{aligned} N'_1 &= -0.000\ 0351 \\ N'_2 &= -0.000\ 00460 \end{aligned}$$

et une nouvelle somme des carrés des erreurs :

$$[n'\ n'] = 0.0741314.$$

La relation  $[n'\ n'] = [n\ n\ 4]$  vérifie les calculs.

$N'_1$  et  $N'_2$  donnent les deux dernières équations d'élimination :

<sup>1)</sup> J'ai omis les termes en  $\eta$  et  $u$ .



$$E_y = 5.545\ 3071_n - 10$$

$$E_u = 3.989\ 7745_n - 10$$

et

$$[n' n' 2] = 0.074\ 1310.$$

*Les valeurs des inconnues.* Les 6 équations  $E$  donnent par la méthode des substitutions successives :

$$x = 8.545\ 7414_n$$

$$y = 6.966\ 9079_n$$

$$z = 9.192\ 2954$$

$$u = 8.912\ 1109_n$$

$$v = 8.252\ 7244$$

$$w = 8.074\ 2862$$

d'où l'on tire :

$$\Delta M_o = - 0''1148$$

$$\Delta \mu = - 0.0000\ 8039$$

$$\Delta \phi = + 0.4519$$

$$\Delta \pi' = - 0.4965$$

$$\Delta \oslash\oslash' = + 0.1675$$

$$\Delta i' = + 0.0507$$

*Les nouveaux éléments.* Ajoutons ces corrections aux éléments du système  $II$ ; il vient :

$$M_o = 73841''9900$$

$$\mu = 514''039\ 9965$$

$$\phi = 24^\circ 10' 45''970$$

$$\oslash\oslash' = 345\ 40\ 6.6625$$

$$\pi' = 343\ 49\ 0.3265$$

$$i' = 42\ 50\ 10.1077$$

En réduisant les éléments  $\oslash\oslash'$ ,  $\pi'$  et  $i'$  à l'écliptique moyenne de 1892.0, on trouve

$$\oslash\oslash = 331^\circ 41' 33''9840$$

$$\pi = 345\ 57\ 25.9324$$

$$i = 20\ 47\ 16.3315$$

Un tableau complet des éléments définitifs se trouve dans le § suivant.

### § 33. *Erreurs probables.*

Nous avons trouvé pour la somme définitive des carrés des erreurs [8.869 9998]. Pour la réduire en secondes d'arc, il faut la multiplier par le carré de l'unité d'erreur; il vient

$$[\Delta \Delta] = [1.810\ 2598] = 64''60.$$

L'erreur moyenne de l'unité de poids sera

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{[\Delta \Delta]}{m - \mu}}$$

où  $m$  désigne le nombre des équations, et  $\mu$  le nombre des inconnues. Nous avons  $m = 20$ ,  $\mu = 6$  et par suite :

$$\eta = \sqrt{\frac{[1.810\ 2598]}{14}} = [0.332\ 0659] = \pm 2''1482.$$

Soit  $\varepsilon$  l'erreur probable d'une observation de l'unité de poids :

$$\varepsilon = [9.828\ 9749] \eta = [0.161\ 0408] = \pm 1''4489.$$

Il faut calculer maintenant les poids des inconnues. On sait, que ces poids peuvent être calculés des équations normales, en substituant aux membres absolus les nombres 1 et 0, et en résolvant les équations ainsi modifiées six fois de suite. Il m'a semblé préférable de suivre la méthode symétrique, que von OPPOLZER a exposée dans le tome II de son ouvrage classique; pour la signification des symboles, et pour les expressions nécessaires je me permets de renvoyer le lecteur aux §§ 4 (p. 344) et 5 (p. 353) de ce tome. Les logarithmes des quantités auxiliaires  $A_1.....A_5$ ,  $B_2.....B_5$  etc. figurent dans le tableau suivant.

	A.	B.	C.	D.	E.
1	9,911 8565				
2	0,153 8721	0,322 2602			
3	9,037 3297 <sub>n</sub>	9,590 3932 <sub>n</sub>	0,121 0623 <sub>n</sub>		
4	8,834 2337	9,514 8361	0,669 3951 <sub>n</sub>	0,593 8619	
5	8,640 6752 <sub>n</sub>	8,957 3923 <sub>n</sub>	8,809 1757 <sub>n</sub>	9,943 9439 <sub>n</sub>	9,013 7937 <sub>n</sub>

Ces quantités, ainsi que les valeurs des inconnues, peuvent être vérifiées par les relations 8) de von OPPOLZER (II, p. 347); on trouve :

$$x = - 0.035\ 135$$

$$y = - 0.000\ 927$$

$$z = + 0.155\ 703$$

$$u = - 0.081\ 679$$

$$v = + 0.017\ 895$$

$$w = + 0.011\ 866$$

d'accord avec les valeurs du § précédent.

En faisant usage des expressions 10) (v. OPP., II, p. 356), où  $P_q$  désigne le poids de l'inconnue  $q$ , on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_x} &= 68723.496 \\ \frac{1}{P_y} &= 1157.7080 \\ \frac{1}{P_z} &= 6195.3122 \\ \frac{1}{P_{''}} &= 83625.06 \\ \frac{1}{P_v} &= 727.4869 \\ \frac{1}{P_w} &= 166.2162\end{aligned}$$

De ces poids on déduit les erreurs probables par 6 relations de la forme

$$\varepsilon(q) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{P_q}}$$

On trouve :

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= [2.579\ 5934] \\ \varepsilon(y) &= [1.692\ 8403] \\ \varepsilon(z) &= [2.057\ 0724] \\ \varepsilon(u) &= [2.622\ 2090] \\ \varepsilon(v) &= [1.591\ 9534] \\ \varepsilon(w) &= [1.271\ 3775]\end{aligned}$$

Ayant égard aux facteurs d'homogénéité (*voir* § 27) on en déduit :

$$\begin{aligned}\varepsilon(M_o) &= [1.623\ 7734] \\ \varepsilon(\mu) &= [9.160\ 9803] \\ \varepsilon(\phi) &= [1.049\ 6624] \\ \varepsilon(\pi') &= [1.935\ 8490] \\ \varepsilon(\circ\circ') &= [1.093\ 0534] \\ \varepsilon(i') &= [0.432\ 1475]\end{aligned}$$

Les trois dernières quantités doivent encore être rapportées à l'écliptique, si l'on veut donner les éléments de l'orbite dans la forme usuelle. Des relations connues entre  $\pi'$ ,  $\circ\circ'$ ,  $i'$  et  $\pi$ ,  $\circ\circ$ ,  $i$  on pourra déduire facilement des expressions pour  $\varepsilon(\pi)$ ,  $\varepsilon(\circ\circ)$  et  $\varepsilon(i)$ . Voici enfin les éléments définitifs avec leurs erreurs probables.

### Système III.

Ep. et osc. 1892 nov. 4.0 T.M.Gr.	
$M_o = 73841^{\circ}990$	Err. pr. $\pm 42''051$
$\mu = 514^{\circ}0399965$	$\pm 0''1448706$
$\log a = 0.559\ 3398$	$\pm 816$

$T_1 = 1892$ juin 13.349 719	$\pm 0^{\text{h}}09^{\text{m}}14^{\text{s}}.57$
$T_2 = 1899$ mai 9.554	$\pm 0^{\text{h}}7^{\text{m}}18^{\text{s}}$
$P = 2521.2046$ jours	$\pm 0^{\text{h}}7^{\text{m}}12^{\text{s}}$
$\phi = 24^{\circ}10'45''97$	$\pm 11''21$
$e = 0.4095956$	$\pm 496$
$i = 20^{\circ}47'16''33$	$\pm 5''74$
$\pi = 345\ 57\ 25.93$	$\pm 92''54$
$\Omega = 331\ 41\ 33.98$	$\pm 27''43$
$\omega = 14\ 15\ 51.95$	$\pm 88''38$

J'ai ajouté la date du retour au périhélie  $T_2$  pour mieux faire ressortir l'effet des perturbations, qui seront discutées dans le chapitre suivant.

Les éléments III laissent subsister dans les lieux normaux les écarts suivants, pris dans le sens Obs.—Calc.

$\cos \delta. v_u$			$\cos \delta. v_u$		
		$v_\delta$			$v_\delta$
1	$- 0''30$	$- 0''03$	6	$- 0''46$	$- 0''03$
2	$+ 0,16$	$+ 0,74$	7	$+ 0,14$	$+ 0,09$
3	$+ 0,64$	$- 1,33$	8	$+ 1,73$	$+ 0,12$
4	$+ 0,40$	$+ 0,39$	9	$+ 3,13$	$+ 0,43$
5	$- 0,68$	$- 3,17$	10	$- 4,43$	$+ 1,23$

Ces différences ont été déduites seulement des équations de condition; après toutes les vérifications il me semblait superflu de calculer directement les lieux normaux avec les éléments définitifs; seulement j'ai formé les sommes

$$[p_u \cos \delta. v_u] = + 0^{\text{h}}04 \quad [p_\delta \cdot v_\delta] = + 0^{\text{h}}02.$$

Pour la somme des carrés des erreurs, multipliés par leur poids, je trouve (exprimée en secondes):

$$[p v v] = 64''57$$

et de  $[n' n' 2]$  nous avons déduit dans ce paragraphe-ci

$$[n' n' 2] = [n n 6] = 64''60.$$

La différence de ces deux valeurs est tout à fait de l'ordre des erreurs du calcul.

### § 34. Remarques finales.

1°. Le lecteur se rappellera les expressions, d'après lesquelles nous avons attribué des poids aux lieux normaux. En égalant l'inverse de ce poids au carré de l'erreur probable (exprimée en



secondes d'arc), on suppose, que l'unité de poids corresponde à une erreur probable de 1"0000 <sup>1)</sup>. Or, nous avons déjà démontré (voir § 24), que les erreurs probables, telles qu'on les trouve en appliquant les préceptes de la méthode des moindres carrés aux écarts individuels des observations, seront sans doute trop petites. La valeur de  $\varepsilon$ , que nous venons de trouver (§ 33), confirme ces considérations. On objectera peut-être, que la dernière valeur a été trouvé d'après les mêmes principes, mais il ne faut que peu de réflexion pour comprendre, qu'elle mérite beaucoup plus de confiance. Dans le § 24, p. 98, nous avons indiqué sommairement les deux conditions principales, sur lesquelles se fonde la méthode des moindres carrés. La première: *que le nombre des observations soit infiniment grand*, elle n'est jamais remplie qu'approximativement; le nombre des observations surpassant de beaucoup le nombre des inconnues, la précision des résultats croît à peu près en raison de la racine carrée du premier nombre. Supposons, pour simplifier le cas, qu'une seule inconnue soit à déterminer, et que toutes les observations soient de la même précision. Alors, en désignant les divergences entre les observations individuelles et leur moyenne par  $\Delta$ , et l'erreur moyenne de la valeur conclue par  $m$ , on a :

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n-1}}$$

où  $n$  désigne le nombre des observations. Cette valeur n'étant que la meilleure approximation possible, on peut calculer l'erreur moyenne de  $m$  comme de toute autre quantité, qui est déduite d'observations. La théorie donne pour cette err. moy. de  $m$  l'expression suivante :

$$m' = m \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}$$

Or, les lieux normaux n'étant formés (en moyenne) que de la dixième partie de l'ensemble des observations, chaque valeur de  $\Delta \alpha$  ou de  $\Delta \delta$  ne repose que sur la vingtième partie de tout les écarts, et par suite les erreurs moyennes (et probables) de  $(\varepsilon)$  seront 4 ou 5 fois plus grandes que celle de la valeur définitive  $\varepsilon$ . Mais ce nombre doit encore être augmenté de plusieurs unités en considérant la seconde condition: *que les observations soient faites dans toutes les circonstances possibles*.

Peut-être on aurait attendu une marche plus régulière, plus systématique des erreurs finales, montrant deux périodes distinctes:

<sup>1)</sup> Cette erreur probable de l'unité de poids déduite a priori, sera désignée par  $(\varepsilon)$ .

du 8 nov. au 15 janv., et du 16 janv. au 13 mars. Seulement les 4 ou 5 dernières valeurs de  $\varpi$  montrent une certaine régularité, mais les erreurs accidentelles ont trop d'influence pour en déduire le rapport entre l'erreur systématique des observations et le degré d'affaiblissement de la comète. D'ailleurs les erreurs systématiques des lieux normaux résultent en parti de ce que plusieurs astronomes ont fourni des observations; la distribution de leurs observations étant très inégale, il ne résultera pas de la combinaison de leurs équations individuelles, une marche nettement prononcée dans les moyennes.

2°. Parmi les explications, que plusieurs astronomes ont proposées pour rendre compte du changement de l'aspect de la comète vers le milieu de janvier 1893, il y en a, qui supposaient des actions extérieures, dont l'effet devrait se montrer non seulement dans l'état physique de l'astre, mais aussi dans les éléments de son mouvement elliptique. Supposons par exemple, que ce changement fût causé par une collision avec un essaim de météorites, ou avec une petite planète encore inconnue, dont elle traversa l'orbite au même moment, que l'autre astre alla passer aussi le point d'intersection.

Depuis longtemps on a cessé de considérer l'espace planétaire comme un vide absolu; au contraire, elle est traversée dans toutes les directions par tant de millions de corpuscules, que NORMAN LOCKYER ne parle que du „meteoric plenum” (voir son *Meteoric Hypothesis*). De nombreuses collisions doivent avoir lieu, soit de ces corpuscules entre elles, soit avec les membres plus grands du système solaire. Nous-mêmes, nous avons été témoins, pour ainsi dire, de plusieurs rencontres du premier ordre; nous ne parlerons pas des météores plus ou moins isolées, provenant de points de radiation peu prononcées ou incertaines, mais on se rappellera par exemple le phénomène splendide du 27 novembre 1872, lorsque la Terre traversait la partie la plus dense de l'essaim des Biélides, et des milliers d'étoiles filantes émanaient en étincelles brillantes de la constellation d'Andromède.

Les masses de ces corpuscules sont trop insignifiantes pour altérer sensiblement le mouvement de la Terre. Mais il va sans dire, que la collision de deux corps à masses comparables modifiera leurs vitesses et les directions de leurs mouvements, et par suite les éléments de leurs orbites. En adoptant une telle hypothèse pour rendre compte du changement imprévu de l'éclat, il sera nécessaire d'en rechercher aussi les effets sur le mouvement de

l'astre. C'est M. Boss, le savant directeur de l'Observatoire d'*Albany* (Etats Unis), qui s'est occupé le premier de cette question (*Astr. Journal*, 292), et en commençant mes calculs relatifs à l'orbite définitive, je me proposais de l'élucider autant que possible.

J'avais déjà commencé les calculs nécessaires, mais, l'orbite définitive représentant toutes les observations avec une exactitude parfaitement suffisante, il me semblait peine perdue de continuer ces recherches. On trouve les erreurs, que l'orb. déf. laisse subsister dans les lieux normaux, dans le § précédent; en multipliant  $\varepsilon_u$  par  $15 \cos \delta$ , on trouve pour les erreurs probables *déduites a priori*:

N <sup>o</sup> .	$\cos \delta \cdot \varepsilon_u$	$\varepsilon_\delta$	N <sup>o</sup> .	$\cos \delta \cdot \varepsilon_u$	$\varepsilon_\delta$
1	$\pm 0''31$	$\pm 0''39$	6	$\pm 0''20$	$\pm 0''12$
2	0,39	0,50	7	0,28	0,25
3	0,42	0,63	8	0,52	0,55
4	0,80	0,55	9	0,75	0,78
5	1,07	1,39	10	1,22	3,73

La plupart des erreurs définitives restent au-dessous de ces erreurs probables, et les écarts des autres sont assez petits. D'ailleurs ces écarts auraient dû être bien grands pour justifier la conclusion importante, que les observations appartiennent réellement à deux orbites différentes.

Il y avait, en outre, un obstacle presque insurmontable, pour arriver à des résultats décisifs. Adoptons l'explication proposée, et supposons, que l'on ait tracé une courbe pour représenter les *vrais* écarts entre l'orbite provisoire et les positions observées. Cette courbe aura un *point saillant* au moment de la collision, la tangente variant brusquement de direction. Mais les écarts *vrais* ne sont pas encore les écarts *observés*; ceux-ci se composent (en faisant abstraction des erreurs *accidentelles*) des erreurs *vrais* et des erreurs *systématiques*, dont nous avons parlé plus haut (§ 24 et § 35, Remarque 1). Traçons maintenant une courbe quelconque, pour représenter hypothétiquement les erreurs de la dernière sorte. Cette courbe aura un point saillant précisément au même lieu que la première, et il sera donc impossible de démêler les effets de ces deux sortes d'erreurs.

Conclusion: *Une seule orbite suffit pour représenter les observations avant et après la catastrophe supposée; s'il y a encore une*

*trace de régularité dans la marche des valeurs définitives de  $v$ , cela peut provenir des erreurs systématiques des observations, aussi bien que d'une perturbation dans le mouvement.*

Au début je m'étais proposé de combiner 1° les lieux normaux 1—6, et 2° les lieux 5—10, et de calculer ensuite séparément les orbites les plus vraisemblables <sup>1)</sup>. En comparant les éléments analogues (avec leurs erreurs probables), on pourrait juger de la vraisemblance d'une perturbation quelconque. Il n'est pas impossible, que quelqu'un des lecteurs voudra pousser le recherche un peu plus loin, en soumettant la question au calcul indiqué. Pour faciliter ses recherches, je donnerai ici les équations normales, dans la forme usuelle, que j'ai obtenues pour les deux périodes.

1°. *Lieux normaux 1—6.*

$$\begin{array}{rcl}
 + 4.50450x + 0.43996y + 3.76707z + 4.10664u - 1.71535v + 0.33435w & = & - 0.62591 \\
 + 2.57276 + 0.82563 + 0.62146 - 1.75892 + 1.72309 & = & + 1.09296 \\
 + 3.23409 + 3.47482 - 1.70818 + 0.56832 & = & - 0.33448 \\
 + 3.76376 - 1.69380 + 0.44747 & = & - 0.46817 \\
 + 1.89991 - 1.51911 & = & - 0.90717 \\
 + 1.74564 & = & + 1.65601
 \end{array}$$

$$[n\ n] = 2.26309.$$

2°. *Lieux normaux 5—10.*

$$\begin{array}{rcl}
 + 2.76169x + 1.96950y + 2.64966z + 2.69443u - 1.48510v + 0.64210w & = & - 0.20348 \\
 + 1.70038 + 1.93394 + 1.94892 - 1.40369 + 1.02665 & = & + 0.63149 \\
 + 2.54885 + 2.58925 - 1.47470 + 0.69812 & = & - 0.08337 \\
 + 2.63135 - 1.47916 + 0.67615 & = & - 0.13153 \\
 + 1.31331 - 1.21268 & = & - 1.13598 \\
 + 1.61760 & = & + 2.08081
 \end{array}$$

$$[n\ n] = 3.25064.$$

Les membres connus ont été exprimés dans la même unité qu' auparavant :

$$\log v = 1.47013;$$

pour les relations entre  $x, y, \dots, w$  et les corrections des éléments voir § 27.

<sup>1)</sup> Les lieux normaux 5 et 6 figurent deux fois dans les équations; j'ai choisi cette combinaison, non seulement pour augmenter la précision des deux solutions en étendant les arcs géocentriques, mais surtout pour éliminer autant que possible l'effet fâcheux des erreurs systématiques. Il résultera sans doute une petite erreur de ce que la première orbite renferme une position, qui appartient réellement à une orbite différente, mais les positions dans le voisinage immédiat de la catastrophe n'étant pas encore sensiblement modifiées par l'action perturbatrice, nous pouvons tout à fait négliger de telles erreurs.



## IV. LES PERTURBATIONS.

§ 35. *Les éléments adoptés.*

Dans l'automne de 1893, en attendant la publication des dernières observations, j'ai déduit provisionnellement l'orbite définitive, pour obtenir la base nécessaire au calcul des perturbations. La méthode suivie était essentiellement la même que celle, que nous venons d'exposer. Le nombre des observations, que j'avais alors à ma disposition, s'élevait à 500 à peu près, dont une cinquantaine ne pouvait être utilisée, faute de positions exactes des étoiles de comparaison; en outre j'ai exclu les observations, faites à *Greenwich*, et quelques autres, qui étaient évidemment erronées.

Des différences *Obs.—Calc.* furent formées 31 moyennes; des courbes furent tracées pour représenter ces moyennes aussi bien que possible, et la comparaison des lectures de ces courbes avec les écarts individuels donna pour chaque observateur l'équation personnelle, et la valeur moyenne de ses erreurs accidentelles, d'après laquelle j'attribuai des poids de 0.1 jusqu' à 1.0. Ayant appliqué les équations personnelles, je formai 8 lieux normaux, que voici:

N <sup>o</sup> .	T. M. G.	$\Delta \alpha$	$\varepsilon_{\alpha}$	$\Delta \delta$	$\varepsilon_{\delta}$
1	1892 nov. 13,25	— 0 <sup>s</sup> 101	± 0 <sup>s</sup> 0303	— 0 <sup>"</sup> 16	± 0,178
2	„ 21,36	— 0,245	0,0350	— 1,13	0,532
3	déc. 13,54	— 0,322	0,0824	— 0,37	0,663
4	1893 janv. 9,60	— 0,700	0,1108	— 5,81	1,237
5	„ 19,64	— 0,507	0,0211	— 1,41	0,178
6	„ 27,11	— 0,309	0,0597	— 0,06	0,635
7	févr. 8,95	— 0,579	0,0743	+ 0,19	1,083
8	mars 10,44	— 1,806	0,1160	— 5,39	2,707

Les erreurs probables sont désignées par  $\varepsilon_{\alpha}$  et  $\varepsilon_{\delta}$ .

Le tableau suivant renferme les perturbations  $\sigma_{\alpha}$  et  $\sigma_{\delta}$ , et les poids, en attribuant l'unité de poids à une observation, dont l'erreur probable est de  $[0.43242] = \pm 2''7066$ .

N <sup>o</sup> .	$\sigma_{\alpha}$	$\sigma_{\delta}$	$\log \sqrt{p_{\alpha}}$	$\log \sqrt{p_{\delta}}$
1	+ 0 <sup>"</sup> 007	— 0 <sup>"</sup> 107	0,87854	1,18201
2	+ 0,022	— 0,358	0,80980	0,70671
3	— 0,006	— 1,574	0,42698	0,61080
4	— 0,638	— 3,617	0,29182	0,34005
5	— 1,144	— 4,393	1,01143	1,18298
6	— 1,633	— 5,047	0,56009	0,62962
7	— 2,706	— 6,083	0,46674	0,39783
8	— 6,294	— 8,234	0,27937	0,00000

Multipliant les équations de condition par  $\sqrt{\rho}$ , et introduisant les nouvelles inconnues

$$\begin{aligned} x &= [1.47954] \Delta M_0 \\ y &= [1.18169] \Delta \pi' \\ z &= [1.06852] \Delta \oslash' \\ u &= [1.13886] \Delta i' \\ v &= [1.49677] \Delta \phi \\ w &= [3.71164] \Delta \mu \end{aligned}$$

on trouve les équations de condition suivantes:

*a.* Ascensions droites.

$$\begin{aligned} 1) & 9,81149 x + 9,76137 y + 8,80570 z + 9,60546_n u + 9,67314 v + 9,63649 w = 9,21528_n \\ 2) & 9,71715 + 9,66891 + 8,66081 + 9,53761_n + 9,53589 + 9,54594 = 9,53785_n \\ 3) & 9,26254 + 9,22642 + 7,78929 + 9,13175_n + 9,16849 + 9,12641 = 9,28145_n \\ 4) & 9,05028 + 9,04231 + 7,90252_n + 8,93358_n + 9,02092 + 8,98843 = 9,46366_n \\ 5) & 9,74521 + 9,75049 + 8,80955_n + 9,62228_n + 9,74086 + 9,71399 = 0,00000_n \\ 6) & 9,27668 + 9,29249 + 8,45313_n + 9,14532_n + 9,29056 + 9,26827 = 9,21526_n \\ 7) & 9,15593 + 9,19077 + 8,47591_n + 9,00259_n + 9,19981 + 9,18592 = 9,42006_n \\ 8) & 8,91242 + 8,99371 + 8,43991_n + 8,66880_n + 9,01769 + 9,02459 = 9,76786_n \end{aligned}$$

*b.* Déclinaisons.

$$\begin{aligned} 9) & 0,00000 x + 0,00000 y + 0,00000 z + 0,00000 u + 0,00000 v + 0,00000 w = 8,15894_n \\ 10) & 9,51052 + 9,51267 + 9,49611_n + 9,52384 + 9,51041 + 9,50865 = 8,85116_n \\ 11) & 9,34411 + 9,35371 + 9,30798_n + 9,41990 + 9,35062 + 9,34466 = 8,94794 \\ 12) & 8,95016 + 8,97323 + 8,90550_n + 9,13473 + 8,97644 + 8,96801 = 8,93845_n \\ 13) & 9,74140 + 9,77072 + 9,69532_n + 9,97236 + 9,77717 + 9,76867 = 9,91516 \\ 14) & 9,14781 + 9,18214 + 9,10072_n + 9,41525 + 9,19104 + 9,18275 = 9,58568 \\ 15) & 8,84350 + 8,88694 + 8,79401_n + 9,17761 + 8,89992 + 8,89243 = 9,42591 \\ 16) & 8,25601 + 8,32075 + 8,19064_n + 8,76903 + 8,34096 + 8,33577 = 8,71128 \end{aligned}$$

*Remarques.* 1°. L'époque d'osculation est fixée au 4.0 novembre 1892 T.M.G.

2°. Les éléments  $\pi'$ ,  $\oslash'$  et  $i'$  se rapportent à l'équateur moyen de 1892.0.

3°.  $M_0$  désigne l'anomalie moyenne au moment adopté du passage au périhélie.

4°. Les membres connus ont été exprimés en unités de  $[1.74204]$  secondes.

5°. Le second membre de l'équation 15) est erroné; par mégarde j'ai pris  $v\delta = - \Delta\delta - \sigma\delta$  au lieu de  $+ \Delta\delta - \sigma\delta$ ; la différence est de  $0''38$ , mais cette erreur étant reconnue avant la 2<sup>me</sup> approximation, elle n'aura pas d'influence sur les résultats.

Des équations de condition se déduisent les équations normales

$$\begin{array}{rcccccccc}
+ 1.42474z & - 1.68385u & - 1.43152x & - 1.47719v & - 1.46303y & - 1.47132w & = & - 0.38080 \\
& + 2.68820 & + 0.99079 & + 1.16482 & + 1.07741 & + 1.19663 & = & + 1.62100 \\
& & + 2.60054 & + 2.43999 & + 2.55697 & + 2.36530 & = & - 0.52443 \\
& & & + 2.33389 & + 2.41956 & + 2.27058 & = & - 0.40496 \\
& & & & + 2.52385 & + 2.34879 & = & - 0.47339 \\
& & & & & + 2.21144 & = & - 0.35832
\end{array}$$

$$[n\ n] = 2.62594$$

De ces équations on déduit :

$$x = [0.44298] + [9.70091_n]y + [8.48311]w$$

$$z = [0.37227] + [8.83942_n]y + [8.92154]w$$

$$u = [0.34691] + [8.36864_n]y + [8.02876]w$$

$$v = [9.42986_n] + [9.73536_n]y + [9.98099_n]w$$

$$[n\ n\ 4] = + 0.284\ 76.$$

En substituant les valeurs de ces quatre inconnues dans les équations de condition, on trouve 16 nouvelles équations de condition entre  $y$  et  $w$ ; en posant

$$y' = [7.58771]y$$

$$w' = [7.76492]w$$

et en adoptant au lieu de notre unité  $\nu$  de [1.74204] secondes la nouvelle unité

$$\nu' = [9.56086]\nu$$

on trouve deux nouvelles équations normales entre  $y'$  et  $w'$ :

$$+ 1.52700\ y' + 1.50469\ w' = - 0.96351$$

$$+ 1.96932 \qquad - 0.60050$$

d'où l'on tire

$$y' = [0.126\ 3161_n]\nu'$$

$$w' = [9.855\ 5573\ ]\nu'$$

De  $y'$  et  $w'$  on déduit  $y$  et  $w$ , et ensuite les autres inconnues; on trouve:

$$\log x = 1.827\ 9332 \qquad \Delta M_{\odot} = + 2' \ 3''150$$

$$\log y = 2.099\ 4661_n \qquad \Delta \pi' = - 7 \ 36.895$$

$$\log z = 1.169\ 8276 \qquad \Delta \oslash' = + 1 \ 9.718$$

$$\log u = 0.751\ 2887 \qquad \Delta i' = + \ 22.619$$

$$\log v = 1.357\ 3610 \qquad \Delta \phi = + \ 40.053$$

$$\log w = 1.651\ 4973 \qquad \Delta \mu = + \ 0.480\ 7257$$

Les nouveaux éléments de l'orbite sont:

$$\text{Ep. d'osc. 1892 nov. 4.0 T.M.G.}$$

$$\log a = 0.559\ 3411.08$$

$$\log \mu = 2.710\ 9949.13$$

$$\log e = 9.612\ 3994.38$$

$$\oslash' = 345^{\circ} 40' 6''882^5$$

$$\omega' = 358 \ 8 \ 9.697$$

$$i' = 42 \ 50 \ 9.688$$

$$\text{T} = 1892 \text{ juin } 13.324\ 4766 \text{ T.M.Gr.}$$

Ces éléments laissent subsister dans les lieux normaux les erreurs que voici :

Lieux.	Equat. de cond.		Calc. direct.		C. dir. — Equat.	
	cos $\delta$ . $v_\alpha$	$v_\delta$	cos $\delta$ . $v_\alpha$	$v_\delta$	cos $\delta$ . $v_\alpha$	$v_\delta$
1	+ 0"14	— 0"03	+ 0"16	+ 0"11	+ 0"02	+ 0"14
2	— 0,21	— 0,18	— 0,19	— 0,01	+ ,02	+ ,17
3	— 0,18	+ 1,67	— 0,26	+ 1,77	— ,08	+ ,10
4	— 3,85	— 4,14	— 3,77	— 4,05	+ ,08	+ ,09
5	— 0,30	— 0,06	— 0,22	+ 0,02	+ ,08	+ ,08
6	+ 3,34	+ 1,15	+ 3,45	+ 1,22	+ ,11	+ ,07
7	+ 2,57	[+ 0,66]	+ 2,69	+ 1,13	+ ,12	[+ ,47]
8	— 3,99	— 5,66	— 3,81	— 5,60	+ ,18	+ ,06

Les deux valeurs de  $v_\delta$  du 7<sup>me</sup> lieu normal diffèrent de + 0"47; cette différence se réduit à + 0"09, en retranchant + 0"38 à cause de l'erreur, dont nous avons parlé plus haut. Une 2<sup>de</sup> approximation était nécessaire, pour faire disparaître cette erreur des résultats définitifs. Avec les quantités des colonnes 4 et 5 j'ai formé de nouvelles équations de condition; en divisant les membres connus par

$$\nu = [1.09823] \text{ sec.}$$

je trouve les équations normales

$$N_1 = - 0.27774$$

$$N_2 = + 0.27739$$

$$N_3 = + 0.34305$$

$$N_4 = + 0.35537$$

$$N_5 = + 0.35284$$

$$N_6 = + 0.35010$$

$$[n \ n] = 3.40222.$$

Des équations  $N_1.....N_4$  on déduit:

$$x = [9.84590_n] + f_x(y, w) ; u = [8.47655_n] + f_u(y, w)$$

$$z = [7.62266_n] + f_z(y, w) ; v = [9.95315_n] + f_v(y, w)$$

$$[n \ n \ 4] = 3.33092.$$

En substituant ces valeurs dans les équations de condition on trouve 16 nouvelles équations entre  $y'$  et  $w'$ , dont se déduisent deux équations normales:

$$N_1' = + 0.01246 \nu$$

$$N_2' = + 0.03572 \nu$$

$$[n' \ n'] = 3.33091$$

d'où

$$y' = [8.59450_n] \nu$$

$$w' = [8.68281_n] \nu$$

De ces valeurs on déduit:



$$\begin{array}{ll}
x = [0.66765] \nu & \Delta M_o = + 1''9335 \\
y = [1.00680]_n \nu & \Delta \pi' = - 8.3818 \\
z = [0.14255] \nu & \Delta \oslash' = + 1.4868 \\
u = [9.47108] \nu & \Delta i' = + 0.2694 \\
v = [0.17678]_n \nu & \Delta \phi = - 0.6001 \\
w = [0.91789] \nu & \Delta \mu = + 0.020160 \\
[n' n' 2] = [n n 6] = 3.329679.
\end{array}$$

De  $[n n 6]$  on déduit :

Erreur pr. d'une obs. de l'un. de poids =  $\pm 4''8798^5$

Voici enfin les éléments de l'orbite avec leurs erreurs probables :

#### Système IV.

Ep. et osc. 1892 nov. 4.0 T.M.G.

$$\begin{array}{ll}
M_o = 73859''454 & \text{Err. pr. } \pm 48''660 \\
\log a = 0.559\ 3297.51 & \pm 1315.28 \\
\mu = 514''057\ 779 & \pm 0''233\ 482 \\
\phi = 24^\circ 10' 54''776 & \pm 18''643 \\
\oslash = 331\ 41\ 37.004 & \pm 44''437 \\
i = 20\ 47\ 15.857 & \left. \begin{array}{l} \text{Eq. 1892.0} \\ \omega = 14\ 14\ 56.542^5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \pm 9''255 \\ \pm 2'18''635 \end{array}
\end{array}$$

Ces éléments laissent subsister les erreurs suivantes :

Lieu.	cos $\delta$ . $v_u$	$v_\delta$	Lieu.	cos $\delta$ . $v_u$	$v_\delta$
1	+ 0''16	- 0''04	5	- 0''35	- 0''08
2	- 0,15	- 0,13	6	+ 3,28	+ 1,11
3	- 0,24	+ 1,70	7	+ 2,48	+ 1,00
4	- 3,86	- 4,14	8	- 4,12	- 5,77

Multiplions les carrés de ces erreurs par  $p$ ; il vient

$$[p v v] = 523''39$$

et de  $[n' n' 2]$  il suit

$$[p v v] = 523''43.$$

#### § 36. Calcul des perturbations jusqu' à juillet 1896.

On aura remarqué au premier coup d'oeil, que les Eléments IV ne diffèrent pas notablement du système définitif III. Je n'avais pas attendu *a priori* un tel accord; dans le calcul définitif le nombre des observations employées est à peu près  $1\frac{1}{2}$  fois plus grand, les positions de presque toutes les étoiles de comparaison ont été revues et légèrement modifiées, ainsi que les équations personnelles et les

poids, etc. Les deux valeurs du mouvement diurne, qui est de la plus haute importance pour l'exactitude du calcul des perturbations, s'accordent entre les limites des erreurs probables, et de leur différence ne résulte qu'une différence de moins de 0.1 jour pour la durée de la révolution. Les autres écarts insignifiants ne peuvent non plus infirmer en rien les résultats relatifs aux perturbations, que j'ai basés sur les Eléments IV et que je vais exposer maintenant.

Rapportons toutes les positions au plan fixe de l'écliptique moyenne de 1892.0; à l'aide de logarithmes à 7 décimales nous trouvons pour les coordonnées rectangulaires héliocentriques de la comète:

$$x = [9.993\ 7611.55] \sin (v + 77^{\circ}31'21''157)$$

$$y = [9.977\ 6907.21] \sin (v - 15\ 41\ 48.528)$$

$$z = [9.550\ 1144.30] \sin (v + 14\ 14\ 56.542).$$

J'ai vérifié les constantes par

$$a^2 + b^2 + c^2 = + 2.000\ 0001$$

$$a^2 \cos 2\ A + b^2 \cos 2\ B + c^2 \cos 2\ C = - 0.000\ 000\ 03.$$

Le calcul des perturbations d'une comète, dont l'orbite elliptique n'a été déterminée que d'après les observations de sa première apparition, a toujours un caractère provisoire seulement, le but n'étant autre chose que de faciliter les recherches des astronomes pour retrouver l'astre lors de sa seconde apparition aussitôt que possible. La comète étant retrouvée et suffisamment observée, il est arrivé le temps de calculer exactement l'orbite et les perturbations en reliant ensemble les deux apparitions, et alors on tiendra compte de toutes les planètes, dont l'influence n'est pas tout à fait insensible, telles que Uranus et Neptune, et dans le cas de notre comète, Mercure.

Pour le calcul provisoire, dont il s'agit maintenant, je me suis contenté d'évaluer les perturbations causées par l'attraction de la Terre, de Jupiter et de Saturne; j'ai négligé celles exercées par Mars à cause de la petitesse de la masse de cette planète. Je me suis servi de la méthode d'ENCKE, avec les notations de von OPOLZER. En adoptant les masses

$$m_{\text{♁}} = 1:330\ 000$$

$$m_{\text{♃}} = 1:1047.879$$

$$m_{\text{♄}} = 1:3501.6$$

on trouve, en prenant des intervalles de 40 jours

Planète	$\log (\dot{w}k)^2 m_1$
♁	4.156 7689 — 10
♃	6.654 9717 — 10
♄	6.131 0163 — 10

Ces logarithmes doivent être augmentés de 7, si l'on veut obtenir les perturbations en unités de la 7<sup>me</sup> décimale.

Les coordonnées polaires héliocentriques des planètes troublantes ont été empruntées au Naut. Almanac; elles sont désignées par  $R_1$ ,  $\lambda_1$  et  $\beta_1$  et se rapportent à l'équinoxe apparent de la date. Je les ai réduites à l'écliptique et l'équinoxe moy. de 1892.0 d'après les expressions <sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned}\Pi &= 173^\circ 0' 12'' + [1.51650] \left( \frac{t_1 + t_0}{2} - 1850 \right) \\ \pi &= 0'' 4795 - [4.7924 - 10] \left( \frac{t_1 + t_0}{2} - 1850 \right) \\ l &= 50'' 23465 + [6.3537 - 10] \left( \frac{t_1 + t_0}{2} - 1850 \right) \\ \Delta\lambda &= -N - (t_1 - t_0) [l + \pi \operatorname{tg} \beta \cos(\lambda' - \Pi)] \\ \Delta\beta &= + (t_1 - t_0) \pi \sin(\lambda' - \Pi)\end{aligned}$$

où

$$t_0 = 1892.0; \quad t_1 = \text{époque de la position}$$

$$N = \text{nutation en longitude}$$

$$\lambda' = \lambda_1 - 50'' 235 \frac{t_1 - t_0}{2}.$$

A partir de 1897 le Naut. Alm. rapporte les coordonnées à l'équinoxe *moyen* de la date; dans leurs réductions il faut omettre le terme  $-N$ .

Les longitudes de la Terre, qui se trouvent en retranchant  $180^\circ$  des longitudes du Soleil, doivent encore être affranchies de l'effet de l'aberration de la lumière. Par mégarde, j'ai négligé cette correction pendant les premières années; elle n'a été appliquée qu'à partir de 1896 mars 8. Pour éviter toute cause de discontinuité dans les quantités finales, je n'ai appliqué à la position de cette date que  $\frac{1}{4}$ , à la position suivante  $\frac{1}{2}$ , à celle de 1896 mai 27  $\frac{3}{4}$ , et aux longitudes des époques suivantes la valeur totale de l'aberration. Cette précaution était peut-être un peu scrupuleuse et superflue, tous les termes provenant de l'action de la Terre étant très petits. Les latitudes de la Terre par rapport à l'écliptique de 1892.0 n'étant en maximum que de quelques secondes, je les ai négligées pour la même raison.

La publication de tous les détails du calcul entraînerait une longueur excessive; je me bornerai donc à donner quelques indications.

Quant aux formules, je me permets de renvoyer le lecteur à

<sup>1)</sup> Voir: VON OPPOLZER, *Lehrbuch*, II, p. 82.

VON OPPOLZER, II, p. 107 et ss. Les coordonnées non-troublées de la comète ont été calculées à 6 ou 7 décimales; en évaluant les perturbations de ces coordonnées j'ai tenu compte du terme  $+\frac{1}{24}\mathcal{F}(a+iw)$ , qui s'obtient par une seule extrapolation; le troisième terme  $-\frac{1}{240}\mathcal{F}''(a+iw)$  n'atteint jamais une unité de la 7<sup>me</sup> décimale. Les secondes différences figurent aussi dans les quantités  $S_{(x)}$ ,  $S_{(y)}$  et  $S_{(z)}$ , que VON OPPOLZER a introduites dans le calcul des termes indirects; elles ne peuvent être obtenues qu'approximativement par une double extrapolation. La valeur calculée de  $\mathcal{F}''$  différant d'une manière notable de la valeur adoptée, j'ai repris le calcul des termes indirects avec les valeurs de  $\mathcal{F}''$ , déduites (par une *seule* extrapolation) des valeurs fournies par la première approximation, mais l'influence sur les termes indirects n'a pas surpassé 2 unités de la neuvième décimale.

Toutes les quantités auxiliaires, telles que les coordonnées rectangulaires de la comète et des planètes troublantes, les termes directs des perturbations ( $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ), etc. ont été vérifiées en dressant des tableaux avec les différences jusqu'au 4<sup>me</sup>, 5<sup>me</sup> ou 6<sup>me</sup> ordre, les termes indirects par un second calcul.

Le calcul des quatre premières époques (1892 sept. 5 — 1893 janv. 3) a été repris plusieurs fois pour rendre la base des calculs aussi exacte que possible, quoique les perturbations d'ordre plus élevé (dépendantes des puissances et des produits des masses troublantes) soient très petites peu de temps avant et après l'époque d'osculation. J'en ai tenu compte en déduisant des premières approximations les perturbations des coordonnées de la comète, et en reprenant ensuite le calcul des termes directs et indirects avec les valeurs modifiées. En négligeant cette précaution, on atteindra à peu près la même précision dans les nouveaux éléments osculateurs, les termes négligés étant de même ordre que les petites erreurs provenant de la différence entre les éléments adoptés et le Système III; mais cet accroissement insignifiant du travail assurera mieux la régularité des dernières différences.

Les trois tableaux suivants donnent dans les 4<sup>mes</sup> colonnes les accélérations des perturbations  $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2\eta}{dt^2}$  et  $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ , exprimées en unités de la 7<sup>me</sup> décimale. La marche régulière des cinquièmes différences prouve l'exactitude des calculs, et même pour les dernières époques elles sont encore tellement petites, que j'aurais pu continuer probablement les calculs jusqu'au retour de la comète en 1899 avec les mêmes éléments osculateurs. Mais en reprenant (été 1894) la recherche de l'orbite la plus probable, je le jugeais



plus convenable de passer à de nouveaux éléments osculateurs. En corrigeant alors cette orbite osculatrice pour les différences entre les éléments définitifs et les éléments adoptés, on obtient à peu près le même résultat qu'en opérant dès le commencement avec les éléments définitifs, la différence étant d'ordre supérieur.

# Tableaux des Perturbations.

X.

Date.	${}^{II}f$	${}^I f$	$f = \frac{d^2 \xi}{dt^2}$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$	$f^V$
1892 juill. 27	+ 992,88	— 659,57						
sept. 5	+ 333,31	— 320,49	+ 339,08	— 18,03				
oct. 15	+ 12,82	+ 0,56	+ 321,05	— 14,39	+ 3,64	— 13,18		
nov. 24	+ 13,38	+ 307,22	+ 306,66	— 23,93	— 9,54	— 2,89	+ 10,29	— 2,28
1893 janv. 3	+ 320,60	+ 589,95	+ 282,73	— 36,36	— 12,43	+ 5,12	+ 8,01	— 5,47
févr. 12	+ 910,55	+ 836,32	+ 246,37	— 43,67	— 7,31	+ 7,66	+ 2,54	— 3,26
mars 24	+ 1746,87	+ 1039,02	+ 202,70	— 43,32	+ 0,35	+ 6,94	— 0,72	— 1,35
mai 3	+ 2785,89	+ 1198,40	+ 159,38	— 36,03	+ 7,29	+ 4,87	— 2,07	— 0,07
juin 12	+ 3984,29	+ 1321,75	+ 123,35	— 23,87	+ 12,16	+ 2,73	— 2,14	+ 0,77
juill. 22	+ 5306,04	+ 1421,23	+ 99,48	— 8,98	+ 14,89	+ 1,36	— 1,37	— 0,83
août 31	+ 6727,27	+ 1511,73	+ 90,50	+ 7,27	+ 16,25	— 0,84	— 2,20	— 1,03
oct. 10	+ 8239,00	+ 1609,50	+ 97,77	+ 22,68	+ 15,41	— 4,07	— 3,23	+ 0,67
nov. 19	+ 9848,50	+ 1729,95	+ 120,45	+ 34,02	+ 11,34	— 6,63	— 2,56	+ 3,68
déc. 29	+ 11578,45	+ 1884,42	+ 154,47	+ 38,73	+ 4,71	— 5,51	+ 1,12	+ 2,41
1894 févr. 7	+ 13462,87	+ 2077,62	+ 193,20	+ 37,93	— 0,80	— 1,98	+ 3,53	— 0,03
mars 19	+ 15540,49	+ 2308,75	+ 231,13	+ 35,15	— 2,78	+ 1,52	+ 3,50	— 2,26
avr. 28	+ 17849,24	+ 2575,03	+ 266,28	+ 33,89	— 1,26	+ 2,76	+ 1,24	— 0,80
juin 7	+ 20424,27	+ 2875,20	+ 300,17	+ 35,39	+ 1,50	+ 3,20	+ 0,44	— 0,99
juill. 17	+ 23299,47	+ 3210,76	+ 335,56	+ 40,09	+ 4,70	+ 2,65	— 0,55	— 0,89
août 26	+ 26510,23	+ 3586,41	+ 375,65	+ 47,44	+ 7,35	+ 1,21	— 1,44	— 1,64
oct. 5	+ 30096,64	+ 4009,50	+ 423,09	+ 56,00	+ 8,56	— 1,87	— 3,08	— 0,08
nov. 14	+ 34106,14	+ 4488,59	+ 479,09	+ 62,69	+ 6,69	— 5,03	— 3,16	+ 3,16
déc. 24	+ 38594,73	+ 5030,37	+ 541,78	+ 64,35	+ 1,66	— 5,03	0,00	+ 3,59
1895 févr. 2	+ 43625,10	+ 5636,50	+ 606,13	+ 60,98	— 3,37	— 1,44	+ 3,59	— 0,15
mars 14	+ 49261,60	+ 6303,61	+ 667,11	+ 56,17	— 4,81	+ 2,00	+ 3,44	— 2,02
avr. 23	+ 55565,21	+ 7026,89	+ 723,28	+ 53,36	— 2,81	+ 3,42	+ 1,42	— 1,23
juin 2	+ 62592,10	+ 7803,53	+ 776,64	+ 53,97	+ 0,61	+ 3,61	+ 0,19	— 0,66
juill. 12	+ 70395,63	+ 8634,14	+ 830,61	+ 58,19	+ 4,22	+ 3,14	— 0,47	— 0,83
août 21	+ 79029,77	+ 9522,94	+ 888,80	+ 65,55	+ 7,36	+ 1,84	— 1,30	— 1,65
sept. 30	+ 88552,71	+ 10477,29	+ 954,35	+ 74,75	+ 9,20	— 1,11	— 2,95	— 0,28
nov. 9	+ 99030,00	+ 11506,39	+ 1029,10	+ 82,84	+ 8,09	— 4,34	— 3,23	+ 2,64
déc. 19	+ 110536,39	+ 12618,33	+ 1111,94	+ 86,59	+ 3,75	— 4,93	— 0,59	+ 3,62
1896 janv. 28	+ 123154,72	+ 13816,86	+ 1198,53	+ 85,41	— 1,18	— 1,90	+ 3,03	+ 0,80
mars 8	+ 136971,58	+ 15100,80	+ 1283,94	+ 82,33	— 3,08	+ 1,93	+ 3,83	— 2,08
avr. 17	+ 152072,38	+ 16467,07	+ 1366,27	+ 81,18	— 1,15	+ 3,68	+ 1,75	— 1,51
mai 27	+ 168539,45	+ 17914,52	+ 1447,45	+ 83,71	+ 2,53	+ 3,92	+ 0,24	— 0,97
juill. 6	+ 186453,97	+ 19445,68	+ 1531,16	+ 90,16	+ 6,45	+ 3,19	— 0,73	+ 0,61
août 15	+ 205899,65	+ 21067,00	+ 1621,32	+ 99,80	+ 9,64	+ 3,07	— 0,12	
sept. 24	+ 226966,65	+ 22788,12	+ 1721,12	+ 112,51	+ 12,71			
nov. 3	+ 249754,77	+ 24621,75	+ 1833,63					
déc. 13	+ 274376,52							

## Y.

Date.	$II^f$	$I^f$	$f = \frac{d^2\eta}{dt^2}$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$	$f^V$
1892 juill. 27	+ 224,03	— 172,22						
sept. 5	+ 51,81	— 52,04	+ 120,18	— 65,77				
oct. 15	— 0,23	+ 2,37	+ 54,41	— 56,04	+ 9,73	+ 12,27	— 18,87	+ 13,70
nov. 24	+ 2,14	+ 0,74	— 1,63	— 34,04	+ 22,00	— 6,60	— 5,17	+ 8,52
1893 janv. 3	+ 2,88	— 34,93	— 35,67	— 18,64	+ 15,40	— 11,77	+ 3,35	+ 1,89
févr. 12	— 32,05	— 89,24	— 54,31	— 15,01	+ 3,63	— 8,42	+ 5,24	— 1,40
mars 24	— 121,29	— 158,56	— 69,32	— 19,80	— 4,79	— 3,18	+ 3,84	— 1,78
mai 3	— 279,85	— 247,68	— 89,12	— 27,77	— 7,97	+ 0,66	+ 2,06	— 0,74
juin 12	— 527,53	— 364,57	— 116,89	— 35,08	— 7,31	+ 2,72	+ 1,32	— 0,26
juill. 22	— 892,10	— 516,54	— 151,97	— 39,67	— 4,59	+ 4,04	+ 1,06	— 1,17
août 31	— 1408,64	— 708,18	— 191,64	— 40,22	— 0,55	+ 5,10	— 0,11	— 2,80
oct. 10	— 2116,82	— 940,04	— 231,86	— 35,67	+ 4,55	+ 4,99	— 2,91	— 1,82
nov. 19	— 3056,86	— 1207,57	— 267,53	— 26,13	+ 9,54	+ 2,08	— 4,73	+ 2,27
déc. 29	— 4264,43	— 1501,23	— 293,66	— 14,51	+ 11,62	— 2,65	— 2,46	+ 3,51
1894 févr. 7	— 5765,66	— 1809,40	— 308,17	— 5,54	+ 8,97	— 5,11	+ 1,05	+ 1,68
mars 19	— 7575,06	— 2123,11	— 313,71	— 1,68	+ 3,86	— 4,06	+ 2,73	— 1,07
avr. 28	— 9698,17	— 2438,50	— 315,39	— 1,88	— 0,20	— 1,33	+ 1,66	+ 0,17
juin 7	— 12136,67	— 2755,77	— 317,27	— 3,41	— 1,53	+ 0,33	+ 1,83	0,00
juill. 17	— 14892,44	— 3076,45	— 320,68	— 4,61	— 1,20	+ 2,16	+ 1,83	— 1,39
août 26	— 17968,89	— 3401,74	— 325,29	— 3,65	+ 0,96	+ 3,99	+ 0,44	— 2,77
oct. 5	— 21370,63	— 3730,68	— 328,94	+ 1,30	+ 4,95	+ 4,43	— 2,33	— 1,81
nov. 14	— 25101,31	— 4058,32	— 327,64	+ 10,68	+ 9,38	+ 2,10	— 4,14	+ 1,66
déc. 24	— 29159,63	— 4375,28	— 316,96	+ 22,16	+ 11,48	— 2,04	— 2,48	+ 3,16
1895 févr. 2	— 33534,91	— 4670,08	— 294,80	+ 31,60	+ 9,44	— 4,52	+ 0,68	+ 1,65
mars 14	— 38204,99	— 4933,28	— 263,20	+ 36,52	+ 4,92	— 3,84	+ 2,33	— 0,14
avr. 23	— 43138,27	— 5159,96	— 226,68	+ 37,60	+ 1,08	— 1,51	+ 2,19	— 0,31
juin 2	— 48298,23	— 5349,04	— 189,08	+ 37,17	— 0,43	+ 0,68	+ 1,88	+ 0,03
juill. 12	— 53647,27	— 5500,95	— 151,91	+ 37,42	+ 0,25	+ 2,56	+ 1,91	— 1,00
août 21	— 59148,22	— 5615,44	— 114,49	+ 40,23	+ 2,81	+ 4,47	+ 0,91	— 2,77
sept. 30	— 64763,66	— 5689,70	— 74,26	+ 47,51	+ 7,28	+ 5,38	— 1,86	— 2,21
nov. 9	— 70453,36	— 5716,45	— 26,75	+ 60,17	+ 12,66	+ 3,52	— 4,07	+ 1,59
déc. 19	— 76169,81	— 5683,03	+ 33,42	+ 76,35	+ 16,18	— 0,55	— 2,48	+ 3,25
1896 janv. 28	— 81852,84	— 5573,26	+ 109,77	+ 91,98	+ 15,63	— 3,03	+ 0,77	+ 1,78
mars 8	— 87426,10	— 5371,51	+ 201,75	+ 104,58	+ 12,60	— 2,26	+ 2,55	+ 0,25
avr. 17	— 92797,61	— 5065,18	+ 306,33	+ 114,92	+ 10,34	+ 0,29	+ 2,80	— 0,16
mai 27	— 97862,79	— 4643,93	+ 421,25	+ 125,55	+ 10,63	+ 3,09	+ 2,64	+ 0,98
juill. 6	— 102506,72	— 4097,13	+ 546,80	+ 139,27	+ 13,72	+ 5,73	+ 3,62	
août 15	— 106603,85	— 3411,06	+ 686,07	+ 158,72	+ 19,45	+ 9,35		
sept. 24	— 110014,91	— 2566,27	+ 844,79	+ 187,52	+ 28,80			
nov. 3	— 112581,18	— 1533,96	+ 1032,31					
déc. 13	— 114115,14							

## Z.

Date.	$''f$	$'f$	$f = \frac{d^2z}{dt^2}$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$	$f^V$
1892 juill. 27	— 420,03	+ 261,35						
sept. 5	158,68	+ 151,83	— 109,52	— 42,04				
oct. 15	6,85	+ 0,27	— 151,56	— 7,42	+ 34,62	— 13,35	— 1,74	+ 8,80
nov. 24	6,58	— 158,71	— 158,98	+ 13,85	+ 21,27	— 15,09	+ 7,06	— 1,57
1893 janv. 3	— 165,29	— 303,84	— 145,13	+ 20,03	+ 6,18	— 8,03	+ 5,49	— 2,68
févr. 12	469,13	— 428,94	— 125,10	+ 18,18	— 1,85	— 2,54	+ 2,81	— 1,89
mars 24	898,07	— 535,86	— 106,92	+ 13,79	— 4,39	+ 0,27	+ 0,92	— 0,91
mai 3	— 1433,93	— 628,99	— 93,13	+ 9,67	— 4,12	+ 1,19	+ 0,01	— 0,29
juin 12	— 2062,92	— 712,45	— 83,46	+ 6,74	— 1,73	+ 1,20	— 0,28	+ 0,01
juill. 22	— 2775,37	— 789,17	— 76,72	+ 5,01	— 0,81	+ 0,92	— 0,27	+ 0,10
août 31	— 3564,54	— 860,88	— 71,71	+ 4,20	— 0,16	+ 0,65	— 0,17	+ 0,11
oct. 10	— 4425,42	— 928,39	— 67,51	+ 4,04	+ 0,32	+ 0,48	— 0,06	— 0,21
nov. 19	— 5353,81	— 991,86	— 63,47	+ 4,36	+ 0,74	+ 0,42	— 0,27	+ 0,13
déc. 29	— 6345,67	— 1050,97	— 59,11	+ 5,10	+ 0,89	+ 0,15	— 0,14	+ 0,18
1894 févr. 7	— 7396,64	— 1104,98	— 54,01	+ 5,99	+ 0,90	+ 0,01	+ 0,04	+ 0,10
mars 19	— 8501,62	— 1153,00	— 48,02	+ 6,89	+ 0,95	+ 0,05	+ 0,14	— 0,27
avr. 28	— 9654,62	— 1194,13	— 41,13	+ 7,84	+ 1,14	+ 0,19	— 0,13	+ 0,14
juin 7	— 10848,75	— 1227,42	— 33,29	+ 8,98	+ 1,20	+ 0,06	+ 0,01	+ 0,03
juill. 17	— 12076,17	— 1251,73	— 24,31	+ 10,18	+ 1,27	+ 0,07	+ 0,04	— 0,05
août 26	— 13327,90	— 1265,86	— 14,13	+ 11,45	+ 1,38	+ 0,11	— 0,01	+ 0,06
oct. 5	— 14593,76	— 1268,54	— 2,68	+ 12,83	+ 1,48	+ 0,10	+ 0,05	— 0,01
nov. 14	— 15862,30	— 1258,39	+ 10,15	+ 14,31	+ 1,63	+ 0,15	+ 0,04	— 0,05
déc. 24	— 17120,69	— 1233,93	+ 24,46	+ 15,94	+ 1,82	+ 0,19	— 0,01	+ 0,03
1895 févr. 2	— 18354,62	— 1193,53	+ 40,40	+ 17,76	+ 2,00	+ 0,18	+ 0,02	+ 0,06
mars 14	— 19548,15	— 1135,37	+ 58,16	+ 19,76	+ 2,20	+ 0,20	+ 0,08	— 0,07
avr. 23	— 20683,52	— 1057,45	+ 77,92	+ 21,96	+ 2,48	+ 0,28	+ 0,01	+ 0,01
juin 2	— 21740,97	— 957,57	+ 99,88	+ 24,44	+ 2,77	+ 0,29	+ 0,02	+ 0,05
juill. 12	— 22698,54	— 833,25	+ 124,32	+ 27,21	+ 3,08	+ 0,31	+ 0,07	— 0,02
août 21	— 23531,79	— 681,72	+ 151,53	+ 30,29	+ 3,46	+ 0,38	+ 0,05	+ 0,02
sept. 30	— 24213,51	— 499,90	+ 181,82	+ 33,75	+ 3,89	+ 0,43	+ 0,07	— 0,03
nov. 9	— 24713,41	— 284,33	+ 215,57	+ 37,64	+ 4,39	+ 0,50	+ 0,04	+ 0,04
déc. 19	— 24997,74	— 31,12	+ 253,21	+ 42,03	+ 4,93	+ 0,54	+ 0,08	+ 0,07
1896 janv. 28	— 25028,86	+ 264,12	+ 295,24	+ 46,96	+ 5,55	+ 0,62	+ 0,15	— 0,01
mars 8	— 24764,74	+ 606,32	+ 342,20	+ 52,51	+ 6,32	+ 0,77	+ 0,14	0,00
avr. 17	— 24158,42	+ 1001,03	+ 394,71	+ 58,83	+ 7,23	+ 0,91	+ 0,14	+ 0,08
mai 27	— 23157,39	+ 1454,57	+ 453,54	+ 66,06	+ 8,28	+ 1,05	+ 0,22	+ 0,53
juill. 6	— 21702,82	+ 1974,17	+ 519,60	+ 74,34	+ 9,55	+ 1,27	+ 0,75	
août 15	— 19728,65	+ 2568,11	+ 593,94	+ 83,89	+ 11,57	+ 2,02		
sept. 24	— 17160,54	+ 3245,94	+ 677,83	+ 95,46				
nov. 3	— 13914,60	+ 4019,23	+ 773,29					
déc. 13	— 9895,37							



*Remarque.* Les nombres **gras** indiquent les constantes initiales, calculées d'après les formules du § 25, p. 102.

### § 37. Nouveaux éléments osculateurs.

Il y a deux méthodes différentes pour passer aux nouveaux éléments: 1° des perturbations on déduit les écarts de ces éléments sur les anciens; en général, à cause de la petitesse de ces écarts, un calcul à 6 décimales suffit pour être sûr de la deuxième décimale de la seconde; 2° des coordonnées et des vitesses troublées on dérive directement les éléments; cette méthode exige l'emploi de plus de décimales. En choisissant la dernière méthode j'ai fait usage du *Thesaurus* de VÉGA à 10 décimales.

Nous fixons la nouvelle époque d'osculation au 26.0 juillet 1896 T.M.Gr.; on trouve

$$M_{\circ} = 772978^{\circ}0334.$$

De  $\mu = 514^{\circ}057779$  on déduit

$$\log a = 0.559\ 3297\ 594.$$

Calculons de nouveau les constantes de GAUSS par rapport à l'écliptique de 1892.0:

$$\log a = 9.993\ 7611\ 403 \quad ; \quad A = +\ 63^{\circ}16'24''6188$$

$$\log b = 9.977\ 6907\ 121 \quad ; \quad B = -\ 29\ 56\ 45.0724$$

$$\log c = 9.550\ 1144\ 297 \quad ; \quad C = 0.$$

Par les formules connues on trouve les coordonnées suivantes:

$$x_{\circ} = -\ 4.891\ 2268\ 96$$

$$y_{\circ} = -\ 0.044\ 0132\ 50$$

$$z_{\circ} = -\ 0.895\ 1820\ 35$$

En prenant pour unité de temps un intervalle de  $w$  jours, on a pour le calcul des vitesses non-troublées les expressions:

$$\gamma \sin \Gamma = \sin v \quad \frac{dx_{\circ}}{dt} = a f \cos (A + F)$$

$$\gamma \cos \Gamma = \cos v + e \quad \frac{dy_{\circ}}{dt} = b f \cos (B + F)$$

$$F = \Gamma + \omega \quad \frac{dz_{\circ}}{dt} = c f \cos F$$

$$f = \frac{wk}{\sqrt{p}} \gamma$$

Je trouve:

$$\frac{dx_{\circ}}{dt} = +\ 0.060\ 1229\ 87$$

$$\frac{dy_{\circ}}{dt} = -\ 0.227\ 8968\ 88$$

$$\frac{dz_{\circ}}{dt} = -\ 0.065\ 3463\ 71$$

Pour vérifier ces nombres on peut se servir des tableaux des coordonnées avec leurs différences, dont j'ai parlé dans le § précédent. Les coordonnées s'obtiennent par une simple interpolation; pour le calcul des vitesses on se servira de

$$\left(\frac{dx_o}{dt}\right)_{i+\frac{1}{2}} = f_x^I(i+\frac{1}{2}) - \frac{1}{24} f_x^{III}(i+\frac{1}{2}) + \frac{1}{24} f_x^{IV}(i+\frac{1}{2}) - \frac{71}{1920} f_x^V(i+\frac{1}{2}) + \dots$$

et deux expressions analogues pour  $\frac{dy_o}{dt}$  et  $\frac{dz_o}{dt}$ . Je trouve :

$$x_o = -4.891\ 2269 \quad \frac{dx_o}{dt} = -0.060\ 1235$$

$$y_o = -0.044\ 0133 \quad \frac{dy_o}{dt} = +0.227\ 8970$$

$$z_o = -0.895\ 1820 \quad \frac{dz_o}{dt} = +0.065\ 3462$$

L'accord des vitesses n'étant pas très satisfaisant, j'ai répété le premier calcul avec 7 déc.; je trouvais les mêmes valeurs à quelques unités de la 9<sup>me</sup> déc. près.

Les perturbations des coordonnées et des vitesses se calculent par

$$\int \int f^{(i+\frac{1}{2})}(x) dx^2 = f_x^I(i+\frac{1}{2}) - \frac{1}{24} f_x^{III}(i+\frac{1}{2}) + \frac{17}{1920} f_x^{IV}(i+\frac{1}{2}) - \frac{367}{193536} f_x^{IV}(i+\frac{1}{2}) + \dots$$

$$\int f^{(i+\frac{1}{2})}(x) dx = f_x^I(i+\frac{1}{2}) + \frac{1}{24} f_x^{III}(i+\frac{1}{2}) - \frac{17}{5760} f_x^{III}(i+\frac{1}{2}) + \frac{367}{967680} f_x^V(i+\frac{1}{2}) + \dots$$

*Remarque.* Les différences d'ordre *pair*, qui figurent dans la première expression, désignent des moyennes arithmétiques de deux valeurs consécutives.

On trouve :

$$\xi = +0.019\ 6111\ 21 \quad \frac{d\xi}{dt} = +0.001\ 9449\ 43$$

$$\eta = -0.010\ 4580\ 83 \quad \frac{d\eta}{dt} = -0.000\ 4091\ 34$$

$$\zeta = -0.002\ 0738\ 86 \quad \frac{d\zeta}{dt} = +0.000\ 1977\ 26$$

En posant  $\frac{dx_o}{dt} = x'_o$  etc., on a

$$\begin{aligned} x &= x_o + \xi & x' &= x'_o + \xi' \\ y &= y_o + \eta & y' &= y'_o + \eta' \\ z &= z_o + \zeta & z' &= z'_o + \zeta' \end{aligned}$$

Il vient:

$$\begin{aligned} x &= -4.817\ 6157\ 75 & x' &= +0.062\ 0679\ 30 \\ y &= -0.054\ 4713\ 33 & y' &= -0.228\ 3060\ 22 \\ z &= -0.897\ 2559\ 21 & z' &= -0.065\ 1486\ 45 \end{aligned}$$

Substituons ces valeurs dans les expressions

$$\begin{aligned} wk \sqrt{p} \cos i &= x y' - x' y \\ wk \sqrt{p} \sin i \sin \Omega &= y z' - y' z \\ wk \sqrt{p} \sin i \cos \Omega &= x z' - x' z \end{aligned}$$

Il vient:

$$\begin{aligned} \Omega &= 331^\circ 38' 58'' 9057 \\ i &= 20\ 48\ 22.1586 \\ \log p &= 0.478\ 3084\ 420 \end{aligned}$$

Ensuite on a:

$$\begin{aligned} r \cos u &= x \cos \Omega + y \sin \Omega \\ r \sin u &= y \cos \Omega \cos i - x \sin \Omega \cos i + z \sin i \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} u &= 210^\circ 39' 27'' 5188 \\ \log r &= 0.694\ 9432\ 570. \end{aligned}$$

Calculant  $r$  d'après l'expression  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , je trouve exactement la même valeur.

Pour calculer l'anomalie vraie et l'excentricité on a

$$\begin{aligned} \sin \phi \sin v &= \frac{\sqrt{p}}{w k r} (x x' + y y' + z z') \\ \sin \phi \cos v &= \frac{p}{r} - 1 \end{aligned}$$

Ces expressions donnent

$$\begin{aligned} v &= 196^\circ 41' 36'' 61245 \\ \phi &= 24\ 12\ 25.12348 \\ \log e &= 9.612\ 8200\ 064 \end{aligned}$$

Ensuite on a:

$$\begin{aligned} a &= \frac{p}{\cos^2 \phi} = [0.558\ 2519\ 286] \\ \mu &= \frac{k''}{a^{3/2}} = 515'' 9750\ 2611 \\ E &= 205^\circ 33' 33'' 6024 \\ M &= 776503'' 3738 \\ \omega &= u - v = 13^\circ 57' 50'' 9064 \end{aligned}$$

Pour vérifier les calculs, et surtout la valeur trouvée de  $\mu$ , je vais calculer  $\Delta \mu$  d'après les formules de VON OPP. II 104:

$$(wk)^2 A = \xi' (2x_o' + \xi') + \eta' (2y_o' + \eta') + \zeta' (2z_o' + \zeta')$$

$$B = \xi (2x_o + \xi) + \eta (2y_o + \eta) + \zeta (2z_o + \zeta)$$

$$P = A + \frac{2B}{rr_o (r + r_o)}$$

$$q = \frac{a_o P}{2 (1 - a_o P)}$$

$$\Delta\mu = -f q \mu$$

On prendra  $f$  (avec l'argument  $q$ ) des tables d'ENCKE ou de VON OPPOLZER. Je trouve, en faisant usage des tables de SCHRÖN à 7 décimales :

$$\log A = 6.925\ 1457.33 \quad - 10$$

$$\log B = 9.271\ 1745.50_n \quad - 10$$

$$\log P = 6.835\ 9753.56_n \quad - 10$$

$$\log q = 7.093\ 1972.84_n \quad - 10$$

$$\Delta\mu = + 1''9172\ 471$$

$$\mu = 515''9750\ 261$$

Les deux valeurs du moyen mouvement diurne s'accordent donc parfaitement.

Voici enfin le nouveau système des éléments :

#### Système V.

Ep. et Osculation: 1896 juillet 26.0 T.M.Gr.

$$M_o = 776\ 503''3738$$

$$\mu = 515''975\ 0261$$

$$\phi = 24^\circ 12' 25''1235$$

$$\oslash = 331\ 38\ 58.9057$$

$$i = 20\ 48\ 22.1586 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Equinoxe de 1892.0}$$

$$\omega = 13\ 57\ 50.9064 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

Ce système correspond aux éléments IV; en comparant les valeurs correspondantes, on trouve les perturbations, que les éléments ont subies :

$$\Delta M_o = + 3525''340$$

$$\Delta \mu = + 1''917\ 2471$$

$$\Delta \phi = + 1' 30''35$$

$$\Delta \oslash = - 2\ 38.10$$

$$\Delta i = + 1\ 6.30$$

$$\Delta \omega = - 17\ 5.64$$

$\Delta M_o$  se rapporte à la nouvelle époque. En appliquant les perturbations aux éléments définitifs (Système III) nous trouvons :



## Système VI.

Ep. et Oscul. 1896 juillet 26.0 T.M.Gr.

$$\begin{aligned}
M_0 &= 776\ 461^{\circ}726 \\
\log a &= 0.558\ 2619\ 07 \\
\mu &= 515^{\circ}957\ 2436 \\
\phi &= 24^{\circ}12' 16''32 \\
\pi &= 345\ 37\ 42.19 \\
\oslash &= 331\ 38\ 55.88 \\
\omega &= 13\ 58\ 46.31 \\
i &= 20\ 48\ 22.63
\end{aligned}
\left. \vphantom{\begin{aligned} \pi \\ \oslash \\ \omega \\ i \end{aligned}} \right\} \text{Equinoxe de 1892.0}$$

De  $M_0$  on déduit aisément pour la date du retour au périhélie :

$$T_2 = 1899 \text{ avril } 28.941;$$

la comparaison avec le *Système III* (§ 33) fera voir une anticipation de 10.613 jours.§ 38. *Les perturbations de 1896 jusqu' à 1899.*

Pour ramener les éléments  $\pi$ ,  $\oslash$  et  $i$  à l'écliptique et à l'équinoxe moyen de 1899.0 je me sers des expressions 24) de von OPPOLZER, Bd. I, S. 206; je trouve :

$$\begin{aligned}
\pi &= 345^{\circ}43'33''68 \\
\oslash &= 331\ 44\ 50.85 \\
i &= 20\ 48\ 25.73
\end{aligned}
\left. \vphantom{\begin{aligned} \pi \\ \oslash \\ i \end{aligned}} \right\} \text{Equinoxe de 1899.0}$$

Afin de rendre mon travail aussi complet que possible, j'ai continué le calcul des perturbations jusqu' à 1899; faute d'éphémérides planétaires j'ai dû m'arrêter au commencement de cette année. La comète devant passer son périhélie dans la seconde moitié d'avril 1899, sans doute elle pourra être retrouvée à l'aide des éléments obtenus, à moins que l'éclat ne soit trop faible pour montrer l'astre dans les lunettes ordinaires.

J'ai effectué les calculs d'après la méthode de la variation des constantes. A cause de la petitesse de l'excentricité la comète sera peut-être observable pendant deux oppositions consécutives (1898 et 1899), et la méthode d'ENCKE exigerait alors deux fois le calcul d'éléments osculateurs, ce qui formerait un travail assez considérable. La comète étant retrouvée en 1898, on pourra corriger les éléments, surtout le moyen mouvement diurne, et les éphémérides pour l'opposition de 1899 seront obtenues avec une précision presque absolue.

La plupart des astronomes se permettent de considérer les éléments comme constants pendant un certain nombre d'intervalles,

plus ou moins grand selon la grandeur des perturbations. Les dates des changements exigeant deux calculs, avec les anciens et les nouveaux éléments, cette abréviation est plutôt apparente que réelle; en outre on néglige en partie les perturbations du second ordre. Quoique les perturbations n'atteignent pas des valeurs considérables, j'ai employé pour chaque époque les éléments osculateurs de la date considérée, calculés à l'aide de formules (2) de VON OPPOLZER II, p. 68. Le second terme de la variation de l'anomalie moyenne, qui dépend de la variation de  $\mu$ , se calcule d'après

$$\int dt \int \frac{\partial \mu}{\partial \tau} d\tau = {}''\mathcal{F}[a + (i + 1)w] + \frac{1}{12} \mathcal{F}[a + (i + 1)w]$$

La valeur de  $\mathcal{F}$  se trouve avec une approximation suffisante par une seule extrapolation. Je n'ai pas tenu compte du petit terme  $-\frac{1}{240} \mathcal{F}''[a + (i + 1)w]$ , qui n'ajouterait jamais 0"01 à l'anomalie moyenne.

J'ai adopté des intervalles de 40 jours, en prenant pour première époque 1896 mai 27; les époques initiales ont été calculées avec un soin particulier pour tenir compte des perturbations du 2<sup>e</sup> ordre. J'ai emprunté les positions héliocentriques de Jupiter et de Saturne aux *Nautical Almanacs*; elles ont été réduites à l'équinoxe moyen de 1899.0 à l'aide des formules connues (voir § 36, p. 128) L'action de la Terre, qui est assez insignifiante, a été négligée; en outre un intervalle de 40 jours est un peu grand pour cette planète à cause de la brièveté de sa révolution.

Les coordonnées de la planète perturbatrice ont été rapportées à trois axes rectangulaires: 1<sup>o</sup> le rayon vecteur de la comète, 2<sup>o</sup> une perpendiculaire à ce rayon, dirigée dans le sens du mouvement, 3<sup>o</sup> une perpendiculaire au plan de l'orbite. Soient

$\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  les coord. héliocentriques de la planète troublante,  
rapp. à 3 axes parallèles aux précédents;  
 $m_1, r_1$  sa masse et sa distance au Soleil;  
 $\rho$  sa distance à la comète.

Les forces perturbatrices parallèles aux axes sont

$$\begin{aligned} R &= \gamma \left( \frac{\xi_1 - r}{\rho^3} - \frac{\xi_1}{r_1^3} \right) \\ T &= \gamma K \eta_1 \\ Z &= \gamma K \zeta_1 \end{aligned}$$

où

$$\gamma = \frac{(w k) m_1}{\text{arc } 1'' \sqrt{p}} \quad K = \frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}$$

Les variations des éléments se calculent d'après les formules :

$$\frac{d i}{d t} = r \cos u . Z$$

$$\frac{d \oslash \oslash}{d t} = r \sin u \operatorname{cosec} i . Z$$

$$\frac{d \pi}{d t} = -\frac{p \cos v}{\sin \phi} R + (p+r) \frac{\sin v}{\sin \phi} T + r \sin u \operatorname{tg} \frac{1}{2} i . Z$$

$$\frac{d_1 M}{d t} = (p \cot \phi \cos v - 2 r \cos \phi) R - (p+r) \cot \phi \sin v . T$$

$$\frac{d \mu}{d t} = -\frac{3 k w}{\sqrt{a}} \sin \phi \sin v . R - \frac{3 k w}{\sqrt{a}} \frac{p}{r} T$$

$$\frac{d \phi}{d t} = a \cos \phi \sin v . R + a \cos \phi (\cos E + \cos v) T.$$

Dans ces formules  $k$  est la constante du système solaire, et  $u$  est l'argument de la latitude; la signification des autres symboles est connue.

### § 39. Tableaux des perturbations.

D'après les formules du § précédent, j'ai calculé les perturbations des éléments  $i$ ,  $\oslash \oslash$ ,  $M$ ,  $\pi$  et  $\phi$  avec des logarithmes à 7 décimales, en tenant compte de la 5<sup>me</sup> décimale de la seconde d'arc; la variation de  $\mu$  a été calculée jusqu'à 0"000 001 près. Ci-dessous je reproduis les tableaux, que j'ai obtenus; quoique je ne puisse répondre de l'exactitude absolue des dernières décimales, je donne tous les nombres, tels que le calcul me les a fournis. Les nombres en chiffres **gras** représentent les constantes initiales, calculées d'après les formules connues de l'intégration numérique.

# Tableaux des Perturbations

de 1896 mai 27 jusqu'à 1898 décembre 3.

## I. JUPITER.

i.

Date.	$1f$	$\frac{di}{dt}$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$	$f^V$
1896 avril 17	— 3"46700	+ 1'93004	— 0"37612	— 0"02980	+ 0"01642	+ 0"00276	— 0"00144
mai 27	— 1,53696	+ 1,55392	— ,40592	— ,01338	+ ,01918	+ 132	— 159
juillet 6	+ 0,01696	+ 1,14800	— ,41930	+ ,00580	+ ,02050	— 27	— 216
août 15	+ 1,16496	+ 0,72870	— ,41350	+ ,02630	+ ,02023	— 243	— 179
sept. 24	+ 1,89366	+ 0,31520	— ,38720	+ ,04653	+ ,01780	— 422	— 167
nov. 3	+ 2,20886	— 0,07200	— ,34067	+ ,06433	+ ,01358	— 589	— 115
déc. 13	+ 2,13686	— 0,41267	— ,27634	+ ,07791	+ ,00769	— 704	— 17
1897 janvier 22	+ 1,72419	— 0,68901	— ,19843	+ ,08560	+ ,00065	— 721	+ 51
mars 3	+ 1,03518	— 0,88744	— ,11283	+ ,08625	— ,00656	— 670	+ 136
avril 12	+ 0,14774	— 1,00027	— ,02658	+ ,07969	— ,01326	— 534	+ 192
mai 22	— 0,85253	— 1,02685	+ ,05311	+ ,06643	— ,01860	— 342	+ 216
juillet 1	— 1,87938	— 0,97374	+ ,11954	+ ,04783	— ,02202	— 126	+ 212
août 10	— 2,85312	— 0,85420	+ ,16737	+ ,02581	— ,02328	+ 86	+ 199
sept. 19	— 3,70732	— 0,68683	+ ,19318	+ ,00253	— ,02242	+ 285	+ 162
oct. 29	— 4,39415	— 0,49365	+ ,19571	— ,01989	— ,01957	+ 447	+ 118
déc. 8	— 4,88780	— 0,29794	+ ,17582	— ,03946	— ,01510	+ 565	+ 89
1898 janvier 17	— 5,18574	— 0,12212	+ ,13636	— ,05456	— ,00945	+ 654	+ 58
février 26	— 5,30786	+ 0,01424	+ ,08180	— ,06401	— ,00291	+ 712	+ 19
avril 7	— 5,29362	+ 0,09604	+ ,01779	— ,06692	+ ,00421	+ 731	— 7
mai 17	— 5,19758	+ 0,11383	— ,04913	— ,06271	+ ,01152	+ 724	
juin 26	— 5,08375	+ 0,06470	— ,11184	— ,05119	+ ,01876		
août 5	— 5,01905	— 0,04714	— ,16303	— ,03243			
sept. 14	— 5,06619	— 0,21017	— ,19546				
oct. 24	— 5,27636	— 0,40563					
déc. 3	— 5,68199						
1899 janvier 12							



Ω

Date.	$I_f$	$\frac{d\Omega}{dt}$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$	$f^V$
1896 avril 17	—	+ 2"71402	— 0"26106	— 0"16719	+ 0"00239	+ 0"01267	+ 0"00087
mai 27	—	+ 2,45296	— ,42825	— ,16480	+ ,01506	+ ,01354	— 19
juillet 6	—	+ 0,01785	— ,59305	— ,14974	+ ,02860	+ ,01335	— 239
août 15	+	+ 2,04256	— ,74279	— ,12114	+ ,04195	+ ,01096	— 351
sept. 24	+	+ 3,47422	— ,86393	— ,07919	+ ,05291	+ ,00745	— 517
nov. 3	+	+ 4,16309	— ,94312	— ,02628	+ ,06036	+ ,00228	— 614
déc. 13	+	— 0,17506	— ,96040	+ ,03408	+ ,06264	— ,00386	— 578
1897 janvier 22	+	— 1,11818	— ,93532	+ ,09672	+ ,05878	— ,00964	— 516
mars 3	+	— 2,08758	— ,83860	+ ,15550	+ ,04914	— ,01480	— 359
avril 12	—	— 3,02290	— ,68310	+ ,20464	+ ,03434	— ,01839	— 137
mai 22	—	— 3,86150	— ,47846	+ ,23898	+ ,01595	— ,01976	— 20
juillet 1	—	— 4,54460	— ,23948	+ ,25493	— ,00381	— ,01956	— 208
août 10	—	— 5,02306	+ ,47846	+ ,25493	— ,02337	— ,01748	— 329
sept. 19	—	— 5,26254	— ,23948	+ ,25493	— ,04085	— ,01419	— 403
oct. 29	—	— 5,24709	+ ,01545	+ ,25112	— ,05504	— ,01016	— 445
déc. 8	—	— 4,98052	+ ,26657	+ ,22775	— ,06520	— ,00571	— 429
1898 janvier 17	—	— 4,48620	+ ,49432	+ ,18690	— ,07091	— ,00142	— 465
février 26	—	— 3,80498	+ ,68122	+ ,13186	— ,06910	— ,00323	— 496
avril 7	—	— 2,99190	+ ,81308	+ ,06666	— ,06091	+ ,00819	— 595
mai 17	—	— 2,11216	+ ,87974	— ,00425	— ,04677	+ ,01414	—
juin 26	—	— 1,23667	+ ,87549	— ,07658	—	—	—
août 5	—	— 0,43776	+ ,79891	— ,14568	—	—	—
sept. 14	—	+ 0,21547	+ ,65323	— ,20659	—	—	—
oct. 24	—	+ 0,66211	+ ,44664	— ,25336	—	—	—
déc. 3	—	+ 0,85539	+ ,19328	—	—	—	—
1899 janvier 12	—	—	—	—	—	—	—

$\mu$

Date.	$u_f$	$i_f$	$\frac{d\mu}{dt}$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$	$f^V$
1896 avril 17	+ 5"120000	— 3"351105	+ 1"654446	+ 0"040640	— 0"003066	— 0"002506	+ 0"000164	+ 0"000230
mai 27	+ 1,768895	— 1,696659	+ 1,695086	+ ,037574	— ,005572	— ,005572	+ 394	+ 96
juillet 6	+ 0,072236	— 0,001573	+ 1,732660	+ ,032002	— ,008167	— ,008167	+ 490	+ 24
août 15	+ 0,070083	+ 1,731087	+ 1,741662	+ ,023835	— ,010824	— ,010824	+ 514	+ 22
sept. 24	+ 1,801750	+ 3,495749	+ 1,788497	+ ,013011	— ,013616	— ,013616	+ 536	+ 51
nov. 3	+ 5,297499	+ 5,284246	+ 1,801508	— ,000605	— ,016204	— ,016204	+ 485	+ 123
déc. 13	+ 10,581745	+ 7,085754	+ 1,800903	— ,035437	— ,020658	— ,020658	+ 362	+ 66
1897 janvier 22	+ 17,667499	+ 8,886657	+ 1,784094	— ,056095	— ,022198	— ,022198	+ 428	+ 211
mars 3	+ 26,554156	+ 10,670751	+ 1,748657	— ,078293	— ,023224	— ,023224	+ 217	+ 206
avril 12	+ 37,224907	+ 12,419408	+ 1,692562	— ,101517	— ,023719	— ,023719	+ 423	+ 116
mai 22	+ 49,644315	+ 14,111970	+ 1,614269	— ,125231	— ,023362	— ,023362	+ 539	+ 420
juillet 1	+ 63,756285	+ 15,726239	+ 1,512752	— ,148950	— ,022577	— ,022577	+ 959	+ 760
août 10	+ 79,482524	+ 17,238991	+ 1,387521	— ,172312	— ,021575	— ,021575	+ 1719	+ 1135
sept. 19	+ 96,721515	+ 18,626512	+ 1,328571	— ,194889	— ,020150	— ,020150	+ 2854	+ 1548
oct. 29	+ 115,348027	+ 19,865083	+ 1,066259	— ,254800	— ,018186	— ,018186	+ 4402	+ 1472
déc. 8	+ 135,213110	+ 20,931342	+ 0,871370	— ,270063	— ,015263	— ,015263	+ 5874	
1898 janvier 17	+ 156,144452	+ 21,802712	+ 0,654906	— ,280684	— ,010621	— ,010621		
février 26	+ 177,947164	+ 22,457618	+ 0,418292	— ,283809	— ,003125	— ,003125		
avril 7	+ 200,404782	+ 22,875910	+ 0,163492	— ,275036	— ,008773	— ,008773		
mai 17	+ 223,280692	+ 23,039402	— 0,106571	— ,248491	— ,026545	— ,026545		
juin 26	+ 246,320094	+ 22,935831	— 0,387255					
août 5	+ 269,252925	+ 22,545576	— 0,671064					
sept. 14	+ 291,798501	+ 21,874512	— 0,946100					
oct. 24	+ 313,673013	+ 20,928412	— 1,194591					
déc. 3	+ 334,601425	+ 19,733821						
1899 janvier 12	+ 354,335246							

## M

Date.	$I_f$	$\frac{dM}{dt}$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$	$f^V$
1896 avril 17	—	+ 44"12115	— 4"50111	— 0"41771	+ 0"10493	+ 0"02383	+ 0"00031
mai 27	—	+ 39,62004	— 4,91882	— ,31278	+ ,12876	+ ,02414	928
juillet 6	+ 0,20526	+ 34,70122	— 5,23160	— ,18402	+ ,15290	+ ,01486	832
août 15	+ 34,90648	+ 29,46962	— 5,41562	— ,03112	+ ,16776	+ ,00654	1173
sept. 24	+ 64,37610	+ 24,05400	— 5,44674	+ ,13664	+ ,17430	— ,00519	1367
nov. 3	+ 88,43010	+ 18,60726	— 5,31010	+ ,31094	+ ,16911	— ,01886	1212
déc. 13	+ 107,03736	+ 13,29716	— 4,99916	+ ,48005	+ ,15025	— ,03098	818
1897 janvier 22	+ 120,33452	+ 8,29800	— 4,51911	+ ,63030	+ ,11927	— ,03916	630
mars 3	+ 128,63252	+ 3,77889	— 3,88881	+ ,74957	+ ,08011	— ,04546	115
avril 12	+ 132,41141	— 0,10992	— 3,13924	+ ,82968	+ ,03465	— ,04661	319
mai 22	+ 132,30149	— 3,24916	— 2,30956	+ ,86433	— ,01196	— ,04342	305
juillet 1	+ 129,05233	— 5,55872	— 1,44523	+ ,85237	— ,05538	— ,04037	911
août 10	+ 123,49361	— 7,00395	— 0,59286	+ ,79699	— ,09575	— ,03126	398
sept. 19	+ 116,48966	— 7,59681	+ 0,20413	+ ,70124	— ,12701	— ,02728	638
oct. 29	+ 108,89285	— 7,39268	+ 0,90537	+ ,57423	— ,15429	— ,02090	332
déc. 8	+ 101,50017	— 6,48731	+ 1,47960	+ ,41994	— ,17519	— ,01758	224
1898 janvier 17	+ 95,01286	— 5,00771	+ 1,89954	+ ,24475	— ,19277	— ,01534	469
février 26	+ 90,00515	— 3,10817	+ 2,14429	+ ,05198	— ,20811	— ,01065	1207
avril 7	+ 86,89698	— 0,96388	+ 2,19027	+ ,15613	— ,21876	+ ,00142	3008
mai 17	+ 85,93310	+ 1,23239	+ 2,04014	— ,37489	— ,21734	+ ,03150	
juin 26	+ 87,16549	+ 3,27253	+ 1,66525	— ,59223	— ,18584		
août 5	+ 90,43802	+ 4,93778	+ 1,07302	— ,77807			
sept. 14	+ 95,37580	+ 6,01080	+ 0,29495				
oct. 24	+ 101,38660	+ 6,30575					
déc. 3	+ 107,69235						
1899 janvier 12							

$\pi$

Date.	$1^f$	$\frac{d\pi}{dt}$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$	$f^V$
1896 avril 17	+ 20"41586	- 12"35363	+ 4"10948	+ 0"24909	- 0"10462	- 0"02036	+ 0"00363
mai 27	+ 8,06223	- 8,24415	+ 3,3857	+ 1,1447	- 1,2498	- 0,1073	+ 6"0
juillet 6	- 0,18102	- 3,88538	+ 4,50304	+ 0,1949	- 1,4171	- 0,1003	+ 1023
août 15	- 4,06750	+ 0,61746	+ 4,52253	- 1,2222	- 1,5174	+ 0,0022	+ 905
sept. 24	- 3,45004	+ 5,13999	+ 4,40031	- 2,7396	- 1,5152	+ 0,0027	+ 1193
nov. 3	+ 1,68995	+ 9,54030	+ 4,1635	- 4,2548	- 1,4225	+ 0,02120	+ 933
déc. 13	+ 11,23023	+ 13,66665	+ 3,70087	- 5,6773	- 1,2105	+ 0,03053	+ 668
1897 janvier 22	+ 24,89690	+ 17,36732	+ 3,13314	- 6,8878	- 0,0952	+ 0,03661	+ 367
mars 3	+ 42,26442	+ 20,50066	+ 2,44436	- 7,7930	- 0,05391	+ 0,04028	+ 41
avril 12	+ 62,76508	+ 22,94502	+ 1,60506	- 8,3321	- 0,1363	+ 0,03987	+ 422
mai 22	+ 85,71010	+ 24,61008	+ 0,83185	- 8,4684	+ 0,0264	+ 0,03365	- 277
juillet 1	+ 110,32018	+ 23,44103	- 0,01499	- 8,2060	+ 0,06189	+ 0,03288	- 875
août 10	+ 135,76211	+ 23,42694	- 0,83559	- 7,5871	+ 0,09477	+ 0,02413	- 220
sept. 19	+ 161,18903	+ 24,59135	- 1,59430	- 6,6394	+ 1,1890	+ 0,02213	- 443
oct. 29	+ 185,78040	+ 22,99703	- 2,25824	- 5,4504	+ 1,4103	+ 0,01770	- 66
déc. 8	+ 208,77745	+ 20,73881	- 2,80328	- 4,0401	+ 1,5873	+ 0,01704	+ 90
1898 janvier 17	+ 229,51626	+ 17,93553	- 3,20729	- 2,4528	+ 1,7377	+ 0,01794	+ 145
février 26	+ 247,45179	+ 14,72824	- 3,45257	- 0,6951	+ 1,9371	+ 0,01649	+ 864
avril 7	+ 262,18003	+ 11,27567	- 3,52208	+ 1,2420	+ 2,1020	+ 0,00785	- 2732
mai 17	+ 273,45570	+ 7,55359	- 3,39788	+ 3,3440	+ 2,1808	- 0,01967	-
juin 26	+ 281,20929	+ 4,35571	- 3,06348	+ 5,5245	+ 1,9838	-	-
août 5	+ 285,56500	+ 1,29223	- 2,51103	+ 7,5083	-	-	-
sept. 14	+ 286,85723	- 1,21880	- 1,76020	-	-	-	-
oct. 24	+ 285,63843	- 2,97900	-	-	-	-	-
déc. 3	+ 282,65943	-	-	-	-	-	-
1899 janvier 12	-	-	-	-	-	-	-



$\phi$ 

Date.	$I_f$	$\frac{d\phi}{dt}$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$	$f^V$
1896 avril 17	—	+ 22",01237	+ 0",99467	— 0",26285	— 0",04063	+ 0",00770	+ 0",00504
mai 27	—	+ 23,00704	+ 73182	— 30348	— 93293	+ 01274	+ 94
juillet 6	—	+ 23,73886	+ 42834	— 33641	— 02019	+ 01368	+ 470
août 15	+ 23,70825	+ 24,16720	+ 09193	— 35660	— 00651	+ 01838	+ 71
sept. 24	+ 47,87545	+ 24,25913	— 26467	— 36311	+ 01187	+ 01767	+ 9
nov. 3	+ 72,13458	+ 23,99446	— 62778	— 35124	+ 02954	+ 01776	— 258
déc. 13	+ 96,12904	+ 23,36668	— 97902	— 32170	+ 04730	+ 01518	— 395
1897 janvier 22	+ 119,49572	+ 22,38766	— 1,30072	— 27440	+ 06248	+ 01123	— 484
mars 3	+ 141,88338	+ 21,08694	— 1,57512	— 21192	+ 07371	+ 00639	— 515
avril 12	+ 162,97032	+ 19,51182	— 1,78704	— 13821	+ 08010	+ 00124	— 475
mai 22	+ 182,48214	+ 17,72478	— 1,92525	— 05811	+ 08134	— 00351	— 352
juillet 1	+ 200,20692	+ 15,79953	— 1,98336	— 02323	+ 07783	— 00703	— 308
août 10	+ 216,00645	+ 13,81617	— 1,96013	+ 10106	+ 07080	— 01011	— 150
sept. 19	+ 229,82262	+ 11,85604	— 1,85907	+ 17186	+ 06069	— 01161	— 145
oct. 29	+ 241,67866	+ 9,99697	— 1,68721	+ 23235	+ 04908	— 01306	— 175
déc. 8	+ 251,67563	+ 8,30976	— 1,45466	+ 28163	+ 03602	— 01481	— 306
1898 janvier 17	+ 259,98539	+ 6,85510	— 1,17393	+ 31765	+ 02121	— 01787	— 595
février 26	+ 266,84049	+ 5,68207	— 85538	+ 33886	+ 00334	— 02382	— 908
avril 7	+ 272,52256	+ 4,82669	— 51652	+ 34220	— 02048	— 03290	— 1045
mai 17	+ 277,34925	+ 4,31017	— 17432	+ 32172	— 05338	— 04335	—
juin 26	+ 281,65942	+ 4,13585	+ 14740	+ 26834	— 09673	—	—
août 5	+ 285,79527	+ 4,28325	+ 41574	+ 17161	—	—	—
sept. 14	+ 290,07852	+ 4,69899	+ 58735	—	—	—	—
oct. 24	+ 294,77751	+ 5,28634	—	—	—	—	—
déc. 3	+ 300,06385	—	—	—	—	—	—
1899 janvier 12	—	—	—	—	—	—	—

II. SATURNE.

i.

Date.	$l f$	$\frac{d i}{d t}$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$	$f^V$
1896 avril 17	+ 0 <sup>h</sup> 38254	— 0 <sup>h</sup> 43235	— 0 <sup>h</sup> 01725	+ 0 <sup>h</sup> 00302	+ 0 <sup>h</sup> 00035	— 0 <sup>h</sup> 00045	— 0 <sup>h</sup> 00008
mai 27	+ 0,45019	— 0,44960	— 0,01423	+ 0,00357	+ 0,00357	— 0,00045	— 0,00008
juillet 6	+ 0,00059	— 0,46383	— 0,01066	+ 0,00420	+ 0,00420	— 0,00045	— 0,00008
août 15	— 0,46324	— 0,47449	— 0,00646	+ 0,00492	+ 0,00492	— 0,00045	— 0,00008
sept. 24	— 0,93773	— 0,48095	— 0,0154	+ 0,00553	+ 0,00553	— 0,00045	— 0,00008
nov. 3	— 1,41868	— 0,48249	+ 0,00399	+ 0,00637	+ 0,00637	— 0,00045	— 0,00008
déc. 13	— 1,90117	— 0,47850	+ 0,01036	+ 0,00703	+ 0,00703	— 0,00045	— 0,00008
1897 janvier 22	— 2,37967	— 0,46814	+ 0,01739	+ 0,00763	+ 0,00763	— 0,00045	— 0,00008
mars 3	— 2,84781	— 0,45075	+ 0,02502	+ 0,00808	+ 0,00808	— 0,00045	— 0,00008
avril 12	— 3,29856	— 0,42573	+ 0,03310	+ 0,00823	+ 0,00823	— 0,00045	— 0,00008
mai 22	— 3,72429	— 0,39263	+ 0,04133	+ 0,00793	+ 0,00793	— 0,00045	— 0,00008
juillet 1	— 4,11692	— 0,35130	+ 0,04926	+ 0,00710	+ 0,00710	— 0,00045	— 0,00008
août 10	— 4,46822	— 0,30204	+ 0,05036	+ 0,00553	+ 0,00553	— 0,00045	— 0,00008
sept. 19	— 4,77026	— 0,24568	+ 0,06189	+ 0,00313	+ 0,00313	— 0,00045	— 0,00008
oct. 29	— 5,01594	— 0,18379	+ 0,06502	— 0,00005	— 0,00005	— 0,00045	— 0,00008
déc. 8	— 5,19973	— 0,11877	+ 0,06497	— 0,00394	— 0,00394	— 0,00045	— 0,00008
1898 janvier 17	— 5,31850	— 0,05380	+ 0,06103	— 0,00810	— 0,00810	— 0,00045	— 0,00008
février 26	— 5,37230	+ 0,00723	+ 0,05293	— 0,01210	— 0,01210	— 0,00045	— 0,00008
avril 7	— 5,36507	+ 0,06016	+ 0,04083	— 0,01518	— 0,01518	— 0,00045	— 0,00008
mai 17	— 5,30491	+ 0,10099	+ 0,02565	— 0,01669	— 0,01669	— 0,00045	— 0,00008
juin 26	— 5,20392	+ 0,12664	+ 0,00896	— 0,01621	— 0,01621	— 0,00045	— 0,00008
août 5	— 5,07728	+ 0,13560	— 0,00725	— 0,01353	— 0,01353	— 0,00045	— 0,00008
sept. 14	— 4,94168	+ 0,12835	— 0,02078	— 0,01353	— 0,01353	— 0,00045	— 0,00008
oct. 24	— 4,81333	+ 0,10737	— 0,02078	— 0,01353	— 0,01353	— 0,00045	— 0,00008
déc. 3	— 4,70576	+ 0,10737	— 0,02078	— 0,01353	— 0,01353	— 0,00045	— 0,00008
1899 janvier 12	— 4,70576	+ 0,10737	— 0,02078	— 0,01353	— 0,01353	— 0,00045	— 0,00008

3

Date.	$I_f$	$\frac{d\Omega}{dt}$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$	$f^V$
1896 avril 17	+	—	— 0" 10174	— 0" 00659	— 0" 00076	—	—
mai 27	+	—	— 0,70972	— 0,00583	—	—	—
juillet 6	+	—	— 0,81805	— 0,00476	—	—	—
août 15	—	—	— 0,93221	— 0,00311	—	—	—
sept. 24	—	—	— 1,74574	— 0,00134	—	—	—
nov. 3	—	—	— 2,79687	— 0,00130	—	—	—
déc. 13	—	—	— 1,17316	— 0,00485	—	—	—
1897 janvier 22	—	—	— 1,29053	— 0,00894	—	—	—
mars 3	—	—	— 1,41840	— 0,01390	—	—	—
avril 12	—	—	— 1,53542	— 0,01965	—	—	—
mai 22	—	—	— 1,64350	— 0,02597	—	—	—
juillet 1	—	—	— 1,73768	— 0,03248	—	—	—
août 10	—	—	— 1,81221	— 0,03861	—	—	—
sept. 19	—	—	— 1,86077	— 0,04397	—	—	—
oct. 29	—	—	— 1,87685	— 0,04498	—	—	—
déc 8	—	—	— 1,85432	— 0,03959	—	—	—
1898 janvier 17	—	—	— 1,78834	— 0,02928	—	—	—
février 26	—	—	— 1,67639	— 0,01453	—	—	—
avril 7	—	—	— 1,51946	— 0,00325	—	—	—
mai 17	—	—	— 1,32294	— 0,02170	—	—	—
juin 26	—	—	— 1,09714	— 0,03788	—	—	—
août 5	—	—	— 0,85681	—	—	—	—
sept. 14	—	—	— 0,61973	—	—	—	—
oct. 24	—	—	— 0,40435	—	—	—	—
déc. 3	—	—	— 0,22685	—	—	—	—
1899 janvier 12	—	—	— 0,51772	—	—	—	—

$\mu$ 

Date.	$u_f$	$l_f$	$\frac{d\mu}{dt}$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$	$f^V$
1896 avril 17	—	+ 0°247842	— 0°120431	— 0°006°22	+ 0°000553	+ 0°000177	+ 0°000091	— 0°000034
mai 27	—	+ 0,127411	— 0,12-122	—	+ 0,000730	+ 213	+ 37	—
juillet 6	—	+ 0,003561	—	—	+ 0,000943	+ 250	+ 23	—
août 15	—	+ 0,003303	—	—	+ 0,001193	+ 345	+ 65	—
sept. 24	—	— 0,138367	— 0,133322	—	+ 0,001538	+ 341	—	—
nov. 3	—	— 0,271823	— 0,138761	—	+ 0,001879	+ 432	+ 148	—
déc. 13	—	— 0,415082	— 0,143237	—	+ 0,002311	+ 469	+ 256	—
1897 janvier 22	—	— 0,561642	— 0,146560	—	+ 0,001114	+ 488	+ 384	—
mars 3	—	— 0,709967	— 0,148325	—	+ 0,002780	+ 492	+ 529	—
avril 12	—	— 0,838178	— 0,148211	—	+ 0,003272	+ 423	+ 636	—
mai 22	—	— 1,003964	— 0,145786	—	+ 0,004758	+ 275	—	—
juillet 1	—	— 1,144545	— 0,140581	—	+ 0,004477	+ 19	—	—
août 10	—	— 1,276649	— 0,132104	—	+ 0,003760	+ 365	—	—
sept. 19	—	— 1,396516	— 0,119867	—	+ 0,001183	+ 894	—	—
oct. 29	—	— 1,499963	— 0,103447	—	+ 0,004458	+ 1530	—	—
déc. 8	—	— 1,582532	— 0,082569	—	+ 0,004477	+ 2230	—	—
1898 janvier 17	—	— 1,639746	— 0,057214	—	+ 0,004112	+ 2867	—	—
février 26	—	— 1,667493	— 0,027747	—	+ 0,003218	+ 3298	—	—
avril 7	—	— 1,662555	+ 0,004938	—	+ 0,001688	+ 3337	—	—
mai 17	—	— 1,623244	+ 0,039311	—	+ 0,00342	+ 2802	—	—
juin 26	—	— 1,550102	+ 0,073142	—	+ 0,003409	+ 1522	—	—
août 5	—	— 1,446538	+ 0,103564	—	+ 0,003715	+ 39	—	—
sept. 14	—	— 1,319259	+ 0,127279	—	+ 0,00044	+ 535	—	—
oct. 24	—	— 1,178309	+ 0,140950	—	+ 0,013671	+ 1280	—	—
déc. 3	—	— 1,036534	+ 0,141775	—	+ 0,00025	—	—	—
1899 janvier 12	—	— 0,908302	+ 0,128232	—	+ 0,013343	—	—	—



M

Date.	$I_f$	$d_1 \frac{M}{dt}$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$	$f^V$
1896 avril 17	—	—	—	—	—	—	—
mai 27	4"15878	+	+	—	—	—	—
juillet 6	2,09030	+	+	—	—	—	—
août 15	<b>0,00044</b>	+	+	—	—	—	—
sept. 24	2,09975	+	—	—	—	—	—
nov. 3	4,19671	+	—	—	—	—	—
nov. 3	6,27390	+	—	—	—	—	—
déc. 13	8,31136	+	—	—	—	—	—
1897 janvier 22	+	+	+	—	—	—	—
mars 3	+	+	+	—	—	—	—
avril 12	+	+	+	—	—	—	—
mai 22	+	+	+	—	—	—	—
juillet 1	+	+	+	—	—	—	—
août 10	+	+	+	—	—	—	—
sept. 19	+	+	+	—	—	—	—
oct. 29	+	+	+	—	—	—	—
déc. 8	+	+	+	—	—	—	—
1898 janvier 17	+	—	—	+	+	+	—
février 26	+	—	—	+	+	+	—
avril 7	+	—	—	+	+	+	—
mai 17	+	—	—	+	+	+	—
juin 26	+	—	—	+	+	+	—
août 5	+	—	—	+	+	+	—
sept. 14	+	—	—	+	+	+	—
oct. 24	+	—	—	+	+	+	—
déc. 3	+	—	—	+	+	+	—
1899 janvier 12	+	—	—	+	+	+	—

上

Date.	$f$	$d\pi$ $dt$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$	$f^V$
1896 avril 17	2°5351	1°41085	—	—	—	—	—
mai 27	1,54266	1,53736	—	—	—	—	—
juillet 6	<b>0,00330</b>	1,66439	—	—	—	—	—
août 15	1,65909	1,78020	—	—	—	—	—
sept. 24	3,44829	1,90836	—	—	—	—	—
nov. 3	5,35665	—	—	—	—	—	—
déc. 13	7,37437	2,01772	—	—	—	—	—
1897 janvier 22	9,48628	2,11191	—	—	—	—	—
mars 3	11,67139	2,18511	—	—	—	—	—
avril 12	13,90166	2,23027	—	—	—	—	—
mai 22	16,14126	2,23960	—	—	—	—	—
juillet 1	18,34607	2,20481	—	—	—	—	—
août 10	20,46376	2,11769	—	—	—	—	—
sept. 19	22,43478	1,97102	—	—	—	—	—
oct. 29	24,19474	1,75996	—	—	—	—	—
déc. 8	25,67842	1,48368	—	—	—	—	—
1898 janvier 17	26,82383	1,14741	—	—	—	—	—
février 26	27,59013	0,76430	—	—	—	—	—
avril 7	27,94670	0,35057	—	—	—	—	—
mai 17	27,90195	0,04475	—	—	—	—	—
juin 26	27,49944	0,40251	—	—	—	—	—
août 7	26,82064	0,67880	—	—	—	—	—
sept. 14	25,97741	0,84323	—	—	—	—	—
oct. 24	25,09490	0,88251	—	—	—	—	—
déc. 3	24,28615	0,80875	—	—	—	—	—
1899 janvier 12							

Q

Date.	$t_f$	$\frac{d\mu}{dt}$	$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$	$f^V$
1896 avril 17	2 <sup>h</sup> 06699	—	— 0 <sup>h</sup> 02048	+ 0 <sup>h</sup> 00538	+ 0 <sup>h</sup> 00061	+ 0 <sup>h</sup> 00024	— 0 <sup>h</sup> 00075
mai 27	1,04405	—	— 0,1510	+ 0,00599	+ 65	— 51	+ 7
juillet 6	<b>0,00063</b>	—	— 0,0911	+ 0,00664	+ 56	— 44	— 21
août 15	1,03789	—	— 0,0247	+ 0,00720	+ 94	— 65	— 12
sept. 24	2,12552	—	+ 0,0473	+ 0,00814	+ 17	— 77	— 13
nov. 3	3,19562	—	+ 0,1287	+ 0,00831	+ 41	— 90	+ 10
déc. 13	4,26099	—	+ 0,0218	+ 0,00872	+ 10	— 80	+ 18
1897 janvier 22	5,31349	—	+ 0,02990	+ 0,00862	+ 54	— 62	+ 59
mars 3	6,34481	—	+ 0,03132	+ 0,00808	+ 119	— 3	+ 89
avril 12	7,34623	—	+ 0,03852	+ 0,0089	+ 196	— 86	+ 123
mai 22	8,39913	—	+ 0,04660	+ 0,00493	+ 286	— 209	+ 134
juillet 1	9,22543	—	+ 0,03349	+ 0,00207	+ 366	+ 343	+ 110
août 10	10,08824	—	+ 0,03842	— 0,00159	+ 428	+ 453	+ 26
sept. 19	10,89263	—	+ 0,06049	— 0,00587	+ 431	+ 479	+ 132
oct. 29	11,63653	—	+ 0,03890	— 0,01018	+ 136	+ 347	— 354
déc. 8	12,32153	—	+ 0,03003	— 0,01363	+ 207	—	—
1898 janvier 17	12,95350	—	+ 0,04285	— 0,01499	+ 660	—	—
février 26	13,54262	—	+ 0,02922	— 0,01292	+ 1139	—	—
avril 7	14,10252	—	+ 0,01423	— 0,00632	+ 1486	—	—
mai 17	14,64819	—	+ 0,00131	— 0,00501	+ 1479	—	—
juin 26	15,19255	—	— 0,00501	+ 0,00507	—	—	—
août 5	15,74192	—	+ 0,00006	+ 0,01993	—	—	—
sept. 14	16,29123	—	+ 0,01999	+ 0,03472	—	—	—
oct. 24	16,82055	—	+ 0,03471	—	—	—	—
déc. 3	17,29516	—	—	—	—	—	—
1899 janvier 12	—	—	—	—	—	—	—

§ 40. *Éléments osculateurs, et éphéméride pour 1898.*

Le calcul des perturbations, dont je viens de rendre compte, fournit toutes les données nécessaires au calcul des éphémérides pour la prochaine opposition. Déduisant d'après les formules précitées les perturbations pour 1899 janvier 12 on trouve :

	$\Delta i$	$\Delta \Omega$	$\Delta \mu$	$\iint \frac{d\mu}{dt} dt^2$
+	— 5"9701	— 44"0934	+ 0"476 275	+ 354"2193
h	— 4.6641	— 28.5754	— 0.021 379	— 24.8831
Somme :	— 10"63	— 72"67	+ 0"454 896	+ 329"336
	$\Delta_1 M$	$\Delta \pi$	$\Delta \phi$	
+	+ 110"6311	+ 280"7716	+ 302"9678	
h	+ 11.2124	— 23.9414	— 17.4926	
Somme :	+ 121"844	+ 256"83	+ 285"48	

Ces valeurs ne sont pas absolument exactes, mais on s'assure aisément, que les erreurs inévitables causées par l'extrapolation des différences supérieures ne peuvent surpasser 1 ou 2 centièmes de la seconde; l'incertitude du moyen mouvement diurne ne sera que de 0"000 01 au plus.

En ajoutant les variations aux éléments de départ on obtient le système suivant :

Époque et osculation 1899 janv. 12.0 T.M.Gr.

$M = 1241\ 274"425$	
$\mu = 516"41214$	
$\log a = 0.558\ 0068$	
$\phi = 24^\circ 17' 1"80$	
$\log e = 9.614\ 1135$	
$i = 20^\circ 48' 15"10$	} Équinoxe moy. 1899.0
$\Omega = 331\ 43\ 38.18$	
$\pi = 345\ 47\ 50.51$	

Pour la première fois la comète sera en opposition avec le Soleil dans la seconde moitié de mai 1898. Cette opposition étant presque aussi favorable que celle de 1892—93, j'ai calculé une éphéméride en prenant pour base les éléments osculateurs, que j'avais trouvés pour 1898 mai 17. Les voici <sup>1)</sup>:

<sup>1)</sup> Ce sont les éléments que j'ai employés dans le calcul des perturbations; à ces éléments s'appliquent les mêmes remarques touchant les erreurs possibles, qu' à ceux de 1899 janvier 12.



Époque et osculation 1898 mai 17.0 T.M.Gr.

$$M = 1117\ 303''411$$

$$\mu = 516''4920$$

$$\log a = 0.557\ 9620$$

$$\phi = 24^\circ 16' 36''94$$

$$\log e = 9.613\ 9974$$

$$i = 20^\circ 48' 15''14$$

$$\oslash = 331\ 43\ 42.61$$

$$\omega = 14\ 3\ 51.22$$

} Équinoxe moy.  
1899.0

Réduisant  $i$ ,  $\oslash$  et  $\omega$  à l'équinoxe moyen de 1898.0 on trouve

$$i = 20^\circ 48' 14''70$$

$$\oslash = 331\ 42\ 51.90$$

$$\omega = 14\ 3\ 51.72$$

Pour l'inclinaison moyenne de l'écliptique j'ai adopté d'après LEVERRIER  $\varepsilon = 23^\circ 27' 8''98$ . On en déduit pour les coordonnées rectangulaires héliocentriques les valeurs suivantes:

$$x = [9.993\ 7602] r \sin(v + 77^\circ 21' 37''4)$$

$$y = [9.876\ 3170] r \sin(v - 21\ 14\ 32.7)$$

$$z = [9.832\ 5860] r \sin(v - 2\ 2\ 3.9)$$

où les facteurs entre crochets sont données par leurs logarithmes. Le tableau qui suit donne les positions géocentriques de la comète, corrigées pour l'effet de la précession et de la nutation. Les coordonnées rectilignes du Soleil ont été empruntées au *Nautical Almanac* pour 1898.

## Ephéméride pour l'opposition de 1898.

1898	$\alpha$	$\delta$	1898	$\alpha$	$\delta$
février 16	16 <sup>h</sup> 26 <sup>m</sup> 21 <sup>s</sup>	— 42° 7' 2	mai 29,5	16 <sup>h</sup> 26 <sup>m</sup> 17 <sup>s</sup>	— 51° 57' 6
26	36 26	— 43 18,5	juin 1,0	23 13	54,5
mars 8	45 14	— 44 30,8	3,5	27 8	49,6
13	49 2	— 45 7,3	6,0	17 4	43,0
18	52 22	44,0	8,5	14 3	34,8
23	55 11	— 46 20,9	11,0	11 5	24,9
28	57 27	57,7	13,5	8 12	13,5
avril 2	59 6	— 47 34,4	16,0	5 25	0,7
7	17 0 5	— 48 10,6	21	0 18	— 50 30,9
12	0 22	46,1	26	15 55 49	— 49 56,3
17	16 59 54	— 49 20,4	juillet 1	52 5	18,0
22	58 39	53,2	6	49 10	— 48 36,9
27	56 36	— 50 23,6	11	47 7	— 47 53,9
mai 2	53 45	51,0	16	45 56	9,9
7,0	50 7	— 51 14,8	21	45 39	— 46 25,9
9,5	48 2	25,2	26	46 13	— 45 42,3
12,0	45 47	34,3	31	47 37	— 44 59,8
14,5	43 21	42,1	août 5	49 49	18,7
17,0	40 47	48,5	10	52 45	— 43 39,4
19,5	38 4	53,5	15	56 23	2,0
22,0	35 15	57,0	20	16 0 42	— 42 26,4
24,5	32 20	58,9	25	5 38	— 41 52,9
27,0	29 20	59,1	sept. 4	17 12	— 40 50,8
29,5	26 17	57,6	14	30 46	— 39 55,1

La comète sera en opposition avec le Soleil le 28 mai 1898; elle continuera encore de s'approcher de la Terre, jusqu' au milieu de juin; sa distance géocentrique sera alors 2.14.

Voici quelques valeurs de l'éclat théorique de la comète, calculées de dix en dix jours d'après les expressions

$$H_1 = \frac{1}{r^2}$$

$$H_2 = \frac{1}{r^2 \rho^2}$$

1898	H <sub>1</sub>	H <sub>2</sub>	1898	H <sub>1</sub>	H <sub>2</sub>
février 16	0,0811	0,0063	juin 6	0,1058	0,0228
26	,0829	,0071	16	,1087	,0239
mars 8	,0848	,0080	26	,1116	,0246
18	,0867	,0091	juillet 6	,1147	,0247
28	,0888	,0105	16	,1180	,0245
avril 7	,0909	,0120	26	,1213	,0240
17	,0931	,0137	août 5	,1248	,0233
27	,0955	,0155	15	,1285	,0225
mai 7	,0979	,0175	25	,1322	,0216
17	,1004	,0195	sept. 4	,1361	,0209
27	,1030	,0213	14	,1401	,0201

Pour faciliter la comparaison avec l'opposition de 1892—93 je donne encore les nombres correspondants pour trois dates de cette apparition :

1892 nov. 8 (prem. observ.)  $H_1 = 0.1737$ ;  $H_2 = 0.0747$

1893 janv. 15 (changem. de l'éclat) .1437; .0259

mars 12 (dern. pér. de la visib.) .1224; .0118

Les positions apparentes données ci-dessus sont assez indépendantes des petites erreurs des éléments sauf du moyen mouvement diurne, dont l'erreur multipliée par le nombre des jours écoulés, peut changer la position de la comète de plusieurs minutes. Pour indiquer la direction dans laquelle la comète doit être cherchée, j'ai augmenté l'anomalie moyenne de  $500''$ , ce qui correspond à une diminution de 1 jour à peu près de la révolution sidérale. J'ai effectué ces calculs pour 4 dates de l'opposition; voici les changements  $\Delta \alpha$  et  $\Delta \delta$  de l'asc. droite et de la déclinaison.

1898	$\Delta \alpha$	$\Delta \delta$	$\theta$
février 16	+ 11'.4	— 0'.9	96°
avril 27	+ 20.7	— 0.6	93
juillet 6	+ 20.1	— 4.1	107
sept. 14	+ 14.7	— 0.6	93

Ces valeurs ont été calculées deux fois: 1° d'après les expressions différentielles <sup>1)</sup>, 2° en calculant directement les nouvelles positions géocentriques. Les deux valeurs ne diffèrent que de  $2''$  au plus; j'ai pris la moyenne. La colonne  $\theta$  donne l'angle de position, déterminée par l'expression:

<sup>1)</sup> Voir VON OPPOLZER II, p. 391, formules III).

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\cos \delta \cdot \Delta \alpha}{\Delta \delta};$$

elle est donc comptée dans le sens  $N-E-S-O$ .

## V. ADDITIONS.

§ 41. *Comparaison des observations récemment publiées avec les éléments provisoires.*

Tous les calculs relatifs à l'orbite définitive étaient déjà terminés, lorsque MM. JAVELLE et DEICHMULLER publièrent deux belles séries d'observations de la comète. La première se trouve dans le *Bulletin astronomique* de janvier 1895 et contient 21 observations, faites à l'Observatoire de *Nice* avec le grand équatorial de 0<sup>m</sup>76 d'ouverture; l'autre, qui est composée de 4 observations méridiennes au cercle de MARTINS à l'Observatoire de *Bonn*, a paru dans A.N. 3275. En outre M. PUISEUX de l'Observatoire de *Paris* avait déjà publié dans le Bull. astron. de décembre 1894 deux observations faites à l'aide du petit équatorial de 0<sup>m</sup>27 d'ouverture, et les A.N. 3277 et 3301 contenaient 8 observations faites resp. par M. GUSTAV WITT à l'Observatoire de la société scientifique *Urania* à *Berlin*, et par M. OTTO KNOFF à l'Observatoire grand-ducal de *Jéna*.

Une comparaison avec les éphémérides du § 15 me fit voir, que les nouvelles observations s'accordaient nettement avec l'orbite trouvée, et la dernière de ces observations tombant au 16 février, elles n'élargissent pas du tout la période de la visibilité, qui s'étendait déjà jusqu'au 13 mars 1893.

Voilà, pourquoi je n'ai pas repris les calculs en modifiant de nouveau les seconds membres des équations de condition; je me suis contenté de comparer rigoureusement ces observations avec les éléments provisoires.

La plupart des étoiles de comparaison figurent déjà dans le tableau du § 17. Il n'y a que trois nouvelles étoiles, dont voici les positions adoptées:

*	$\alpha$ 1892.0	$\delta$ 1892.0	Autorité.
21.a	0 <sup>h</sup> 43 <sup>m</sup> 21 <sup>s</sup> .32	+ 36°18'28".9	4 obs. mér. Lund.
46.a	0 49 50.80	+ 35 9 15.9	3 " " "
*	$\alpha$ 1893.0	$\delta$ 1893.0	Autorité.
57.a	1 <sup>h</sup> 9 <sup>m</sup> 6 <sup>s</sup> .25	+ 33°42'12".9	2 obs. mér. Leyde.

Le tableau suivant donne la comparaison des nouvelles observations avec les éléments provisoires dans la forme adoptée auparavant (§ 20).



# Comparaison des nouvelles obser-

N°.	Temps local.	TM.Gr. Corr.	Lieu.	Observateur.	*	☞ — *	
						α	δ
	h m s					m s	" "
		1892 NOV.					
1	8 32 15	9,326 593	Nice	Javelle	39	— 1 9,98	— 8 6,6
2	7 32 55	10,285 347	"	"	25	+ 1 16,89	+ 4 23,0
3	8 7 59	15,309 466	"	"	22	— 0 17,68	+ 5 56,7
4	10 41 29,1	429 847	Paris	Puiseux	8	+ 3 7,27	+ 1 7,6
5	9 21 44	16,360 629	Nice	Javelle	22	— 0 36,83	— 0 38,6
6	8 1 35	24,304 536	"	"	4	+ 2 40,24	— 1 36,5
7	8 10 9	25,310 426	"	"	4	+ 2 42,11	— 7 56,7
8	7 37 1	27,287 296	"	"	21a	— 1 11,51	+ 8 50,6
9	7 0 54	28,262 154	"	"	21a	— 1 3,87	+ 2 51,4
10	7 10 36	29,268 828	"	"	21a	— 0 53,89	— 3 14,5
		1892 DÉC.					
11	7 42 56	5,290 885	Nice	Javelle	14	+ 1 59,77	+ 3 30,0
12	7 41 56	6,290 122	"	"	14	+ 2 23,35	— 1 55,3
13	8 49 29	7,336 960	"	"	14	+ 2 49,23	— 7 32,5
14	8 48 57	8,336 518	"	"	24	+ 1 22,24	— 6 35,0
15	9 4 22	9,347 155	"	"	33	+ 0 29,33	+ 3 24,8
16	7 59 14	12,301 707	"	"	46a	— 2 21,69	— 4 50,3
17	8 1 53	14,303 398	"	"	32	+ 3 17,82	— 2 34,0
18	7 39 53	15,288 046	"	"	32	+ 3 56,01	— 6 52,6
19	8 19 49	16,315 700	"	"	50	— 0 57,76	— 1 58,8
20	8 3 47	17,304 490	"	"	50	— 0 16,46	— 6 7,2
21	7 52 44	18,296 740	"	"	47	+ 1 6,70	— 0 19,1
		1893 JANV.					
22	7 36 36	6,283 972	Nice	Javelle	57a	+ 0 25,48	+ 5 26,0
23	5 32 41	17,197 526	Bonn	Deichmüller	Mér.	— —	— —
24	11 46 53	439 956	Urania	Witt	64	— 1 37,62	+ 1 32,2
25	5 30 37	18,196 002	Bonn	Deichmüller	Mér.	— —	— —
26	11 34 47	431 465	Urania	Witt	64	— 0 19,46	+ 1 25,5
27	5 28 31	19,194 453	Bonn	Deichmüller	Mér.	— —	....
28	5 28 54	194 720	"	"	Mér.	....	— —
29	11 18 5	419 778	Urania	Witt	64	+ 0 59,54	+ 1 27,3
30	11 47 52	440 459	"	"	64	+ 1 1,27	+ 1 25,5
31	5 23 21	21,190 686	Bonn	Deichmüller	Mér.	— —	— —
32	11 1 14	412 851	Jéna	Knopf	64	+ 3 40,68	+ 1 46,8
33	7 50 48	22,280 512	"	"	70	— 1 3,49	— 8 49,5
34	10 45 22	23,401 638	"	"	70	+ 0 29,38	— 8 25,6
		1893 FÉVR.					
35	8 49 1,4	6,345 268	Paris	Puiseux	84	— 1 5,63	+ 5 35,9
36	7 38 47	16,269 894	Jéna	Knopf	96	— 0 42,36	— 11 3,7

vations avec les Ephémérides.

N <sup>o</sup> .	Réd. au jour.		Parallaxe.		Position géocentrique.		O — C	
	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
	s	"	s	"	h m s	° ' "	s	"
1	+ 3,01	+ 25,8	— ,09	+ 0,6	0 45 54,85	+ 38 19 26,6	— 0,42	+ 3,7
2	+ 2,98	+ 26,0	— ,16	+ 0,8	45 25,68	13 53,1	— 0,20	+ 3,7
3	+ 2,94	+ 26,6	— ,08	+ 0,6	43 23,49	+ 37 43 20,9	— 0,36	+ 2,4
4	+ 2,91	+ 26,7	+ ,13	+ 1,3	43 21,48	42 28,5	— 0,11	— 4,9
5	+ 2,93	+ 26,7	+ ,04	+ 0,6	43 4,35	36 45,7	— 0,86	+ 2,8
6	+ 2,82	+ 27,5	— ,03	+ 0,6	42 1,49	+ 36 46 22,0	— 0,51	+ 3,1
7	+ 2,81	+ 27,6	— ,02	+ 0,6	42 3,36	40 1,9	— 0,30	+ 1,6
8	+ 2,82	+ 27,6	— ,05	+ 0,7	42 12,58	27 47,8	— 0,51	+ 3,3
9	+ 2,81	+ 27,7	— ,09	+ 0,7	42 20,17	21 48,7	— 0,52	+ 2,1
10	+ 2,80	+ 27,8	— ,07	+ 0,7	42 30,16	15 42,9	— 0,42	+ 2,2
11	+ 2,72	+ 28,0	— ,00	+ 0,7	0 44 10,57	+ 35 40 53,6	— 0,67	+ 0,4
12	+ 2,71	+ 28,1	+ ,00	+ 0,7	44 34,14	35 28,4	— 0,44	+ 2,3
13	+ 2,69	+ 28,1	+ ,09	+ 0,8	45 0,09	29 51,3	— 0,87	+ 1,3
14	+ 2,70	+ 28,1	+ ,09	+ 0,8	45 27,54	24 36,2	— 0,43	+ 0,7
15	+ 2,70	+ 28,1	+ ,11	+ 0,9	45 56,71	19 25,6	— 0,37	+ 1,4
16	+ 2,71	+ 28,2	+ ,05	+ 0,7	47 31,87	4 54,5	— 0,42	+ 0,3
17	+ 2,64	+ 28,1	+ ,06	+ 0,7	48 44,53	+ 34 55 37,6	— 0,56	— 2,9
18	+ 2,63	+ 28,2	+ ,03	+ 0,7	49 22,68	51 19,1	— 0,61	— 0,2
19	+ 2,67	+ 28,1	+ ,08	+ 0,8	50 4,33	46 55,9	— 0,47	+ 1,5
20	+ 2,66	+ 28,2	+ ,07	+ 0,8	50 45,61	42 47,6	— 0,69	+ 0,2
21	+ 2,64	+ 28,1	+ ,06	+ 0,7	51 28,84	38 46,6	— 0,61	— 0,6
22	— 0,77	+ 8,4	+ ,09	+ 0,8	1 9 31,05	+ 33 47 48,1	+ 0,27	+ 4,7
23	— —	— —	— ,00	+ 1,1	22 50,99	39 3,8	— 0,56	+ 0,4
24	— 0,84	+ 8,4	+ ,18	+ 2,5	23 9,86	39 0,9	— 0,70	— 0,2
25	— —	— —	— ,00	+ 1,1	24 9,64	38 56,9	— 0,51	+ 0,5
26	— 0,85	+ 8,3	+ ,18	+ 2,5	24 28,01	38 54,1	— 0,80	— 1,6
27	— —	....	+ ,00	....	25 29,14	— —	— 0,43	— —
28	....	— —	....	+ 1,1	— —	38 56,8	— —	+ 1,0
29	— 0,87	+ 8,2	+ ,18	+ 2,4	25 46,99	38 55,7	— 0,62	— 0,8
30	— 0,87	+ 8,2	+ ,18	+ 2,5	25 48,72	38 54,0	— 0,54	— 2,6
31	— —	— —	+ ,00	+ 1,0	28 10,42	39 14,7	— 0,33	+ 1,3
32	— 0,90	+ 8,1	+ ,18	+ 2,2	28 28,10	39 14,9	— 0,79	— 2,0
33	— 0,87	+ 8,3	+ ,11	+ 1,3	29 39,24	39 34,2	— 0,82	+ 0,9
34	— 0,89	+ 8,3	+ ,18	+ 2,1	31 12,16	39 58,9	— 0,71	— 2,2
35	— 0,97	+ 8,1	+ ,15	+ 1,5	1 51 37,96	+ 33 54 55,2	+ 0,34	— 1,5
36	— 1,03	+ 8,0	+ ,12	+ 1,3	2 7 16,93	+ 34 13 35,7	— 0,39	— 14,7

*Note.* N° 12; observation de M. JAVELLE, 1892 déc. 6. En adoptant la valeur donnée de ( $\odot \llcorner - *$ ) il y a une erreur de  $0^{\circ}20$  dans la valeur conclue de l'ascension droite de la comète. Peut-être il y a une erreur d'écriture dans ( $\odot \llcorner - *$ ): lisez  $23^{\circ}35$  au lieu de  $23^{\circ}55$ . J'ai adopté la dernière correction comme la plus probable.

C'est M. JAVELLE, qui a fourni la plupart de ces nouvelles observations, et il serait de grande importance de connaître la valeur exacte de son équation personnelle. Il devient un peu arbitraire de déduire cette équation d'une comparaison de ses écarts avec les courbes, que j'ai construites (*voir* § 22) pour représenter les écarts moyens des *autres* observateurs, mais je ne vois pas d'autre moyen pour les rendre comparables avec les écarts, qui ont servi de base à la détermination de l'orbite. J'ai donc traité ses observations de la même manière que les autres; je trouve:

Equation personnelle: en  $\alpha$ :  $+ 0^{\circ}19$  ; en  $\delta$ :  $- 2''9$

Err. prob. d'une seule obs.: en  $\alpha$ :  $\pm 0,1722$ ; en  $\delta$ :  $\pm 1,147$

Moyenne:  $f = \pm 1''61$ .

Il s'ensuit, que ses observations sont des meilleures; poids 6.

J'ai renoncé à la détermination des équations personnelles des autres observateurs comme trop douteuse; seulement à l'observation 36 j'ai appliqué l'équation de M. KNOPF, donnée dans le premier tableau p. 97.

On voit, comment la méthode, employée auparavant pour la détermination rationnelle des poids, donnerait ici des résultats incertains; j'ai donc adopté des poids égaux. En déduisant les écarts moyens, j'ai conservé les mêmes périodes, que j'avais adoptées pour la formation des lieux normaux (p. 99). La première colonne du tableau suivant donne le numéro du lieu normal correspondant; la deuxième désigne les observations; la troisième donne la date moyenne; dans les colonnes 4 et 5 se trouvent les moyennes  $\Delta \alpha$  et  $\Delta \delta$  en négligeant les équations personnelles; les colonnes 6 et 7 donnent les moyennes en tenant compte de ces équations.

N°.	Observ.	Date.	$\Delta \alpha$	$\Delta \delta$	$\Delta \alpha$ corr.	$\Delta \delta$ corr.	No. d'obs.
1	1—2	nov. 9,8060	$-0^{\circ}310$	$+ 3''70$	$-0^{\circ}120$	$+ 0''80$	2
2	3—5	„ 15,7000	$- ,443$	$+ 0,10$	$- ,317$	$- 1,83$	3
3	6—10	„ 26,8866	$- ,452$	$+ 2,46$	$- ,262$	$- 0,44$	5
4	11—21	déc. 11,8556	$- ,558$	$+ 0,40$	$- ,368$	$- 2,50$	11
5	22	janv. 6,2840	$+ ,27$	$+ 4,7$	$+ ,46$	$+ 1,8$	1
6	23—30	„ 18,5643	$- ,594$	$- 0,47$	$- ,594$	$- 0,47$	7
7	31—34	„ 22,0714	$- ,662$	$- 0,50$	$- ,662$	$- 0,50$	4
9	35—36	févr. 11,3076	$- ,025$	$- 8,10$	$- ,185$	$- 9,20$	2

La comparaison exacte avec l'orbite définitive (Système III) exigerait plus de travail, que ne le valent les observations. La question ayant cependant un certain intérêt, j'ai tâché de la résoudre d'une manière approchée. Les nouvelles dates ne différant pas trop de celles des lieux normaux, j'ai calculé pour les dernières dates les variations des lieux géocentriques de la comète en passant des éléments provisoires aux éléments définitifs. Ces variations se déduisent aisément des nombres du calcul de l'orbite définitive; seulement il faut tenir compte du facteur  $\cos \delta$ , avec lequel toutes les corrections de l'ascension droite ont été multipliées. Le tableau ci-dessous donne ces variations dans les colonnes  $\partial \alpha$  et  $\partial \delta$ . En appliquant encore les corrections  $-\sigma_\alpha$  et  $-\sigma_\delta$  pour les perturbations on obtient les écarts  $\Delta' \alpha$  et  $\Delta' \delta$ , qui représenteront à peu près les erreurs, que les éléments définitifs laissent subsister dans les nouvelles observations.

N <sup>o</sup> .	$\partial \alpha$	$\partial \delta$	$-\sigma_\alpha$	$-\sigma_\delta$	$\Delta' \alpha$	$\Delta' \delta$
1	+ 2 <sup>''</sup> 44	+ 0 <sup>''</sup> 19	- 0 <sup>''</sup> 01	+ 0 <sup>''</sup> 09	+ 0 <sup>''</sup> 64	+ 1 <sup>''</sup> 08
2	+ 3,82	+ 0,51	- 0,02	+ 0,22	- 0,96	- 1,10
3	+ 4,91	+ 0,64	- 0,03	+ 0,47	+ 0,95	+ 0,67
4	+ 5,68	- 0,02	- 0,03	+ 1,61	+ 0,13	- 0,91
5	+ 5,90	- 2,77	+ 0,60	+ 3,72	+ 13,4	+ 2,75
6	+ 6,36	- 3,65	+ 0,97	+ 4,34	- 1,58	+ 0,22
7	+ 6,56	- 3,96	+ 1,14	+ 4,58	- 2,23	+ 0,12
9	+ 9,05	- 6,60	+ 2,96	+ 6,44	+ 9,23	- 9,36

Le cinquième lieu normal, qui est très mal représenté, ne repose que sur une seule observation, la comète étant aux limites de la visibilité; le 9<sup>ième</sup> est formé de deux observations discordantes. L'accord des autres positions avec l'orbite définitive est très satisfaisant.

#### § 42. Sur le spectre après le changement du 15 janvier.

En terminant le premier paragraphe de ce mémoire, je regrettais de n'avoir trouvé qu'une seule observation concernant l'état du spectre dans la seconde moitié de janvier 1893, faite par M. KAMMERMANN à Genève à l'aide d'un petit spectroscopé. Ces pages étaient déjà imprimées, lorsque je trouvais le rapport détaillé d'une observation de M. KEELER <sup>1)</sup> de l'Observatoire *Lick*. Une opportunité favorable pour l'examen du spectre ne se présentait à cet Obser-

<sup>1)</sup> Astronomy and Astro-Physics, vol. XII, p. 272. J. E. KEELER, *Spectrum of Holmes' Comet*.



vatoire qu'au 29 janvier, lorsque la comète avait déjà beaucoup diminué d'éclat. Avec un seul prisme de flint léger, adapté au grand spectroscopie (ouverture effective de 1,12 inches) le spectre était formé par une bande continue, parcourue par une ligne plus brillante, qui indiquait la position du noyau. La lune causait un spectre atmosphérique assez brillante, et le spectre de la comète n'en différait que par sa plus grande intensité. Pour diminuer l'éclat du spectre atmosphérique, M. KEELER réduisait l'ouverture de la fente, jusqu'à ce que seulement la partie la plus dense de la comète envoyait sa lumière dans l'instrument. Le spectre restait continu; de temps en temps l'observateur soupçonnait un renforcement de l'éclat dans le vert, où l'on trouve habituellement la bande la plus brillante des hydrocarbures, mais il était impossible de s'assurer de son existence réelle. Voici la conclusion, à laquelle l'observateur arrive: „It was, at any rate, perfectly evident, that almost the whole light of the comet was represented in the continuous spectrum, which appeared to differ in no way from the spectrum, which I observed on November 16 and described in the December-number of *Astronomy and Astro-Physics*.”

Toutes les tentatives, faites par M. KEELER pour photographier le spectre avec un instrument à faible dispersion, ont échoué; le ciel d'hiver au Mount Hamilton ne demeurait jamais clair que pour des périodes trop courtes.

F I N.

# TABLE DES MATIÈRES.

---

## CHAPITRE I. INTRODUCTION.

	Page.
§ 1. Précis historique . . . . .	3
§ 2. La méthode pour la détermination de l'orbite provisoire . . . . .	9
§ 3. L'équation fondamentale de M. GIBBS. . . . .	10
§ 4. Application de l'équation de GIBBS. . . . .	12
§ 5. Tableau des formules. . . . .	15
§ 6. Correction de l'équation fondamentale. . . . .	18
§ 7. Suite. Détermination géométrique des éléments de l'orbite . . . . .	20

## CHAPITRE II. DÉTERMINATION DE L'ORBITE PROVISOIRE.

§ 8. Réduction des observations . . . . .	23
§ 9. Calcul des quantités auxiliaires . . . . .	28
§ 10. Première hypothèse . . . . .	29
§ 11. Correction de l'équation fondamentale. . . . .	31
§ 12. Nouvelles quantités auxiliaires. . . . .	33
§ 13. Deuxième hypothèse . . . . .	34
§ 14. Détermination des éléments de l'orbite. . . . .	35

## CHAPITRE III. DÉTERMINATION DE L'ORBITE DÉFINITIVE.

§ 15. Calcul d'une éphéméride. . . . .	39
§ 16. Remarques concernant les étoiles de comparaison . . . . .	42
§ 17. Tableau des étoiles de comparaison. . . . .	47
§ 18. Notes au tableau du § précédent. . . . .	57
§ 19. Des observations et de leur réduction. . . . .	62
§ 20. Comparaison des éphémérides avec les observations. . . . .	63
§ 21. Notes au tableau du § 20 . . . . .	90
§ 22. Des écarts moyens. . . . .	92
§ 23. Des équations personnelles et des poids . . . . .	94
§ 24. Des lieux normaux . . . . .	98

	Page.
§ 25. Des perturbations en $x$ , $y$ et $z$ durant la visibilité..	99
§ 26. Les perturbations en asc. droite et en déclinaison..	102
§ 27. Les équations de condition.....	103
§ 28. Les équations normales Solution de $x$ , $z$ , $v$ et $w$ ..	106
§ 29. Solution de $y$ et $u$ .....	107
§ 30. Les nouveaux éléments.....	108
§ 31. Comparaison avec les lieux normaux.....	110
§ 32. Deuxième approximation.....	112
§ 33. Erreurs probables.....	114
§ 34. Remarques finales.	
1°. Sur l'erreur probable d'une observation de l'unité de poids.....	117
2°. Sur la vraisemblance d'une perturbation des élé- ments de l'orbite par la cause inconnue du chan- gement de l'éclat au 15 janvier 1893.....	119

## CHAPITRE IV. LES PERTURBATIONS.

§ 35. Les éléments adoptés .....	122
§ 36. Calcul des perturbations jusqu'à juillet 1896.....	126
§ 37. Nouveaux éléments osculateurs .....	134
§ 38. Les perturbations de 1896 jusqu'à 1899.....	138
§ 39. Tableaux des perturbations .....	140
§ 40. Eléments osculateurs, et éphéméride pour 1898....	153

## CHAPITRE V. ADDITIONS.

§ 41. Comparaison des observations récemment publiées avec les éléments provisoires .....	157
§ 42. Sur le spectre après le changement du 15 janvier..	161
Table des Matières .....	163
Errata .....	164

## E R R A T A.

---

Page 61,	ligne 23;	<i>au lieu de</i>	donnent	<i>lisez</i>	donnent pour
" 98,	" 15;	"	réjetées	"	réjetées
" 98,	" 32;	"	concouru	"	concouru
" 110, dern.	" ;	"	la tableau	"	le tableau
" 113,	" 3;	"	seron	"	seront
" 128,	" 4;	"	désignés	"	désignées

---







Over verbindingen afgeleid  
van wijnsteenzuur en parabrandigdruivenzuur.

*(Vervolg, Zesde Verhandeling).*

Over den nadeeligen invloed van zwaveligzuur der  
vlam van steenkolengas op de bepaling in  
hoeveelheid van eenige lichamen; en over een  
methode om daarin te voorzien,

DOOR

**E. MULDER.**

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

**(EERSTE SECTIE).**

**Deel III. N<sup>o</sup>. 6.**

AMSTERDAM,  
JOHANNES MULLER.  
1895.



Over verbindingen afgeleid  
van wijnsteenzuur en parabrandigdruivenzuur.

*(Vervolg, Zesde Verhandeling).*

---

Over den nadeeligen invloed van zwaveligzuur der  
vlam van steenkolengas op de bepaling in  
hoeveelheid van eenige lichamen; en over een  
methode om daarin te voorzien.

DOOR

**E. MULDER.**

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

**(EERSTE SECTIE).**

**Deel III. N<sup>o</sup>. 6.**



AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
1895.



# Over verbindingen afgeleid van wijsteenzuur en parabrandigdruivenzuur.

DOOR

E. MULDER.

*Vervolg, Zesde Verhandeling.*

Zoogenaamd *oplosbaar* en *onoplosbaar* product (beiden gevormd bij de reactie van aethylchloride op dinatrium-wijsteenzuur aethyl) geven in waterige oplossing met een overmaat van *barytwater* een lichaam, dat, b. v. door azijnzuur, kan ontleed worden in de zoogenoemde *kristallijne* baryumverbinding, en het lichaam in *plaatjes*. De *kristallijne* baryum-verbinding is bij nader onderzoek gebleken in hoofdzaak te zijn *zuringzuur baryum* (zie hierover later). De studie van het lichaam in *plaatjes* vooral, levert veel bezwaar op, en, zooals dikwerf het geval is, als gevolg van de betrekkelijk geringe hoeveelheid stof, waarover kan beschikt worden. Dit onderzoek vordert dan ook veel arbeid, maar voor de hoofdreactie is de juiste kennis van dit lichaam in plaatjes buiten twijfel van het hoogste belang. In het volgende zal, onder anderen, dit lichaam in plaatjes worden behandeld, dat zoowel van *oplosbaar* als *onoplosbaar* product kan worden afgeleid. Door een onderzoek in deze richting, zal het mogelijk zijn, meer of min te leeren kennen, wat er plaats heeft bij inwerking van water op oplosbaar en onoplosbaar product, dan van *barytwater* op beiden in waterige



oplossing, en van azijnzuur op de afgeleiden der *baryumverbindingen* van oplosbaar en onoplosbaar product; een studie, die zeer waarschijnlijk de sleutel zal bevatten tot de kennis der betrekkelijke structuur van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product, het vraagstuk, tot welks oplossing men wil trachten te naderen.

OVER HET LICHAAM IN PLAATJES, AFGELEID VAN OPLOSBAAR PRODUCT.

*Methode aanvankelijk gevormd ter scheiding der ontledingsprodukten.* De massa werd verdeeld in water, verdund zoutzuur toegevoegd, tot nagenoeg alles was opgelost, gefiltreerd (ter verwijdering eener kleine hoeveelheid stof, onopgelost gebleven), neêrge-slagen met verdund zwavelzuur in zeer geringe overmaat, gefiltreerd, en het filtraat geplaatst onder een exsiccator (met zwavelzuur en kalk). Het terugblijvende werd opgelost in water, zilvernitraat toegevoegd, gefiltreerd, de kleine overmaat van zilver verwijderd door eenig (verdund) zoutzuur, gefiltreerd, en het filtraat gezet onder een exsiccator. Er bleef toen een massa terug, die scheen in hoofdzaak twee lichamen te bevatten, namelijk een lichaam dat *effloresceert*, en een verbinding, die deliquesceert. Laat men de laatste stof, nog onzuiver, vervloeien, dan meende men, dat zoo de eerste, als verontreiniging, ook zou kunnen worden verwijderd, hetgeen echter niet mocht gelukken (het laatste werd namelijk mede opgelost in het eerste, na te zijn vervloeid). Ook om die reden werd de boven beschreven methode verlaten en de volgende gevolgd (later zal evenwel blijken, dat gemelde manipulatie onder zekere omstandigheden eenigen dienst kan doen).

*Methode later gevolgd ter scheiding der ontledingsprodukten.* De eerste bewerkingen waren dezelfde. Hetgeen terugbleef (na prae-cipitatie met zwavelzuur, filtratie en indamping) bestond in hoofdzaak uit een *effloresceerend* lichaam, en een ander lichaam *wrat-vormig* gekristalliseerd (dat den indruk gaf van te zijn deliquesceerend, ten minste in een dampkring, vrij wel verzadigd met waterdamp; zie later). Dit mengsel nu werd behandeld met *abs. aether* (bij gewone temperatuur), en wel de eerste maal ten deele, om het zooveel mogelijk te bevrijden van bijkomende stoffen (zoo was de massa b.v. een weinig gekleurd), en vervolgens bij herhaling uitgetrokken met dit oplossingsmiddel. Het terugblijvende der eerste extractie werd afgezonderd gehouden, van hetgeen de andere achtereenvolgende extracties opleverden. De twee afzettels werden opgelost in *water*, de oplossing van beiden gefiltreerd, en het filtraat geplaatst onder een exsiccator. Het eerste residu bestond uit een betrekkelijk kleine hoeveelheid eener meer of min siropige

massa, die een weinig gekleurd was. Het andere residu, genoegzaam kleurloos en een kristallijne massa vormende, werd opnieuw met abs. aether behandeld. Het in aether onopgelost terugblijvende werd opgelost in *water*, de oplossing geplaatst onder een exsiccator, en het residu andermaal behandeld met *aether*; en zoo vervolgens. Aldus te werk gaande, was men in staat, om soms betrekkelijk groote kristallen af te zonderen van het *effloresceerende* lichaam, terwijl het lichaam, aanvankelijk *wratvormig* en later veeleer concentrisch gekristalliseerd, eveneens meer en meer in gezuiverden staat schijnt op te treden, door gemelde bewerkingen dikwerf te herhalen. Het effloresceerende lichaam schijnt betrekkelijk minder oplosbaar te zijn dan de zoogenaamde effloresceerende stof, ten minste kwamen de kristallen van de eerste verbinding voor, genoegzaam niet te worden aangetast, bij behandeling van het mengsel met aether.

*Het effloresceerende lichaam (druivenzuur) nader beschouwd.* Het kristalwater verlaat de verbinding zeer langzaam, zelfs, indien geplaatst onder een exsiccator met zwavelzuur en natrium. Het lichaam is oplosbaar in water, maar de oplosbaarheid is niet groot. De waterige oplossing wordt neêrgeslagen door *gipswater*, na eenigen tijd staans. Het neerslag schijnt denzelfden kristalvorm te vertoonen als dat van *druivenzuur calcium*, en zich overigens op gelijke wijze te verhouden tegenover gepolariseerd licht. Gaat men uit van twee oplossingen, de een van druivenzuur en de andere van de betrokken stof, en slaat beiden neêr met *gipswater* in een reageerbuisje, onder overigens gelijke omstandigheden, dan wordt op 't oog ongeveer een gelijke hoeveelheid afgezet. En hetzelfde wordt waargenomen bij neêrslaan met *kalkwater* (en *barytwater*), onder overigens gelijke omstandigheden; terwijl het neêrslag in beide gevallen zich voordoet als bundels naalden, die zich tegenover gepolariseerd licht overeenkomstig verhouden.

Voor het smeltpunt werd gevonden ongeveer  $195^{\circ}$  (van het verweerde lichaam, terwijl Bischoff en Walden <sup>1)</sup> opgeven  $203^{\circ}$ — $204^{\circ}$ ; en uitgaande van een druivenzuur, dat ter beschikking was (maar waarvan de zuiverheid overigens niet werd nagegaan) werd gevonden dat van  $199^{\circ}$ , onder gelijke omstandigheden werkende. Mogelijk is altijd, dat de te onderzoeken stof iets bevatte van de andere verbinding (zie later), die een veel lager smeltpunt bezit; terwijl de hoeveelheid stof, die men had, herhaalde omkristallisaties niet toeliet. Een hoeveelheid van 0,5898 gr. stof verloor in gewicht 0,0621 gr.

<sup>1)</sup> Zie b.v. Hand. Org. a. v. Beilstein, I, S. 801 (1893.)

onder een exsiccator, of 10,52 p. c. ( $C_8 H_{12} O_{10} \cdot 2$  aq. eischt 10,71 p. c.).

*Over het zoogenaamde wratvormige lichaam.* De waterige oplossing geeft, na zwak alkalisch te zijn gemaakt met kalkwater, en daarna toevoeging van *zilvernitraat* en een weinig ammoniak (tot het geheel is opgelost), bij verwarming een *zilverspiegel*, en zoo ook, indien men de oplossing bij gewone temperatuur laat staan. De waterige oplossing wordt nêergeslagen door *kalkwater* in overmaat. Het versch gevormde afzetsel schijnt amorph te zijn, om evenwel bij staan *kristallijn* te worden (waarbij wordt verondersteld, dat kalkwater niet in groote overmaat is genomen). Versch nêergeslagen, is het afzetsel oplosbaar in zeer verdund azijnzuur. Ook *barytwater* in overmaat slaat de waterige oplossing neder. Onder den microscoop gezien tusschen twee Nicols, geeft het nêerslag meer of minder den indruk van te zijn gekristalliseerd. Ook dit afzetsel, pas gevormd, is gemakkelijk oplosbaar in zeer verdund azijnzuur. Na neutralisatie met barytwater (terwijl de oplossing overigens een zwak zure reactie bezit), wordt geen nêerslag gevormd, (tenzij deze betrekkelijk sterk is), wel het geval na toevoeging van een weinig *alcohol*, terwijl het nêerslag amorph schijnt te wezen.

Bij overhaling der waterige oplossing (in een oliebad) schijnt geen verbinding over te gaan, die door kalkwater in overmaat wordt nêergeslagen (de hoeveelheid aangewende stof was overigens vrij beperkt). Uitgezonderd de laatste negatieve reactie, doen bijkans alle voorgaande reacties denken aan het glyoxylzuur. Reden, waarom de reactie werd gedaan tegenover *aniline*; en wel, door de oplossing, na neutralisatie met kalkwater, nêer te slaan met zuringzure aniline, te filtreeren van gevormd zuringzuur calcium, en het filtraat te laten staan. De gele verkleuring evenwel en het geel-oranje afzetsel lieten op zich wachten. Zekerheidshalve werd ter vergelijking glyoxylzuur calcium <sup>1)</sup> gemaakt, en de reactie, onder overigens gelijke omstandigheden, hiermede verricht, welke reactie volkomen gelukte. Maar laat er worden bijgevoegd, dat bij gewone temperatuur veel tijd werd gevorderd (en wel eenige dagen), om gemelde reactie duidelijk te kunnen zien, die afkomstig is van Perkin <sup>2)</sup> en later door Böttinger <sup>3)</sup> meer in bijzonderheden is nagegaan.

<sup>1)</sup> Zie Debus: Ann. d. Ch. v. Ph. Bd. 100, S. 1, 3, 6, 10 (1856); Böttinger 1, 1. Bd. 198, S. 206 (1879).

<sup>2)</sup> Perkin en Duppa: Zeitschr. f. ch. 1863, S. 425 (Chem. Soc. J, 6, p. 197, May 1863); Perkin: 70 Journ. Ch. Soc. vol. I. p. 101 (1877).

<sup>3)</sup> An. d. Ch. Bd. 198, S. 222 (1879).



Zooals reeds is opgemerkt, kan het lichaam in kristalvorm optreden; en merkwaardig is soms de wijze, waarop het, *wratvormig* afgezet, is afgescheiden van het *druivenzuur*, ten minste voor een groot gedeelte. Wordt het herhaalde malen met abs.aether behandeld, en, na verdampen van den aether, opgelost in water, dan treedt het lichaam meer op in zeer fijne naalden, concentrisch gegroepeerd. Na geruimen tijd te hebben gestaan onder een exsiccator (met zwavelzuur en natrium), geeft het lichaam den indruk van te effloresceeren, terwijl het daarbij merkbaar in gewicht verliest.

De verbinding schijnt niet te kristalliseeren uit een aetherische oplossing, ook vertoont het terugblijvende niets kristallijns; wel het geval na oplossing in water, en verdamping (zie boven). Het lichaam schijnt meer of minder hygroscopisch te wezen, in een dampkring, die vrij wel verzadigd is met waterdamp.

Het smeltpunt is niet op afdoende wijze te bepalen. De verbinding schijnt bij ongeveer  $56,8^{\circ}$  week te worden, om eerst te beginnen te smelten bij ongeveer  $132^{\circ}$ , en bij  $144^{\circ}$  gasbellen te doen ontstaan, als bewijs van ontleding (terwijl het geheel na bekoeling vloeibaar blijft).

In het voorgaande is men van de veronderstelling uitgegaan, dat men slechts te doen heeft met één lichaam (wel te verstaan verreweg in hoofdzaak), dat trouwens nog is te bewijzen. Men is bezig, om dit lichaam nader te leeren kennen. Van een product, dat wellicht nog niet voldoende zuiver is, gaf 0,3968 gr. aan kooldioxyde 0,3887 gr. en 0,1692 gr. water, of op 100 gew. koolstof 26,7 en waterstof 4,7.

*Over de zoogenaamde kristallijne baryum-verbinding, afgeleid van oplosbaar en onoplosbaar product* <sup>1)</sup>. De quantitatieve bepaling van koolstof en waterstof had een te hoog gehalte aangegeven voor *waterstof*, namelijk berekend op de formule voor zuringzuur baryum:  $C_2 O_4 Ba + H_2 O$ , het eenige hydraat, dat nog toe bekend schijnt te zijn. Dit punt moest volstrekt worden nagegaan. In de eerste plaats moest een *baryum*-bepaling worden gedaan, vroeger wegens gebrek aan stof niet verricht. Men ging thans uit van de zoogenaamde *kristallijne* baryum-verbinding, afgeleid van *oplosbaar* product. Een hoeveelheid van 96 gr. van dit product, op de gewone wijze behandeld met een overmaat van baryt en daarna met azijnzuur (1200 gr.), leverde 26,6 gr. op van de baryum-verbinding. Deze werd geplaatst onder een exsiccator (met zwavelzuur en natrium), tot het gewicht niet meer veranderde.

<sup>1)</sup> Verhandl. Kon. Akad. D. II. n°. 8, p. 3 (Recueil t. XIII, p. 346, 355).

Een hoeveelheid van 0,432 gr. dezer stof werd opgelost in verdund zoutzuur (onder een weinig verwarming), en neêrgeslagen met verdund zwavelzuur; gevende 0,3828 gr. baryum sulphaat, bevattende 0,2251 gr. baryum of op 100 gew.:

gevonden	$C_2O_4 Ba + H_2 O$	$C_2O_4 Ba + 2 H_2 O$
	vordert	eischt:
52,1	56,4	52,5

Weldra zal op de samenstelling van dit lichaam worden terug gekomen.

Men wenschte te weten, of deze dus geheeten kristallijne baryum-verbinding, wel voor het grootste gedeelte bestaande uit zuringzuur baryum, een verbinding bevat daaruit af te zonderen. Met 't oog hierop, werden 4 gr. van dit lichaam verdeeld in water, opgelost in verdund zoutzuur, daarna de oplossing neêrgeslagen met verdund zwavelzuur (in zeer geringe overmaat), en de vloeistof, na filtratie, geplaatst onder een exsiccator (met zwavelzuur en kalk). De terugblijvende massa werd bij gewone temperatuur uitgetrokken met abs. aether, en het na verdamping van den aether terugblijvende opgelost in water, dit laatste tevens het geval met het (in aether) onopgelost geblevene.

Uit de twee oplossingen kristalliseerde *zuringzuur* en uit de eerste oplossing een weinig van het zuur, dat in wratvormige groepen optreedt (zie vroeger). De kristallen (van zuringzuur) verweerden, terwijl de waterige oplossing wordt neêrgeslagen met *zilvernitraat*, en het neêrslag onoplosbaar is in verdund salpeterzuur. Wat betreft het wratvormige lichaam, dit is te beschouwen als een ontledingsproduct van het lichaam in plaatjes (zie vroeger), en bij gevolg moet ook eenig druivenzuur voorhanden zijn. Het werd niet noodig geoordeeld, om dit druivenzuur af te zonderen, daar de zaak betreffende de zoogenaamde kristallijne baryumverbinding uitvoerig genoeg is bewerkt, ook in verband met hetgeen zal volgen.

Bij behandeling van de kristallijne baryumverbinding (afgeleid van *onoplosbaar* product) verdeeld in water, met eenig verdund zoutzuur, om hetgeen er in mocht aanwezig zijn van het lichaam in plaatjes te verwijderen (druivenzuur en ander zuur), blijft er, na zorgvuldig wasschen met water (door de massa — geplaatst op een filtrum in een trechter, af te sluiten aan den hals met een caoutchoucuis, aan één einde gesloten — bij herhaling met water te laten staan), een als 't ware kleurlooze gekristalliseerde massa terug. Verdund zoutzuur werd in een dusdanige hoeveel-



heid toegevoegd, dat een betrekkelijk groote hoeveelheid onopgelost terugbleef, hetgeen gemakkelijk is te verwezenlijken, omdat het zuringzuur baryum in groote korrels optreedt.

Na geplaatst geweest te zijn onder een exsiccator (met zwavelzuur en natrium) gaf een hoeveelheid van 1,0299 gr. stof (afgeleid van *onoplosbaar* product) 0,3491 gr. kooldioxyde en 0,1578 gr. water.

Berekend op 100 gew. d. komt dit overeen met:

	I	$C_2 O_4 Ba + H_2 O$		$C_2 O_4 Ba + 2 H_2 O$
		vordert:		vordert:
koolstof	9,2	9,8	:	9,2
waterstof	1,7	0,8		1,5
baryum	—	56,4		52,5,

Een baryumzout der formule  $C_2 O_4 Ba + 2 H_2 O$  schijnt tot nog toe niet te zijn gemaakt. <sup>1)</sup>

De formule  $C_2 O_4 Ba + 2 H_2 O$  stemt ook overeen met het gevonden baryumgehalte van de zoogenaamde *kristallijne* verbinding, afgeleid van *oplosbaar* product (zie pag. 8), zijnde 52,1 p. c., terwijl gemelde formule vordert 52,5 p. c. (maar dit product was *niet* gezuiverd door behandeling met eenig verdund zoutzuur), en zoo ook ongeveer met het gevonden gehalte aan koolstof en waterstof <sup>2)</sup> van het overeenkomstige *kristallijne* lichaam, afgeleid van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product (*evenmin* gezuiverd door behandeling met eenig verdund zoutzuur):

	afgeleid van <i>oplosbaar</i> product:	afgeleid van <i>onoplosbaar</i> product:
koolstof	9,6	10,3
waterstof	1,9	1,8.

*Gehalte aan kristalwater.* Voor alle zekerheid werd het kristalwater direct bepaald. Een hoeveelheid van 1,1994 gr. stof, afkomstig van *onoplosbaar* product en gezuiverd met verdund zoutzuur, gaf een *verlies* in gewicht bij verhitten tot:

ongeveer 107°	0,1178 gr.
„ 107° — 140°	0,0467 „
	<u>0,1645 gr. water,</u>

<sup>1)</sup> Zie b.v. Handb. Org. Ch. v. Beilstein I, S. 692 (1893); Wurtz Dict. de Chim. T. 2, p. 673; Fehling, N. Handw. Bd. IV, S. 970.

<sup>2)</sup> Verh. Kon. Akad. II, no. 8, p. 10 (zie het Recueil T. XIII p. 365).

op 100 gew. d. stof; 107°; 107°; — 140°, te zamen  
gevonden

	9,82	3,89	13,71
$C_2 O_4 Ba + 1\frac{1}{2} H_2 O; + \frac{1}{2} H_2 O; + 2 H_2 O$			
vordert	vordert	vordert	
10,3	3,44	13,74	

Van het bekende oxalaat:  $C_2 O_4 Ba + H_2 O$  is opgeteekend, dat dit onstaat bij gewone temperatuur, en bij 100°: wordt  $C_2 O_4 Ba + \frac{1}{2} H_2 O$ .

Dezelfde weg werd ingeslagen met betrekking tot het *kristallijne* lichaam, afgeleid van *oplosbaar* product. Een hoeveelheid van 1,2642 gr. (evenzoo gezuiverd met verdund zoutzuur), verloor in gewicht bij verhitten tot ongeveer:

110°	0,132 gr.
110°—140°	0,0411 „
som	<u>0,0731 gr. water.</u>

of berekend op 100 gew. d. stof was het verlies in gewicht:

	110°; 110°—140° te zamen	
gevonden	10,44	3,25
	13,69	
$C_2 O_4 Ba + 1\frac{1}{2} H_2 O; + \frac{1}{2} H_2 O; + 2 H_2 O$		
eischt	eischt	eischt
10,34	3,44	13,78.

Al die stoffen hadden gestaan onder een exsiccator (met zwavelzuur en natrium), zonder teeken van efflorescentie te vertoonen.

*Over een duidelijke sprekende reactie, met het doel, het verschil tusschen de zoogenaamde kristallijne verbinding en het lichaam in plaatjes te doen uitkomen.* Er werd uitgegaan van een gelijke hoeveelheid dezer twee stoffen, en wel 0,2 gr. van ieder, er een zelfde hoeveelheid water bijgedaan en vervolgens *salpeterzuur* (verdund) in een dusdanige hoeveelheid, dat het geheel werd opgelost. Voor de zoo geheeten *kristallijne* verbinding is ongeveer *driemaal* meer zuur noodig, dan voor die in plaatjes. De oplossing werd door filtratie bevrijd van een niet noemenswaardige hoeveelheid stof, die onopgelost was gebleven, vervolgens met een zelfde hoeveelheid water gewasschen, en neêrgeslagen met dezelfde hoeveelheid *zilvernitraat*. De *kristallijne* baryumverbinding gaf dadelijk een weêrslag van *zuringzuur-zilver*; de baryumverbinding in *plaatjes* gaf *niet* van dit afzetsel (de analyse <sup>1)</sup> had gegeven voor dit lichaam, afgeleid van *oplosbaar* product: koolstof 15,0; waterstof 2,2 pct.). Het lichaam in *plaat-*

<sup>1)</sup> Zie Verhandl. Kon. Akad. D. II. N°. 8, p. 12 (Recueil T. XIII, p. 357).

*jes*, van een andere bereiding (afgeleid eveneens van oplosbaar product) gaf evenwel een weinig neêrslag met zilvernitraat; dat altijd het gevolg zou kunnen zijn van een weinig zuringzuur baryum oorspronkelijk aanwezig in de stof (door vermenging met een hoeveelheid van het *kristallijne* lichaam).

De waterige oplossing van het lichaam in *plaatjes* (alhoewel weinig, is het toch eenigszins oplosbaar) geeft evenmin een neêrslag met zilvernitraat.

*Rectificatie.* In de vorige verhandeling <sup>1)</sup> is gezegd, dat geen *wijnsteen*zuur is gevonden als ontledingsproduct van het tartrylwijnsteenzuur, waarvan de vorming werd verondersteld. Maar, nu men met meer stof heeft kunnen werken en op andere wijze, heeft men *druiven*zuur gevonden, en wel afgeleid van het lichaam in *plaatjes*; en dientengevolge is een verbetering aan te brengen, daar dit in den grond hetzelfde is (namelijk druivenzuur en gewoon wijnsteenzuur).

*Over de hoeveelheid der afgeleiden van oplosbaar en onoplosbaar product ontstaan onder den invloed van barytwater, en volgende reagentiën.* Het zou overbodig zijn, om het belang te doen uitkomen, van een volgen der betrekkelijke hoeveelheid der stoffen, die ontstaan en waarvan wordt uitgegaan bij de studie van eenige reactie; en zoo ook met betrekking tot bovengemelde omzetting van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product. Reeds deed men opmerken <sup>2)</sup>, dat 1 gr. van *oplosbaar* product ongeveer geeft (werkende met 6 gr.):

0,2 gr. aan baryumverbinding der *kristallijne* stof

0,136 „ aan baryumverbinding van het lichaam in *plaatjes*.

Met een grootere hoeveelheid werkende (ongeveer 96 gr.), werd op 1 gr. *oplosbaar* product gevonden (men zal zich later aan deze cijfers houden):

som { 0,27 gr. aan *kristallijn* lichaam  
0,426 gr. { 0,156 „ aan lichaam in *plaatjes*.

Wat *onoplosbaar* product <sup>3)</sup> aangaat, men heeft dan wel te maken met de twee zelfde ontledingsproducten (dat van beteekenis is met 't oog op de scheikundige structuur van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product), maar de verhouding is een geheel andere. Want er is gevonden op 1 gr. *onoplosbaar* product:

som { 0,11 gr. aan *kristallijn* lichaam  
0,429 gr. { 0,319 „ aan lichaam in *plaatjes*,

en bijgevolg is de verhouding zoo ongeveer een omgekeerde. Maar de som schijnt betrekkelijk weinig te verschillen (berekend op 1 gr.

<sup>1)</sup> Zie Verhandl. Kon. Akad. II. N°. 8, p. 31 (Recueil T. XIII, p. 386).

<sup>2)</sup> Zie Verhandl. Kon. Akad. D. II N°. 8, p. 7,13 (Recueil T. XIII, p. 351, 359).

<sup>3)</sup> Zie Verhandl. Kon. Akad. D. II N°. 8, p. 7,13 (Recueil T. XIII, p. 351, 363).

*oplosbaar* en *onoplosbaar* product). Evenwel is de opbrengst van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product aan de *oorspronkelijke* <sup>1)</sup> baryumverbinding (waarvan het kristallijne lichaam en het lichaam in plaatjes zijn afgeleid), door de oplossing nêer te slaan met een overmaat van barytwater, ongeveer voor:

*oplosbaar* product 0,52 gr.  
*onoplosbaar* „ 0,91 „ ,

berekend op 1 gr. van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product.

Om zich eenig denkbeeld te vormen van de hoeveelheid der ontledingsproducten (namelijk *kristallijn* lichaam en lichaam in *plaatjes*), zal dit eerste lichaam worden beschouwd als te zijn *zuringzuur* baryum, en het tweede lichaam (zie vroeger) *wijnsteen*zuur baryum. Inderdaad verschilt dit weinig met de werkelijkheid, voor zooverre de samenstelling betreft; het verschil is onbeduidend met 't oog op het voorgestelde doel. Ook zal worden verondersteld, dat deze lichamen geen kristalwater bevatten.

*Oplosbaar product*. Eenvoudigheidshalve zal worden verondersteld, dat oplosbaar product, zijnde (namelijk waarschijnlijk) een eenvoudig afgeleide van tartrylwijnsteenzuur, is een eenvoudig afgeleide van wijnsteenzuur, dat geen opmerkenswaardigen invloed heeft op het geval, hetwelk ons bezighoudt. Uitgaande dan van die veronderstelling, vindt men, dat 1 gr. *oplosbaar product* overeenstemt met 0,73 gr. wijnsteenzuur aethyl <sup>2)</sup> (nauwkeuriger 0,727 gr.), beantwoordende aan 0,52 gr. *wijnsteen*zuur.

Men zal niet handelen over *onoplosbaar product* (1 gr. hiervan komt overeen met 0,79 gr. wijnsteenzuur aethyl), want dat komt ten slotte zoo ongeveer op hetzelfde neder (uitgezonderd de hoeveelheid van de eerste baryumverbinding gevormd; zie hierover nader).

Om de berekening te vereenvoudigen en mogelijk te maken, zal worden aangenomen, dat de *oorspronkelijke* (eerste) baryumverbinding die is van tartrylwijnsteenzuur, en deze worden beschouwd als te zijn neutraal *wijnsteen*zuur baryum. Onder die voorwaarden vindt men, dat 0,52 gr. van de oorspronkelijke baryumverbinding overeenkomt met 0,27 gr. wijnsteenzuur. Deze levert de *kristallijne* baryumverbinding en het lichaam in *plaatjes*, en wel op 1 gr. *oplosbaar* product 0,27 gr. der eerste en 0,156 gr. van het laatste (zie vroeger), ongeveer overeenkomende met 0,1 gram *zuringzuur* en 0,08 gr. *wijnsteen*zuur (eigentlich druivenzuur en het tweede kristallijne zuur; maar de samenstelling van het laatste zuur

<sup>1)</sup> l. c. p. 8.

<sup>2)</sup> Zie Verhandl. Kon. Akad. D. II p. 26, 28.



verschilt hiervan ook weinig). De som hiervan is dus 0,18 gram aan zuringzuur en wijnsteen zuur (druivenzuur en ander zuur), als ontledingsproducten van 0,27 gr. wijnsteen zuur (veeleer tartrylwijnsteen zuur) der oorspronkelijke baryumverbinding. Er heeft dus een verlies plaats van ongeveer  $0,27 - 0,18 = 0,09$  gr. stof, als gevolg der behandeling van de *oorspronkelijke* baryumverbinding met verdund azijnzuur (waardoor ontstaan de *kristallijne* verbinding zoo genaamd, en het lichaam in plaatjes).

Een hoeveelheid van 1 gr. *oplosbaar* product stemt overeen met 0,52 gr. wijnsteen zuur (zie vroeger) en 1 gr. *oplosbaar* product geeft 0,52 gr. der *oorspronkelijke* baryumverbinding, aequivaleerende met 0,27 gr. wijnsteen zuur; derhalve heeft de eerste omzetting een verlies tengevolge van  $0,52 - 0,27 = 0,25$  gr., dus ongeveer de helft ontsnapt tot nog toe aan het onderzoek. Maar in werkelijkheid is dit verlies grooter, want de oorspronkelijke baryumverbinding <sup>1)</sup> bevat minder koolstof dan wijnsteen zuur baryum, waarmede de eerste eenvoudigheidshalve werd gelijk gesteld (daarentegen nadert hiertoe het lichaam in plaatjes <sup>2)</sup> in genoegzame mate). Hieruit volgt, dat het verlies van 0,09 gr. kleiner is te nemen. Voegen we er nog bij, dat het dus geheel een *kristallijne* lichaam, en het lichaam in *plaatjes*, in water betrekkelijk weinig oplosbaar zijn.

Aangezien de *oorspronkelijke* baryumverbinding betrekkelijk weinig oplosbaar <sup>3)</sup> is in water, zal dus tevens het verlies door wasschen betrekkelijk gering wezen; en derhalve is het besluit, dat de grootste hoeveelheid stof die verloren gaat (dat wil zeggen, tot nogtoe zich onttrekt aan het onderzoek) zal plaats hebben, indien *oplosbaar* product wordt opgelost in water (en daarin eenigen tijd verblijft), en wordt gevolgd door de reactie met *baryt* (na die van natriumhydroxyde, ontstaan door de resten Na O aanwezig in *oplosbaar* product).

De moederloog <sup>4)</sup> van het nêerslag met baryt, van de overmaat aan baryt bevrijd met kooldioxyde en ingedampt, is wel ten deele nagegaan, evenwel niet op groote schaal. Maar het scheen, dat chloornatrium (Cl Na) daarvan verreweg de hoofdmasa uitmaakt, hetgeen nog nader is te vervolgen.

Wat betreft *onoplosbaar* product, zoo moet nog worden herinnerd, met 't oog op de gevolgde redeneering, dat dit product wel betrekkelijk veel geeft aan *oorspronkelijke* baryumverbinding, maar

<sup>1)</sup> Verhandl. Kon. Akad. D. I, N° 7, p. 26 (zie Recueil. T. XII, p. 80).

<sup>2)</sup> Verhandl. Kon. Akad. D. II, N° 8, p. 12 (zie Recueil, T. XIII, pr. 357).

<sup>3)</sup> Zie Verhandl. Kon. Akad. D. I, N° 7, p. 25 (zie Recueil, T. XII, p. 79).

<sup>4)</sup> Zie Verhandl. Kon. Akad. D. II, N° 8, p. 23 (ook het Recueil, T. XIII, p. 374).



desniettegenstaande, berekend op 1 gr. *onoplosbaar* product, ongeveer evenveel oplevert aan zoogenoemde *kristallijne* stof en lichaam in *plaatjes*, als het geval is met *oplosbaar* product.

*Over de wijze van verbonden zijn van het chloor in onoplosbaar product.* Het is tamelijk waarschijnlijk geworden, dat het chloor in *oplosbaar* product <sup>1)</sup> daarin voorkomt als chloornatrium (Cl Na), en dit zal tevens het geval wezen in *onoplosbaar* product.

Uitgaande van het gehalte van *onoplosbaar* product aan chloor, zou men kunnen aannemen, dat dit ongeveer 12 proc. bevat aan *oplosbaar* product; ware het niet, dat er aanleiding is, om het er voor te houden, dat een deel van het chloornatrium (Cl Na) *onoplosbaar* is geworden in het oplossingsmiddel (aanvankelijk is dit aethylchloride, later tevens aether), en dientengevolge een bestanddeel uitmaakt van *onoplosbaar* product in plaats van *oplosbaar* product, dat er de grootste hoeveelheid van bevat.

*Wijziging gebracht in de methode, om dinatrium-wijnsteenzuur aethyl te behandelen met aethylchloride.* Het kwam voor, dat de oplossing in aethylchloride van *oplosbaar* product, bij verdampen met aether (de geheele massa wordt ten slotte uitgestort in aether), een ten deele kristallijn product opleverde, terwijl *oplosbaar* product amorph is. Ook vertoonde *onoplosbaar* product een ander voorkomen dan gewoonlijk. In een volgende bereiding stonde zelfs de geheele massa tot een gelei, toen deze zich nog bevond in de toegesmolten buis. De verklaring van dit verschijnsel was wel niet moeilijk te geven, en scheen gezocht te moeten worden in een toevalligerwijze meer toetreden van *vochtigheid* der lucht. Het bleek ook al spoedig, dat het uitgetrokken gedeelte van het ballonnetje, waarin het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl was gedaan, te nauw was, en dientengevolge het ledigen te veel tijd vereischte, waardoor de inhoud meer was onder den invloed van het watergehalte der omgeving.

Om dit bezwaar voor goed op te heffen, liet men eenvoudig het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in het ballonnetje, deed er de vereischte hoeveelheid aethylchloride bij, en smolt het uitgetrokken uiteinde dicht. Op die wijze is de vochtigheid der lucht zoo goed als volkomen afgesloten. Is de reactie afgelopen (te weten de vorming van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product), dan wordt abs. aether toegevoegd, en de twee produkten worden op de bekende wijze gescheiden.

*Gewijzigde bereiding van wijnsteenzuur aethyl.* Het maken van wijnsteenzuur aethyl in *zuiveren* staat, is van groot belang voor het onderwerp, waarvan sprake is. Tot nog toe werd wijnsteenzuur

<sup>1)</sup> Zie Verhandl. Kon. Akad. D. II. n<sup>o</sup>. 8, p. 23 (Recueil, T. XIII, p. 375).

aethyl aldus vervaardigd. Het wijnsteen zuur werd opgelost in abs. alkohol door verhitten op een waterbad, dan (na bekoeling) liet men er *chloorwaterstofgas* in overmaat doorgaan. Vervolgens werd de massa onder een exsiccateur (met zwavelzuur en kalk) geplaatst gedurende eenige weken, en het overblijvende (half-vloeibaar) opgelost in een nieuwe hoeveelheid alkohol, om er daarna andermaal chloorwaterstofgas doorheen te jagen, en vervolgens het geheel ten tweeden male te zetten onder een *exsiccator* (met zwavelzuur en kalk). Nu volgde de overhaling in een gedeeltelijk ledig (in een stroom van waterstof). Door aldus te werken, vereischt de bereiding van wijnsteen zuur veel tijd. Om die reden trachtte men daarin eenige praktische wijziging te brengen, en wel door de alkoholische oplossing van wijnsteen zuur te laten staan onder een *exsiccator* (met zwavelzuur) tot het gewicht genoegzaam *constant* is. De terugblijvende siropige massa wordt vervolgens opgelost in een nieuwe hoeveelheid alkohol, en dan op de gewone wijze behandeld, namelijk met *chloorwaterstofgas* enz., als boven werd medegedeeld (alleen laat men dit gas thans slechts *eenmaal* doorgaan), om daarna over te halen in het gedeeltelijk ledig (van waterstof). De ruwe massa (vóór overhaling) is, alzoo werkende, bijna kleurloos; de overhaling gaat glad (en het ongeveer  $\frac{1}{4}$  gedeelte, dat terug blijft, is weinig gekleurd).

#### VERVOLG VAN HET ONDERZOEK BETREFFENDE HET PARABRANDIGDRUIVENZUUR.

*Samenstelling van het neutrale baryumzout.* Reeds had men de uitkomsten doen kennen <sup>1)</sup> van het neutrale parabrandigdruivenzuur baryum, gemaakt door de waterige oplossing van 60 gr. gefractionneerd brandigdruivenzuur (zie later) neêr te slaan met barytwater in overmaat, en het afzetsel, na te zijn gewassen, in verschillende bereidingen te behandelen met 40,20 en 10 gr. *azijnzuur*. Er werd nu daarenboven een zout gemaakt door behandeling met 5 gr. azijnzuur (IV) (terwijl overigens de omstandigheden dezelfde waren), dat de volgende analytische uitkomst opleverde.

Een hoeveelheid van 0,7004 gr. stof gaf 0,558 gr. kooldioxyde en 0,1592 gr. water, of op 100 gew. — d.:

koolstof 21,7

waterstof 2,5,

zoodat alle analyses volkomen overeenstemmen met de formule reeds

<sup>1)</sup> Zie Verhandl. Kon. Akad. D. II. N°. 8, p. 37 (ook het Recueil. T. XIII. pag. 394).

vroeger gegeven (alleen als uitdrukking der samenstelling, en *niet* der structuur);

	I	II	III	IV ( $CH_3, CO, CO.O)_2 Ba + H_2O$ eischt:	
koolstof	21,7	21,6	21,9	21,7	21,9
waterstof	2,8	2,6	2,5	2,5	2,4
baryum	—	41,1	41,7	—	41,7.

Al deze producten zijn wit als krijt en amorph.

*Over omzettingsprodukten van parabrandigdruivenzuur.* Ter bereiding van het neutrale baryumzout <sup>1)</sup> werd uitgegaan van 60 gr. gefractionmeerd (136"—170°) brandigdruivenzuur, dit behandeld met verzadigd barytwater in overmaat (ongeveer 2 kilogr.), gefiltreerd, gewasschen, de massa van het filtrum gedaan met eenig water, en er bijgevoegd vervolgens 15 gr. azijnzuur; opnieuw gefiltreerd (na gedurende eenigen tijd te hebben gestaan), daarna gewasschen, en de massa andermaal van het filtrum verwijderd (als altijd met eenig water). Nadat de baryum-verbinding zich had afgezet (en de bovenstaande vloeistof was afgeschonken), werd verdund zoutzuur toegevoegd (niet in noemenswaardige overmaat). Bij schudden der ontstane oplossing met abs. *aether*, staat de vloeibare massa *niets* af aan den *aether*. Dit gaf aanleiding, om de massa nagenoeg tot droogwordens te doen indampen onder een exsiccator (na te voren op een waterbad te zijn verhit); de exsiccator bevatte zwavelzuur en kalk. Onder deze omstandigheden ontstaat een harde massa, die bij behandeling met *aether* daaraan *niets* afstaat.

Men zou kunnen meenen, hieruit te mogen besluiten, dat parabrandigdruivenzuur een *zuur zout* doet gevormd worden. Maar vooraf dient te worden nagegaan, of parabrandigdruivenzuur niet is ontleed (zie later). In ieder geval wordt door *aether* uit de ingedampde massa een *zuur lichaam* opgenomen, wanneer dezelfde hoeveelheid zoutzuur vooraf *nogmaals* is toegevoegd geworden.

Het kwam er thans op aan na te gaan, of dit lichaam is parabrandigdruivenzuur, of een ontledingsproduct dezer verbinding. In een volgende proef werd het neutrale baryumzout (versch bereid en niet gedroogd), verdeeld in water, opgelost in verdund zoutzuur (niet in overmaat), en na te zijn ingedampt onder een exsiccator, aanvankelijk behandeld met abs. alkohol, gefiltreerd, en na verdampen van den alkohol, uitgetrokken met abs. *aether*. Ten einde te weten, of dit lichaam (een vaste geel-bruine massa vor-

<sup>1)</sup> Verhand. Kon. Akad. D. II. n<sup>o</sup>. 8, p. 36, (ook Recueil T. XIII, p. 394).



mende) is een polymerisatie-product van brandigdruivenzuur, werd het in aetherische oplossing gedaan in een hiervoor uitgetrokken kolfje, de aether verdreven door de kwikpomp, en daarna verhit. Bij ongeveer  $133^{\circ}$  beginnen zich gasbellen te vertoonen, als bewijs van ontleding, en bij verhitten langzamerhand tot een hogere temperatuur, die van ongeveer  $200^{\circ}$ , wordt de massa meer en meer gekleurd, zonder dat er brandigdruivenzuur overgaat. Hieruit volgt, dat ons lichaam dus niet op gelijke lijn kan worden geplaatst met het polymerisatie-product van brandigdruivenzuur, dat ontstaat, wanneer dit geruimen tijd wordt bewaard bij gewone temperatuur (waardoor het lichaam, aanvankelijk dun vloeibaar, lijvig wordt), en in het gedeeltelijk ledig kan worden gedepolymeriseerd, en wel naar Brühl <sup>1)</sup> door verhitten bij  $70^{\circ}$ — $70,5^{\circ}$  (bij 16 mm.). Bij herhaling der proef (alleen werd dadelijk alcohol toegevoegd, om schimmelvorming te voorkomen; en na plaatsen onder een exsiccator, het geheel uitgetrokken met aether), was de uitkomst dezelfde.

Als altijd moet de quantitative analyse opheldering geven, en er werd daarvoor genomen dat gedeelte van een bereiding, hetwelk was omgezet in een *glasachtige* massa (het geheel blaast namelijk ten deele op, en dit gedeelte wordt hard) terwijl het overigens langen tijd volhardt in den weeken staat. Deze was geel-bruin van kleur, en zeer hygroskopisch. Een hoeveelheid van 0,3019 stof (a) gaf 0,5665 gr. kooldioxyde en 0,1617 gr. water; terwijl van dezelfde bereiding 0,4116 gr. stof gaf aan kooldioxyde 0,7685 gr. en aan water 0,2115 gr. (b), of berekend op 100 gew. d.:

	a.	b.
koolstof	51,2	50,9
waterstof	6,0	5,7.

De theorie vordert voor:

	brandigdruivenzuur	
	$CH_3, CO, CO, OH$	$2(CH_3, CO, CO, OH) + H_2O$
koolstof	40,9	37,1
waterstof	4,5	5,1.

Het behoeft wel niet gezegd, dat men hier geen scheikundig zuivere stof heeft te verwachten, maar een product, waarvan de analyse toch eenige beteekenis bezit. En het springt dadelijk in 't oog, dat er kooldioxyde moet zijn vrij gekomen (zonder of met gelijktijdig vrij komen van water).

<sup>1)</sup> Z. f. pr. Ch. W. F. Bd. 50, S. 125 (1894).

De waterige oplossing van dit lichaam geeft bij behandeling met baryumcarbonaat een *oplosbaar* zout, dat, neêrgeslagen met alcohol een geleiachtige massa vormt, indroogende tot een amorph lichaam.

Zooals reeds vroeger werd opgemerkt, laat het neutrale baryumzout van parabrandigdruivenzuur, opgelost in verdund zoutzuur (niet in overmaat) en na verdampen (door plaatsing onder een exsiccator) een vast product terug, dat niets afstaat aan abs. aether. Hieruit volgt, in verband met hetgeen overigens zoo even is gezegd, dat, indien dat neutrale baryumzout, verdeeld in water, wordt ontleed langzamerhand met (verdund) *zwavelzuur*, aanvankelijk het gehalte der oplossing aan baryum zal naderen tot een *maximum*, en daarna tot een *minimum*. En inderdaad is dit dan ook, zeer merkbaar, het geval. De oplossing blijft onder deze omstandigheden *kleurloos* (met zoutzuur niet in die mate het geval). Bij indampen der oplossing op een waterbad bij ongeveer 50° (om schimmelvorming te ontgaan), blijft terug van een lichaam, dat *zeer weinig*, maar wel eenigszins geel *is gekleurd*.

Zoowel het product verkregen met zoutzuur als dat met zwavelzuur, wordt neêrgeslagen door barytwater in overmaat, het eerste gevende een geel-oranje gekleurd afzetsel, het tweede een *kleurloos* neêrslag. Beiden zijn *oplosbaar* in verdund azijnzuur, en bieden in dit opzicht een sterk sprekend verschil aan met neutraal parabrandigzuur baryum, waarvan zij zijn afgeleid.

Het product, dat een weinig geel van kleur is (gemaakt alleen met zwavelzuur), werd behandeld met abs. *aether*. Een deel, niet opgelost (I) als zijnde minder oplosbaar, werd geplaatst onder een exsiccator (met zwavelzuur en natrium), waarna een *kleurlooze* amorphe massa terugbleef.

Een hoeveelheid van 0,2598 gr. van dit lichaam gaf 0,4625 gr. kooldioxyde en 0,113 gr. water (a); en van dezelfde bereiding gaf 0,3547 gr. stof aan kooldioxyde 0,6249 gr. en aan water 0,1463 gr. (b).

De eerste analyse werd gedaan met chroomzuur lood (als de vorigen), de tweede met het mengsel van dit zout en dubbelchroomzuur kalium. Berekend op 100 gr. d. komen gemelde uitkomsten overeen met:

	I	
	a.	b.
koolstof	48,5	48,6
waterstof	4,8	4,6.

Ook dit lichaam is hygroscopisch, alhoewel in een minderen graad dan het vorige.



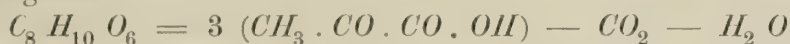
Het gedeelte, dat opgelost was (II) in aether (zie boven) liet, na verdampen van den aether, een product achter, dat zwak geel is gekleurd, en tevens hygroscopisch. Na te zijn geplaatst geweest onder een exsiccator (met zwavelzuur en natrium, als de anderen), gaf 0,2585 gr. stof, 0,4685 gr. kooldioxyde en 0,1272 gr. water, of op 100 gr. d.:

## II.

koolstof 49,4

waterstof 5,5.

Om zich eenig denkbeeld te kunnen maken van de moleculair-formule en tevens van de structuur, laat men hier volgen de samenstelling van



welke formule eischt:

koolstof 47,5

waterstof 4,9

terwijl de formule  $C_7 H_{10} O_4 = 3 (CH_3 \cdot CO \cdot CO \cdot OH) - 2 CO_2 - H_2 O$  vordert:

koolstof 53,1

waterstof 6,3.

Mogelijk, dat de eerste stof een weinig bevat van de tweede, en wederkeerig in de producten, die zijn geanalyseerd (en tevens een weinig van een toevallig bijkomende zelfstandigheid, wellicht der oorspronkelijke verbinding.)

De formule <sup>1)</sup> van *winezuur* is die van  $C_7 H_8 O_3$ , dus  $= C_7 H_{10} O_4 - H_2 O$ ; maar dit lichaam schijnt weinig gemeen te hebben met de verbindingen, waarvan hier sprake is.

Voor 't oogenblik komt het minder waarschijnlijk voor, dat de lichamen zouden zijn afgeleid van  $2 (CH_3 \cdot CO \cdot CO \cdot OH)$ , daar b.v. de formule  $C_5 H_8 O_4 = 2 (CH_3 \cdot CO \cdot CO \cdot OH) - CO_2$  vordert:

koolstof 45,4

waterstof 6,0

en die van  $C_5 H_6 O_3 = 2 (CH_3 \cdot CO \cdot CO \cdot OH) - 2 CO_2 - H_2 O$  eischt:

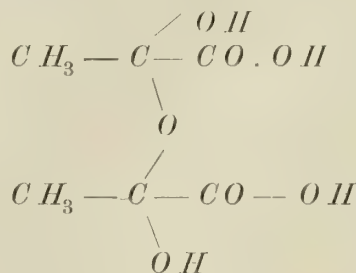
koolstof 52,6

waterstof 5,2.

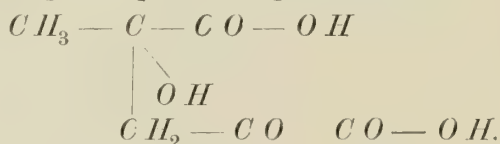
*Theoretisch gedeelte.* Met 't oog op de nieuwe feiten gevonden, en meer in 't bijzonder de gemakkelijke wijze, waarop parabrandidg-

<sup>1)</sup> Zie b.v. Böttinger: Ann. d. Chem. Bd. 208, S. 126.

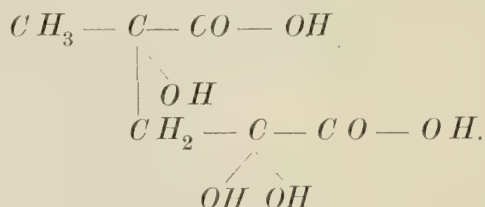
druivenzuur *kooldioxyde* schijnt te kunnen verliezen (bij indampen in waterige oplossing), is de formule  $2 (CH_3 \cdot CO \cdot CO \cdot OH) + H_2O$ , zijnde die door BÖTTINGER <sup>1)</sup> gegeven aan zijn *hydrivinezuur*:



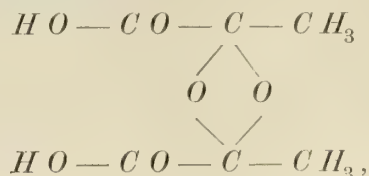
wel zoo goed als buitengesloten. Men zou kunnen aannemen een polymerisatie van 2 moleculen brandigdruivenzuur, en wel in de eerste plaats ter vorming van parabrandigdruivenzuur: <sup>2)</sup>



In geval men  $H_2O$  als deel zou willen opnemen in het molecuul (zie de vorige Verhandeling), zou de structuur kunnen worden aangenomen:



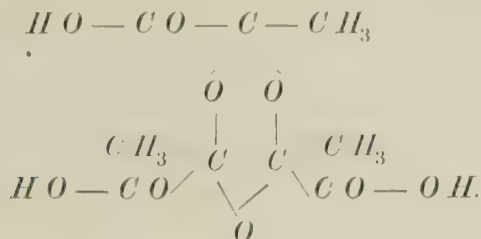
Er schijnt grond te zijn, lettende op de nieuwe feiten, dat de *amorphe* zouten van brandigdruivenzuur (de amorphe zouten van Berzelius) een product bevatten door zuurstof-polymerisatie, voor 2 moleculen brandigdruivenzuur aldus terug te geven:



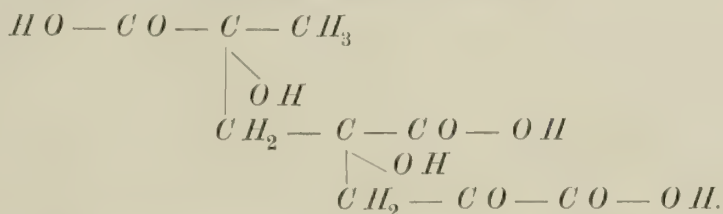
maar laten we er dadelijk op volgen, dat een polymerisatie van 3 moleculen meer kans zal hebben, ook beantwoordende aan 't geen dikwerf geschiedt. In dat geval heeft men:

<sup>1)</sup> Zie Rec. XIII, p. 397

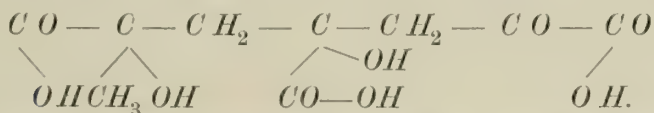
<sup>2)</sup> Zie Recueil T. XIII p. 394.



Men zou kunnen aannemen, dat een polymerisatie door *zuurstof*, veelal de *aldol*-polymerisatie vooraf gaat. Lettende op de laatst gevonden feiten, komt het waarschijnlijk voor, dat 3 *moleculen* brandigdruivenzuur zijn gepolymeriseerd, en *niet* 2 *moleculen*. De labiliteit van het molecuul is dan betrekkelijk grooter:



Schrijven we deze formule een weinig anders, om de wijze van binding der hoofdketen beter te doen uitkomen:



Alleen een voortgezette studie van het parabrandigdruivenzuur en zijne afgeleiden, alsmede van het zuur der *amorphe* zouten (van Berzelius) van het brandigdruivenzuur, zal in staat zijn, om meer licht te geven. En deze studie zou ons tevens de reacties kunnen doen kennen, in geval baryt werkt op brandigdruivenzuur bij hogere temperatuur. Het ontstaan in dat geval van aromatische ketens, spreekt tevens voor een polymerisatie bij den aanvang van 3 *moleculen* brandigdruivenzuur.

Het voorgaande schijnt te kunnen leiden tot deze gevolgtrekkingen.

#### *Resumptie.*

1. Er werd een studie gemaakt van de ontledingsproducten, afgeleid van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product, door nêerslaan met barytwater, tot dusverre bestempeld als *kristallijne* baryumverbinding en lichaam in *plaatjes*. De eerste verbinding <sup>1)</sup> is gebleken

<sup>1)</sup> Zie deze Verhandeling p. 7.

te zijn *zuringzuur baryum*:  $C_2 O_4 Ba + 2 H_2 O$  (te zuiveren door behandeling met een weinig verdund zoutzuur). Dit hydraat, dat tot nog toe onbekend schijnt te zijn, verliest  $1\frac{1}{2} H_2 O$  bij verhitten tot nabij  $120^\circ$ , en het overblijvende  $\frac{1}{2} H_2 O$  tusschen  $120^\circ$ — $140^\circ$ . Het lichaam in *plaatjes* levert geen *zuringzuur* <sup>1)</sup> op, indien het vrij is van de *kristallijne* baryumverbinding, maar geeft (na oplossen in verdund zoutzuur, nêerslaan met zwavelzuur, indampen van het filtraat, en behandeling van het terugblijvende met abs. aether) *druivenzuur* <sup>2)</sup> en een tweede *kristallijn* zuur <sup>3)</sup>, omtrent wiens karakter men zich nog niet afdoende kan uitlaten. Bijgevolg zijn als ontledingsproducten bekend van tartrylwijnsteenzuur (verondersteld, dat dit wordt gevormd, hetgeen nog niet bepaald is bewezen): *zuringzuur*, *druivenzuur* en gemeld ander *kristallijn* zuur, dit laatste nader te vervolgen. Evenwel moet nog worden nagegaan, of druivenzuur ook ontstaat bij de reacties vóór en gedurende de vorming van tartrylwijnsteenzuur (zie boven) of niet (anders gezegd, of dan gedeeltelijke omzetting plaats heeft van rechts- in links-draaiend wijnsteen-*zuur*).

De ontleding van oplosbaar en onoplosbaar product onder den invloed van baryt, is meer of min quantitatief behandeld <sup>4)</sup>. Er werd een proef beschreven ten doel hebbende, om het verschil tusschen de *kristallijne* stof en het lichaam in *plaatjes* duidelijk te doen uitkomen <sup>5)</sup>; er werd gehandeld over den vorm waarin chloor voorkomt in *onoplosbaar* product <sup>6)</sup>; een wijziging aangegeven in de wijze, om de reactie te doen plaats hebben van aethylchloride op dinatrium-wijnsteenzuur aethyl <sup>7)</sup>; en zoo ook in de bereiding van *wijnsteenzuuraethyl* <sup>8)</sup>. Er werd eindelijk een rectificatie aangegeven <sup>9)</sup>.

2. *Parabrandigdruivenzuur*. De formule  $(CH_3 \cdot CO \cdot CO \cdot OC_2)_2 Ba + H_2 O$  werd nader door analyse vastgesteld (deze formule is slechts te beschouwen als een uitdrukking voor de samenstelling en volstrekt niet voor de structuur). Bij analyse bleek, dat het parabrandigdruivenzuur in vrijen staat een *onstandvastig* lichaam is, dat gemakkelijk, waarschijnlijk kooldioxyde en water kan loslaten. Lettende op de nieuwe feiten, komt het niet onwaarschijnlijk voor, dat het parabrandigdruivenzuur een *aldolisch* polymerisatieproduct

<sup>1)</sup> Zie Verhandl. kon. Akad. D. II p. 18, 31, 40.

<sup>2)</sup> Zie deze Verhandeling p. 5.

<sup>3)</sup> l. c. p. 6. <sup>7)</sup> l. c. p. 14.

<sup>4)</sup> l. c. p. 11. <sup>8)</sup> l. c. p. 14.

<sup>5)</sup> l. c. p. 10. <sup>9)</sup> l. c. p. 11.

<sup>6)</sup> l. c. p. 14.

is van brandigdruivenzuur, en het zuur der *amorphe* zouten (van Berzelius) is gepolymeriseerd door *zuurstof*; dat trouwens nader door het experiment is uit te maken (tevens het geval met de ontledingsproducten van parabrandigdruivenzuur, wier formules  $C_8 H_{10} O_6$  enz., voorloopig daaraan gegeven als uitdrukking der samenstelling, een verder onderzoek vereischen.)

In een volgende verhandeling, zal men de uitkomsten mededeelen van nadere onderzoekingen met betrekking tot *oplosbaar* en *onoplosbaar* product; zoomede van die, betreffende het parabrandigdruivenzuur en eenige afgeleiden.

*Utrecht, 29 Juni 1895.*





Over den invloed van een gehalte aan  
zwaveldioxyde der vlam van steenkolengas op de  
quantitatieve bepaling van eenige  
stoffen<sup>1)</sup>, en over een middel om daarin te voorzien,

DOOR

E. MULDER.

Reeds lang is bekend, dat de zwavel van steenkolengas niet weinig bezwaar kan opleveren bij de quantitatieve bepaling van eenige scheikundige lichamen. In de volgende bladzijden is een middel aangegeven, om daarin ten deele te gemoet te komen, terwijl tevens eenige gegevens betreffende dit onderwerp zijn medegedeeld.

Het uitgangspunt tot dit onderzoek betrof de bepaling van baryt als koolzuur baryum. Toevallig was een platinakroes wat sterk verhit, terwijl de kroes ongedekt was; en dit veroorzaakte een wel is waar betrekkelijk geringe vermeerdering in gewicht, maar toch merkbaar en abnormaal, en waarschijnlijk toe te schrijven aan het gehalte van de vlam (van steenkolengas) aan *zwaveldioxyde*, dat aanleiding gaf tot de volgende proeven.

Om die fout te ontgaan, zonder toevlucht te nemen tot een scheikundig zuiveren van het lichtgas (wel van zwavelkoolstof), heeft men zich laten leiden door de gedachte, het zwaveldioxyde zooveel mo-

<sup>1)</sup> Zie over dit onderwerp de uitgebreide literatuur in het: „Zeitschrift f. Anal. Ch. von Fresenius, Jahrg. 32, S. 213 (1893); zoo ook: M. J. DOCTERS VAN LEEUWEN, in het Recueil. T. XI, p. 103.

gelijk verre te houden van de te bepalen stof, en dat, terwijl de kroes open is of gesloten, en werkende bij een niet hooge maar *betrekkelijk lage temperatuur*. Men heeft daarbij gebruik gemaakt van de volgende toestellen, of liever gezegd, getroffen inrichtingen.

### I. Eerste inrichting.

Er werd op een plaat *asbest* (ter oppervlakte van  $32^2$  centim<sup>2</sup>.), waarin zich een opening bevond (van 7,6 centim. middellijn) een tweede asbestplaat gezet (van  $18^2$  centim<sup>2</sup>.), tevens voorzien van een opening (van 3,4 cent. middellijn), de laatste omgeven met *platinablik*, in welken ring dan de platinakroes is te brengen (hoogte 40 mm., grootste middellijn 24 mm.), gesteund door een kruis van platinadraad (de opening bestemd voor den kroes was zoo groot mogelijk genomen met betrekking tot den kroes). Het geheel werd geplaatst op een driehoet, en verhit met een Bunsen'sche lamp (in modernen vorm). Met deze inrichting, en zoo ook met twee anderen (zie later), werden eenige reeksen van proeven gedaan. Het hoofddoel hiervan is, zooals reeds werd gezegd, om het *zwaveldioxyde* der vlam van gewoon lichtgas zooveel mogelijk onschadelijk te maken, eenvoudig door het verwijderd te houden, zoodat de kroes ook open zou kunnen verhit worden (zonder deksel). Altijd wel verondersteld, dat dit gas niet door den gloeienden kroes diffundeert, dat inderdaad geacht kon worden het geval te zijn, indien onder zekere omstandigheden wordt gewerkt, hetgeen kan blijken uit proeven in dezen zin genomen (zie later).

In het volgende is gebruik gemaakt van de verkortingen hieronder vermeld. De beteekenis is van het cijfer:

1. met deksel
2. zonder deksel
3. donkerroodgloeihitte
4. betrekkelijk hooge temperatuur
5. zeer hooge temperatuur (wit gloeihitte)
6. met inrichting.

Wordt b.v. gehandeld over een proef 1,3, dan beteekent dit, dat de platinakroes werd verhit bij de donkerroodgloeihitte, met deksel (en zonder inrichting); en b.v. van een proef 2, 4, 6, dat de kroes, zonder deksel, is verhit bij een betrekkelijk hooge temperatuur op den toestel (hetzij I, II of III).

Met inrichting I, zooeven beschreven, werden, gebruik makende van een platinakroes (wegende met deksel 25,3 gr. en zonder deksel 19,3 gr.) de volgende uitkomsten erlangd. Er werd uit-

gegaan van 0,41 gr. baryum-carbonaat (gemaakt met  $\text{Ba Cl}_2$  en koolzuren ammoniak). De tijd is aangegeven in uren.

### Met en zonder toestel I.

Proeven.	Tijd in uren.	Verandering in gewicht (telke maal, en zoo ook bij de later volgende proeven.
2, 4	2	+ 0,0005 gr.
2, 4, 6	2	+ 0,0001 „
2, 4, 6	2	— 0,0001 „
2, 4	2	+ 0,0005 „
2, 4	4	+ 0,0012 „
2, 4, 6	4	— 0,0001 „
1, 4	4	0
1, 4, 6	4	0
2, 3	4	+ 0,0005 „

In een volgende reeks werd dezelfde kroes gebruikt, en uitgegaan van 0,3765 gr. van hetzelfde baryum-carbonaat:

Proeven.	Tijd in uren.	Verandering en gewicht.
2,4	4	+ 0,0012 gr.
2,4	4	+ 0,001 „
2,4	3	+ 0,0009 „
2,4	4	+ 0,0009 „
2,4	4	+ 0,0008 „

Te zamen + 0,0048 gr.

Met toestel I werd het gehalte aan baryum bepaald als baryum-carbonaat van baryumzouten met een organisch zuur, en wel met den besten uitslag (de bepaling werd gecontroleerd door een bepaling langs den natten weg met zwavelzuur).

### Toestel II.

De inrichting aangeduid met II verschilt van den door I aangegeven daarin, dat de open ruimte in 't midden van de plaat asbest is ingenomen door een *holle* plaat van een metaal (het best van platina), in welke laatste zich een opening bevindt, om den kroes op te nemen. Het doel er van was, om den kroes tot aan den bovenrand te kunnen doen gloeien (dat met inrichting I niet volkomen is te bereiken).

De plaat asbest had in toestel II de afmeting van 25<sup>2</sup> centim<sup>2</sup>.; de opening voor het holle reservoir een middellijn van 7 centim., en dit een opening van 3,2 centim., bestemd voor den kroes.

In de proeven die volgen, had de platinakroes met deksel een gewicht van 10,3 gr. en zonder deksel van 18,3 gr., bevattende 0,3917 gr. baryum-carbonaat, en wel hetzelfde als bij de vorige proeven.

Met en zonder toestel II.

Proeven.	Tijd in uren.	Verandering in gewicht.
2, 4	4	0,0016 gr.
2, 4, 6	4	0.

In plaats van baryumcarbonaat werd *cuprioxyde* genomen, en wel 0,0625 gr. Er werd gevonden:

Proeven.	Tijd in uren.	Verandering in gewicht.
2, 4	4	— 0,0001 gr.
2, 3	4	0.

En in een volgende overeenkomstige proef met 0,4081 gr. *cuprioxyde*:

Proef	Tijd in uren.	Verandering in gewicht.
2, 4	4	0.

In geval van *cuprioxyde*, zou het dus overbodig kunnen geacht worden, om zich van eenige inrichting te bedienen (tenzij, dat men gebruik maakt van een zeer hooge temperatuur, dat overigens niet werd nagegaan).

Een nieuwe reeks van bepalingen werd genomen met 0,3897 gr. baryum-carbonaat (van dezelfde bereiding) en denzelfden kroes, de volgende uitkomsten opleverende:

Proef.	Tijd in uren.	Gewichtsverandering.
2, 4	4	0,001 gr.
2, 4	6	0,0006 „
2, 4	5	0.

Deze eindcijfers schijnen wat vreemd toe, maar het baryumcarbonaat was al meer en meer zamengeklonterd, en het schijnt, dat dit lichaam in dezen toestand de eigenschap verliest, om zwaveldioxyde op te nemen, of wel in een veel geringer graad deze eigenschap bezit. De aggregatie-toestand van baryum-carbonaat schijnt dienaangaande grooten invloed uit te oefenen, en zelfs de wijze van bereiding zich te doen gevoelen in de einduitkomst (zie later).

Het zou overbodig zijn, om mede te deelen, dat men zich behoorlijk heeft overtuigd van de aan- of afwezigheid van *zwavelzuur baryum*, gevormd door opname van zwaveligzuur, in de laatste en andere reeksen van proeven genomen (door behandeling der massa met verdund zoutzuur, enz., onder de vereischte omstandigheden).



Bij zeer hooge temperatuur is de uitkomst merkbaar een andere, zooals trouwens duidelijk kan wezen, want

1° kan ontleding intreden van baryum-carbonaat in baryumoxyde en kooldioxyde, dat ontwijkt;

2° zou door het gloeiende platina zwaveldioxyde kunnen dringen in den kroes, als gevolg van diffusie;

3° eindelijk zou een verandering in aggregatie-toestand de einduitkomst kunnen wijzigen.

In de volgende bepalingen werd de proef gedaan met 0,3992 gr. baryum-carbonaat (zonder toestel), en met 0,3886 gr. dezer stof (met toestel), bij een betrekkelijk zeer hooge temperatuur, leidende tot deze uitkomsten:

Proef.	Tijd in uren.	Verandering in gewicht.
1, 5	5	— 0,0041 gr.
1, 5, 6	4	— 0,0004 „
1, 5, 6	4	— 0,0004 „

Hierbij dient opgemerkt, dat, gebruik makende van den toestel, de temperatuur betrekkelijk lager is dan werkende (met eenzelfde vlam) zonder inrichting, omdat er in het eerste geval nog al warmte verloren gaat.

### Toestel III.

Deze toestel is wel de eenvoudigste der drie, want er wordt alleen gebruik gemaakt van de *kleinste plaat asbest* (zie pag. 26), dus van de dimensie 18<sup>2</sup> centim<sup>2</sup>.. Er werd aangevangen met de proef 1, 4, 6 (met 0,2577 gr. van hetzelfde baryum-carbonaat). De volgende proef spreekt duidelijk genoeg:

Proef.	Tijd in uren.	Verandering in gewicht.
1, 4, 6	4	0

De proeven, die volgen, werden genomen met een ander apparaat van koolzuur baryum, gemaakt door barytwater en kooldioxyde, met deze uitkomsten (uitgaande van 0,5634 gr. koolzure verbinding):

Proef.	Tijd in uren.	Verandering in gewicht.
1, 5, 6	4	— 0,0029 gr. (zie vroeger)
„	4	+ 0,0003 „
„	4	0
„	4	0

De betrekkelijk *zeer hooge* temperatuur had de stof wat doen

veranderen, en zamenklonteren. Bij behandeling met verdund zoutzuur, bleef terug, op een zeer klein filtrum (genoegzaam vrij van asch), na gloeiing, 0,0039 gr.. Om te weten, of de platina-kroes veranderd was als gevolg van dat verhit zijn, werd deze behandeld met gesmolten kalium-bisulphaat en geschuurd met zand (zooals men gewoon is platina-kroezen te reinigen). Vroeger was gevonden, dat *gemiddeld* de platina-kroes in kwestie (*niet* verhit zijnde) in gewicht verliest door de eerste behandeling 0,0003 gr. en de tweede 0,0005 gr. of te zamen 0,0008 gr.. Maar na gemelde proeven, verloor de kroes als gevolg dezer twee manipulaties 0,0055 gr.; en er blijft dus over voor het verlies (onder deze omstandigheden) van den kroes, als gevolg van het verhitten,  $0,0055 - 0,0008 = 0,0047$  gr.. Hieruit volgt noodwendig *niet*, dat de kroes als zoodanig had verloren in gewicht 0,0047 gr., maar *na* gezegde manipulaties, en toch onafhankelijk van deze (zie de berekening van zoeven).

Het na gloeiing teruggeblevene, zijnde 0,0039 gr. (zie hierboven) werd tot smeltens toe verhit met natrium-carbonaat (zuiver); de massa vervolgens behandeld met water, gefiltreerd van koolzuur baryum, en het filtraat onder de bekende omstandigheden neêrgeslagen met baryumchloride, gevende 0,004 gr. baryum-sulphaat.

In de volgende proef werd uitgegaan van 0,5146 gr. van hetzelfde koolzuur baryum (laatste bereiding), gebruik makende van denzelfden platinakroes (met deksel wegende 18,3 gr.):

Proef.	Tijd in uren.	Verandering in gewicht.
1, 4, 6	4, 5	0 gr..

Na de proef werd de platina-kroes behandeld met kalium-bisulphaat, vervolgens geschuurd met zand (zie boven), en dit, onder anderen, ter contrôle der proeven genomen bij *zeer* hoge temperatuur (zie vroeger). De kroes verloor slechts, na deze twee manipulaties (en na te zijn verhit bij een betrekkelijk hoge temperatuur, namelijk bij die aangegeven door 4), aan gewicht 0,0004 gr.. De massa, teruggebleven in den kroes na verhitting, werd behandeld met verdund zoutzuur, waarbij *sporen* terugbleven van een stof (baryum sulphaat), maar in een veel te geringe hoeveelheid om te kunnen gewogen worden.

Een nieuwe hoeveelheid koolzuur baryum, namelijk 0,5136 gr. van dezelfde bereiding, werd genomen:

Proef.	Tijd in uren.	Verandering in gewicht.
2, 4, 6	4	— 0,0001 gr.,

en een nieuwe reeks aangevangen met 0,5154 gr. van dezelfde bereiding:

Proef.	Tijd in uren.	Verandering in gewicht.
2, 4	4	+ 0,0005 gr.
„	3,5	+ 0,0002 „
„	4	+ 0,0004 „
„	4	+ 0,0005 „
„	4	+ 0,0005 „
„	5	+ 0,0006 „
„	4	+ 0,0005 „

Het koolzuur baryum scheen niet te zijn veranderd onder den invloed der warmte, en niet te zijn zamengeklonterd.

Deze proef werd vervolgd (kroes en inhoud bleven dus onveranderd), slechts alleen onder andere omstandigheden:

Proef.	Tijd in uren.	Verandering van gewicht.
1, 4	4	+ 0,0001
1, 4	4	+ 0,0002.

Deze vermeerdering, alhoewel zeer gering, dient meer of min verklaard te worden. Daartoe diene de volgende reeks:

Proef.	Tijd in uren.	Verandering in gewicht.
1, 4, 6	4	+ 0,0001
1, 4, 6	4	0
1, 4, 6	4	0
1, 4, 6	4	0
1, 5, 6	4	— 0,0002
1, 5, 6	4	0.

Het baryumcarbonaat was ten slotte geklonterd, en waarschijnlijk als gevolg van zijn veranderden aggregatie-toestand minder werkzaam, tegenover het zwaveligzuurgas; zie vroeger. De massa werd behandeld met verdund zoutzuur, enz., en de platinakroes gereinigd als vroeger. De kroes had verloren (daaronder begrepen het verlies als gevolg der twee bewerkingen, de behandeling met gesmolten kalium-bisulphaat en het afwrijven met zand) 0,0033 gr., en door daarvan af te trekken het verlies gemiddeld van wege dezer twee bewerkingen, blijft er  $0,0033 - 0,0008 = 0,0025$  gram over, als verlies in gewicht van den kroes (men verwijst met betrekking tot deze zaak naar het reeds vroeger medegedeelde). De platinakroes werd derhalve een weinig aangetast, als in een overeenkomstige proef vroeger medegedeeld. Ook liet de inhoud van den kroes een

zeer kleine hoeveelheid terug van een *grysachtige* stof na behandeling met verdund zoutzuur. Men zal dus wel moeten aannemen, dat de platinakroes een weinig is aangetast bij deze zeer hooge temperatuur door eenige bijtende baryt ( $\text{Ba O}$ ), gevormd door dissociatie van wat koolzuur baryum; gelijk lithia ( $\text{LiO}$ ) dit ook doet <sup>1)</sup>.

De kleinere vermeerdering in gewicht, waarvan sprake was, zal dus wel toe te schrijven zijn met 't oog op de bovenstaande gegevens, dat de kroes toevallig niet voldoende was gesloten (waarvan men zich dan ook vrij zeker kon overtuigen), als gevolg waarvan een weinig zwaveligzuurgas, tusschen kroes en deksel kon indringen. Eindelijk kan een klein verschil in gewicht, als b.v. van  $\frac{1}{10}$  milligr., zich van tijd tot tijd voordoen als gevolg der som van twee op elkander volgende kleinere verschillen met het juiste gewicht (aangezien slechts werd gewogen tot op  $\frac{1}{10}$  milligr.).

Overigens volgt uit het medegedeelde, dat, wanneer de platinakroes met koolzuur baryum wordt verhit bij zeer hooge temperatuur, er te gelijktijd kan intreden vermeerdering en vermindering in gewicht; te weten vermeerdering, door opname van zwaveldioxyde, overgaande in zwavelzuur, en vermindering door dissociatie van koolzuur baryum; om niet te spreken van andere bronnen van fouten (zie boven).

*Besluit.* Het medegedeelde moge aldus worden zamengevat.

1). Een baryumbepaling b.v., onder den vorm van baryum-carbonaat, wordt op weinig merkbare wijze aangedaan door het *zwaveldioxyde* der vlam van steenkolengas, ingeval men werkt met een platinakroes (van een *deksel* voorzien) bij een temperatuur bestempeld met „betrekkelijk hoog”, en aangegeven met het cijfer 4. Bij behandeling der massa, na gloeien, met verdund zoutzuur, kan het evenwel voorkomen, dat er sporen van baryumsulphaat terugblijven (te weinig, om in hoeveelheid te worden bepaald). Cuprioxyde schijnt bij deze temperatuur geen zwaveldioxyde vast te leggen.

2). Werkt men met een platinakroes en met den toestel aangegeven door III, dan wordt geen noemenswaardige fout begaan bij een temperatuur genoemd „betrekkelijk hoog” (4, zie boven), ook behoeft dan geen deksel te worden gebruikt; bijgevolg is dit nog minder noodig, indien men zich van een porseleinen kroes bedient. Men kan overigens altijd een vergelijkende proef nemen met de stof in onderzoek, onder overigens genoegzaam gelijke omstandigheden.

Bij een hooge temperatuur werkende, laat het gloeiende platina eenig zwaveldioxydegas door; ook kan eenig baryum-carbonaat worden

<sup>1)</sup> Zie b.v. Dict. de Chim. de Wurtz, Tom. II, art. platine, p. 1038.



ontleed, en eindelijk, het platina een weinig worden aangetast. Er kan dus te gelijkertijd vermeerdering en vermindering in gewicht zijn van deelen der massa in den kroes, en wellicht ook van den kroes als zoodanig.

Laat er aan worden toegevoegd, dat in den regel geen zeer hooge temperatuur wordt vereischt. Men vergist zich in dit opzicht niet weinig, door geen rekening te houden met het feit, dat, door den duur der bewerking te vergrooten, in vele gevallen met een lagere temperatuur kan volstaan worden. Men heeft wel bepalingen gedaan van koolzure alkaliën afkomstig van organische zouten, verhit in een porceleinen kroes bij een temperatuur zelfs wat beneden de roodgloei-hitte, met het gewenschte gevolg (en zonder dat de kroes op door weging merkbare wijze was aangetast).

*Utrecht 29 Juni 1895.*







DE MERKWAARDIGE PUNTEN VAN DEN  
INGESCHREVEN VEELHOEK

DOOR

**M. VAN OVEREEM Jr.**

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam

**(EERSTE SECTIE)**

**DL. III. N<sup>o</sup>. 7.**

**(MET ÉÉN PLAAT.)**

---

AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
1896.





# DE MERKWAARDIGE PUNTEN VAN DEN INGESCHREVEN VEELHOEK

DOOR

**M. VAN OVEREEM Jr.**

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam

(**EERSTE SECTIE**)

**DL. III. N<sup>o</sup>. 7.**

(**MET ÉÉN PLAAT.**)

---

AMSTERDAM .  
JOHANNES MÜLLER.  
1896.



# De merkwaardige punten van den ingeschreven Veelhoek.

DOOR

M. v. OVEREEM Jr.

## § I.

1. Een zeer bekende eigenschap van den driehoek leert, dat het middelpunt  $O$  van den omgeschreven cirkel, het zwaartepunt  $Z$ , het middelpunt van den cirkel van Euler  $N$  en het hoogtepunt  $H$  in één rechte liggen (de rechte van Euler) en wel zóó, dat:

$$OZ : ON : OH = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : 1$$

Is nu een willekeurige ingeschreven veelhoek gegeven, dan kunnen wij door het middelpunt  $O$  van den omgeschreven cirkel en het zwaartepunt der hoekpunten  $Z$  eene rechte trekken en op die rechte  $n$  punten aannemen, waarvoor de afstanden tot  $O$  zich verhouden als:

$$\frac{1}{n} : \frac{1}{n-1} : \dots : \frac{1}{2} : 1$$

terwijl het 1<sup>e</sup> punt samenvalt met het zwaartepunt.

Wij wenschen nu in deze verhandeling aan te toonen, dat dan het 2<sup>e</sup> punt het middelpunt is van een cirkel, overeenkomende met den cirkel van Euler eens driehoeks, terwijl de overige ( $n-2$ ) punten overeenkomen met het hoogtepunt des driehoeks.

Vooraf geven wij eenige bepalingen, die ons in staat zullen stellen de hier na te vinden eigenschappen op eenvoudige wijze te formuleeren.

2. *a.* Als men de hoekpunten van een veelhoek verdeelt in 2 groepen, dan noemen wij de figuur door de eene groep gevormd de *restfiguur* van die, welke door de andere groep gevormd wordt.

b. De restfiguren van de hoekpunten eens  $n$ -hoeks heeten zijne *primaire*  $(n-1)$ -hoeken.

c. De restfiguren van de zijden eens  $n$ -hoeks heeten zijne *primaire*  $(n-2)$ -hoeken.

d. De diagonaal eens  $n$ -hoeks, die  $p$  of  $n-p$  zijden onderspant heet diagonaal der  $(p-1)^e$  orde of diagonaal der  $(n-p-1)^e$  orde. (Wij nemen steeds het kleine der getallen  $(p-1)$  of  $n-p-1$ ).

e. De restfiguren van de diagonalen der  $1^e$  orde eens  $n$ -hoeks heeten zijne *secundaire*  $(n-2)$ -hoeken.

f. De restfiguren van de diagonalen der  $2^e$  orde eens  $n$ -hoeks heeten zijne *tertiaire*  $(n-2)$ -hoeken; enz.

g. Waar in deze verhandeling gesproken wordt van het zwaartepunt eens  $n$ -hoeks, bedoelen wij daarmede overal het zwaartepunt der hoekpunten.

h. Door het middelpunt van den omgeschreven cirkel eens ingeschreven veelhoeks en zijn zwaartepunt trekken wij een rechte.

Op die rechte nemen we  $n$  punten aan, allen met het zwaartepunt aan denzelfden kant van het middelpunt  $O$  gelegen en waarvan de afstanden tot  $O$  evenredig zijn met:

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$$

terwijl het  $1^e$  punt samenvalt met het zwaartepunt.

Deze punten zullen wij, te beginnen bij het zwaartepunt noemen:  $1^e, 2^e, 3^e, \dots, n^e$  *merkwaardige punt* des veelhoeks en de volgende notatie invoeren:

$P_n^m$

waarin,  $m$  = rangorde van het punt  
 $n$  = aantal zijden van den veelhoek, waartoe het punt behoort.

Blijks onze definitie heeft men dan

$$O P_n^m : O P_n^{m'} = \frac{1}{n-m+1} : \frac{1}{n-m'+1} = (n-m'+1) : (n-m+1).$$

Het zwaartepunt is het punt  $P_n^1$ .

De punten  $P_3^1, P_3^2, P_3^3$  zijn het zwaartepunt, het middelpunt van den cirkel van Euler en het hoogtepunt eens driehoeks.

## § II.

### *Stellingen.*

1. De  $(n-1)$  merkwaardige punten van de primaire  $(n-1)$  hoeken eens ingeschreven  $n$ -hoeks zijn de hoekpunten van  $(n-1)$  nieuwe



$n$ -hoeken, allen tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken.

*a.* Deze veelhoeken wijzen wij aan door de notatie.

$$V_n^m.$$

$m$  = rangorde van den nieuwen veelhoek

$n$  = aantal zijden van den oorspronkelijken veelhoek.

*b.* De kleinste veelhoek verkrijgt de laagste rangorde.

*c.* Den oorspronkelijken veelhoek wijzen wij aan door  $V_n$ .

2. De verhouding van de veelhoeken

$$V_n^1, V_n^2, V_n^3, \dots, V_n^m, \dots, V_n^{n-1}$$

tot den oorspronkelijken is respectievelijk

$$\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \frac{1}{n-3}, \dots, \frac{1}{n-m}, \dots, 1 \quad (\text{alle negatief genomen}).$$

*a.* De laatste veelhoek ligt dus symmetrisch met den oorspronkelijken ten opzichte van  $O$  en de betrekking tusschen  $V^n$  en  $V_n^{n-1}$  is wederkeerig.

3. Het punt  $P_n^m$  is het gelijkvormigheidspunt van  $V_n$  en  $V_n^m$ .

#### 4. Hoofdstelling.

Alle rechten, die eenig punt  $P_a^p$  van een  $a$ -hoek, die tot een ingeschreven  $n$ -hoek behoort, verbinden met het punt  $P_b^q$  van den rest  $b$ -hoek, gaan door het punt  $P_n^{p+q-1}$  van den  $n$ -hoek en worden in dit punt verdeeld in deelen die zich verhouden als  $(b + 1 - q) : (a + 1 - p)$ .

5. De loodlijnen, uit de punten  $P_{n-2}^m$  van de primaire, secundaire, tertiaire, . . . ( $n - 2$ ) hoeken neergelaten op de restzijden en restdiagonalen snijden elkander in het punt  $P_n^{m+2}$  van den  $n$ -hoek.

*a.* In § I, *h*, is gebleken, dat het hoogtepunt van een driehoek het punt  $P_3^1$  is. In overeenstemming hiermede kunnen de punten  $P_n^3, P_n^4, \dots, P_n^n$ , die ook het gemeenschappelijk snijpunt zijn van  $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$  loodlijnen, de *hoogtepunten* van den  $n$ -hoek heeten. Een ingeschreven  $n$ -hoek heeft dus  $(n - 2)$  hoogtepunten.

6. De bovenste stukken der in 5 genoemde loodlijnen zijn  $\frac{2}{n - (m + 1)}$  van de middelloodlijnen der zijden en diagonalen.

Verdere stellingen eischen nu eerst de volgende bepaling, die wij niet in § I konden opnemen, maar waaraan stelling 1 moest voorafgaan.

*Bepaling.* De omgeschreven cirkels der veelhoeken  $V_n^1, V_n^2, \dots$

$V_n^{n-1}$  heeten respectievelijk  $1^e, 2^e, 3^e, \dots (n-1)^e$   $2n$ -puntscirkel.

a. Deze cirkels wijzen we aan door de notatie

$$O_n^m$$

(d. i. de omgeschreven cirkel van  $V_n^m$ )

b. Den omgeschreven cirkel van  $V_n$  wijzen we aan door  $O_n$ .

c. Als men den straal van  $O_n$  gelijk aan  $R$  stelt, dan is, zooals uit stelling 2 blijkt, de straal van  $O_n^m$  gelijk

$$\text{aan } \frac{R}{n-m}.$$

7.  $P_n^{m+1}$  is het middelpunt van  $O_n^m$ .

8.  $O_n^m$  deelt de afstanden van  $P_n^{m+2}$  tot de hoekpunten van den veelhoek in reden als  $1 : (n-m-1)$ .

a. Zoo deelt bijv. in een driehoek de cirkel van Euler  $O_3^1$  de afstanden van het hoogtepunt  $P_3^3$  tot de hoekpunten in reden als  $1 : 1$ . Deze deelpunten vormen dus met de hoekpunten  $P_2^1$  van  $P_3^1$  d. i., met de middens der zijden, 6 punten, waardoor de cirkel van Euler gaan moet. Evenzoo verkrijgt men voor een ingeschreven  $n$ -hoek  $2n$  punten. Vandaar de naam  $2n$ -puntscirkels.

b. De eigenschap in stelling 8 gaat niet meer door voor den cirkel  $O_n^{n-1}$ , omdat er geen punt  $P_n^{n+1}$  bestaat.

9. De  $2(n-1)$ -puntscirkels  $O_{n-1}^m$  van de primaire  $(n-1)$ -hoeken des oorspronkelijken  $n$ -hoeks snijden elkaâr in het punt  $P_n^{m+2}$  van den  $n$ -hoek.

10.  $P_n^m$  is het inwendig gelijkvormigheidspunt van  $O_n$  en  $O_n^m$   
 $P_n^{m+2}$  is het uitwendig gelijkvormigheidspunt van  $O_n$  en  $O_n^m$

Vergelijkt men hiermede stelling 7, namelijk:

$P_n^{m+1}$  is het middelpunt van  $O_n^m$ , dan verkrijgt men

11.  $O_n, P_n^m, P_n^{m+1}, P_n^{m+2}$  liggen harmonisch.

12. De som van de vierkanten der zijden en diagonalen eens ingeschreven veelhoeks vermeerderd met het vierkant van de lijn van Euler is gelijk aan  $n^2$ -maal het vierkant van den straal des omgeschreven cirkels.

a. Duidt men de lengte dezer lijn van Euler aan door  $L$ , de som van de vierkanten der zijden door  $S^2$ , dan is dus

$$S^2 + L^2 = n^2 R^2$$

13. De som van de vierkanten der afstanden van de hoekpunten eens ingeschreven veelhoeks tot het punt  $P_n^m$  bedraagt:

$$\Sigma (A_p P_n^m)^2 = \frac{(n-2m+2) S^2 + n(m-1)^2 R^2}{(n-m+1)^2}$$

14. *a.* De punten  $P_{n-2}^m$  van de primaire  $(n-2)$ -hoeken eens ingeschreven  $n$ -hoeks zijn de hoekpunten van een  $n$ -hoek, waarvan de zijden evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan  $\frac{1}{n-(m+1)}$  van de diagonalen der 1<sup>e</sup> orde des oorspronkelijken  $n$ -hoeks

*b.* De punten  $P_{n-2}^m$  van de secundaire  $(n-2)$ -hoeken zijn de hoekpunten van een  $n$ -hoek, waarvan de diagonalen der 1<sup>e</sup> orde evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan  $\frac{1}{n-(m+1)}$  van de diagonalen der 3<sup>e</sup> orde  $[(n-5)^e$  orde] des oorspronkelijken  $n$ -hoeks.

*c.* De punten  $P_{n-2}^m$  van de tertiaire  $(n-2)$ hoeken zijn de hoekpunten van een  $n$ -hoek, waarvan de diagonalen der 3<sup>e</sup> orde evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan  $\frac{1}{n-(m+1)}$  van de diagonalen der 5<sup>e</sup> orde  $[(n-7)^e$  orde] des oorspronkelijken  $n$ -hoeks. Enz.

15. De punten  $P_{n-2}^m$  van de primaire, secundaire, tertiaire . . .  $(n-2)$ -hoeken eens ingeschreven  $n$ -hoeks zijn respectievelijk de middens van de zijden, van de diagonalen der 1<sup>e</sup> orde, van de diagonalen der 2<sup>e</sup> orde, . . . van een nieuwen  $n$ -hoek, tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken. Verhouding:  $-\frac{2}{n-(m+1)}$ .

*a.* Aangezien er  $(n-2)$  punten  $P_{n-2}^m$  in elken  $(n-2)$ -hoek zijn, zijn er ook  $(n-2)$  van de in n<sup>o</sup>. 15 genoemde veelhoeken. Deze wijzen we in volgorde der grootte aan door:

$$W_n^1, W_n^2, \dots, W_n^{n-2}.$$

16. Het punt  $P_n^m$  van den oorspronkelijken veelhoek  $V_n$  is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van  $W_n^{m-2}$ .

### § III.

1. Alvorens over te gaan tot het bewijs van bovenstaande stellingen moeten wij enkele eigenschappen van het zwaartepunt behandelen, die wij bij het bewijs van genoemde stellingen noodig zullen hebben.

Bedoelde eigenschappen zijn de volgende:

*a.* De veelhoek die de zwaartepunten van de primaire  $(n-1)$ -hoeken eens willekeurigen  $n$ -hoeks tot hoekpunten heeft, is tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken en de verhouding is  $-\frac{1}{n-1}$ .

*b.* Het zwaartepunt is het gemeenschappelijk snijpunt van alle rechten die de zwaartepunten van twee restfiguren verbinden.

*c.* Deze rechten deelen elkander in deelen, die omgekeerd evenredig zijn met het aantal hoekpunten van de figuren, uit wier zwaartepunt zij getrokken zijn.

*d.* De som van de vierkanten der afstanden van het zwaartepunt tot de hoekpunten bedraagt  $\frac{1}{n}$  van de som der vierkanten van de zijden en diagonalen.

*e.* Duidt men de hoekpunten van den veelhoek aan door  $A_p$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ) en is  $P$  een willekeurig punt, dan heeft men:

$$\Sigma (A_p P)^2 = \Sigma (P_n^1 A_p)^2 + n (P P_n^1)^2$$

waarin  $P_n^1$  het zwaartepunt voorstelt.

2. Om de eerste twee eigenschappen te bewijzen nemen wij de tweede als waar aan voor alle veelhoeken van minder dan  $n$  zijden.

In fig. 1 zijn  $A_1$  en  $A_2$  twee hoekpunten van een  $n$ -hoek,  $P_{n-2}^1$  het zwaartepunt van de restfiguur van  $A_1 A_2$ . Trek  $A_1 P_{n-1}^1$  en  $A_2 P_{n-2}^1$ . Dan liggen op deze rechten de zwaartepunten der restfiguren van  $A_2$  en  $A_1$ . Om deze punten, die beide aangeduid zouden moeten worden door  $P_{n-1}^1$ , van elkander te onderscheiden plaatsen we een tweeden aanwijzer onderaan en duiden het zwaartepunt van de restfiguur van  $A_1$  aan door  $P_{1,n-1}^1$  en dat van de restfiguur van  $A_2$  door  $P_{2,n-1}^1$ .

Men heeft nu: (§ III, 1, *b*)

$$P_{n-2}^1 P_{2,n-1}^1 : P_{2,n-1}^1 A_1 = P_{n-2}^1 P_{1,n-1}^1 : P_{1,n-1}^1 A_2 = 1 : (n-2)$$

$$\text{en dus } P_{1,n-1}^1 P_{2,n-1}^1 // A_1 A_2 \text{ en } P_{1,n-1}^1 \cdot P_{2,n-1}^1 = \frac{A_1 A_2}{n-1} (1)$$

Nu zijn  $P_{1,n-1}^1$  en  $P_{2,n-1}^1$  twee hoekpunten van den veelhoek  $V_n^1$ , die de zwaartepunten der primaire  $(n-1)$ -hoeken tot hoekpunten heeft. Uit (1) blijkt nu dat deze veelhoek homothetisch is met den oorspronkelijken en dat de verhouding is  $-\frac{1}{n-1}$ . Hiermede is III, 1, *a* bewezen.

Omdat de veelhoeken  $V_n$  en  $V_n^1$  homothetisch zijn, snijden de lijnen, die hun overeenkomstige hoekpunten verbinden, elkander in één punt  $P_n^1$ , het zwaartepunt van den oorspronkelijken veelhoek.

Tevens blijkt:

$$A_1 P_n^1 : P_n^1 P_{1,n-1}^1 = A_1 A_2 : P_{1,n-1}^1 P_{2,n-1}^1 = (n-1) : 1,$$

waarmede (2, *c*) bewezen is voor een hoekpunt en zijne restfiguur. Trekt men de lijn  $P_{n-2}^1 P_n^1$  door tot in  $P_2^1$ , dan is  $P_2^1$  het midden van  $A_1 A_2$ , omdat  $A_1 P_{2,n-1}^1 P_{1,n-1}^1 A_2$  een trapezium is. Beschouwt men  $A^1 P_n^1 P_{1,n-1}^1$  als transversaal in  $\Delta P_{n-2}^1 P_2^1 A_2$  dan



$$\text{heeft men} \quad \frac{A_1 P_2^1}{A_1 A_2} \times \frac{P_{1,n-1}^1 A_2}{P_{1,n-1}^1 P_{n-2}^1} \times \frac{P_n^1 P_{n-2}^1}{P_n^1 P_2^1} = 1$$

$$\text{en dus} \quad \frac{P_n^1 P_{n-2}^1}{P_n^1 P_2^1} = \frac{2}{n-2}, \text{ waarmede (2, c) bewezen is voor een}$$

zijde of diagonaal en zijn restfiguur. Op dezelfde wijze kan men verder gaan voor een driehoek en zijn restfiguur. Enz.

Wij zullen thans de eigenschappen *d* en *e* bewijzen, aannemende dat zij doorgaan voor veelhoeken met minder dan *n* zijden.

Volgens *e* heeft men voor  $A_1$  ten opzichte van zijn rest-(*n*-1)-hoek:

$$A_1 A_2^2 + A_1 A_3^2 + A_1 A_4^2 + \dots + A_1 A_n^2 = \frac{1}{n-1} \times (\text{De som van de vierkanten der zijden en diagonalen van den rest-}(n-1)\text{-hoek van } A_1) \\ + (n-1) (A_1 P_{1,n-1}^1)^2$$

Voor elk der hoekpunten kan men een overeenkomstige betrekking opschrijven.

De som dier gelijkheden is dan een symmetrische functie van de zijden en diagonalen en het is gemakkelijk in te zien dat men zal verkrijgen:

$$2 S^2 = \frac{n-2}{n-1} S^2 + (n-1) \Sigma (A_p P_{p,h-1}^1)^2$$

Nu is  $A_p P_{p,n-1}^1 = \frac{n}{n-1} \cdot A_p P_{1,n-1}^1$  (§ III, 2, 6) en dus

$$2 S^2 = \frac{n-2}{n-1} S^2 + (n-1) \times \frac{n^2}{(n-1)^2} \Sigma (A_p P_{1,n}^1)^2$$

waaruit,  $\Sigma (A_p P_{1,n}^1)^2 = \frac{1}{n} \cdot S^2$

waarin  $S^2$  de som van de vierkanten der zijden en diagonalen voorstelt.

Dit is de vierde van bovenstaande stellingen van het zwaartepunt.

De vijfde kan als volgt bewezen worden.

Zij *P* (fig. 1) een willekeurig punt. Past men op driehoek  $PA_1^1 P_{1,n-1}^1$  het theorema van *Stewart* toe, dan verkrijgt men:

$$(PA_1^1)^2, P_n^1 P_{1,n-1}^1 + (PP_{1,n-1}^1)^2, A_1 P_n^1 = (PP_n^1)^2, A_1 P_{1,n-1}^1 + \\ A_1 P_n^1 \cdot A_1 P_{1,n-1}^1 \cdot P_n^1 P_{1,n-1}^1 (1)$$

Aangezien volgens de 2<sup>o</sup> eigenschap van het zwaartepunt  $A_1 P_n^1: P_n^1 P_{1,n-1}^1 = (n-1):1$ , kan men voor (1) ook schrijven:

$$(PA_1^1)^2 + (n-1) (PP_{1,n-1}^1)^2 = n (PP_n^1)^2 + \frac{n-1}{n} (A_1 P_{1,n-1}^1)^2 (2)$$

Omdat wij de stelling als bewezen aannemen voor den (*n*-1)-hoek, hebben we volgens stelling (4) van het zwaartepunt:

$$\Sigma (A_p P)^2 = \Sigma (P_{1,n-1}^1 A_p)^2 + (n-1) PP_{1,n-1}^1^2 \quad (p = 2, 3, 4, \dots, n) \quad (2, a)$$

Telt men deze gelijkheid op bij (2) dan komt er:

$$\Sigma (A_p P)^2 + (A_1 P)^2 = n (PP_n^1)^2 + \frac{n-1}{n} (A_1 P_{1,n-1}^1)^2 + \Sigma (P_{1,n-1}^1 A_p)^2 (3)$$

Laat ons nu de som van de vierkanten der zijden en diagona-



len van den rest- $(n-1)$ -hoek van  $A_1$  aanduiden door  $S_{n-1}^2$  dan is blijkens stelling 4 van het zwaartepunt:

$$\Sigma (P_{1,n-1}^1 A_p)^2 = \frac{1}{n-1} S_{n-1}^2 \quad (4)$$

terwijl uit het bewijs van stelling *d* opgemaakt kan worden:

$$(n-1) (A_1 P_{1,n-1}^1)^2 = A_1 A_2^2 + A_1 A_3^2 + \dots + A_1 A_n^2 - \frac{1}{n-1} S_{n-1}^2 \quad (5)$$

Substitueert men (4) en (5) in (3), daarbij opmerkende dat

$\Sigma (A_p P)^2 + (A_1 P)^2 = \Sigma (A_p P)^2$  (als in de eerste term van het 1<sup>e</sup> lid  $p = 2, 3, 4 \dots n$  en in het 2<sup>e</sup> lid  $p = 1, 2, 3 \dots n$ , wat blijkens (2, *a*) het geval is) dan komt er:

$$\begin{aligned} \Sigma (A_p P)^2 &= n (PP_n^1)^2 + \frac{1}{n} (A_1 A_2^2 + A_1 A_3^2 + \dots + A_1 A_n^2) \\ &\quad - \frac{1}{n(n-1)} S_{n-1}^2 + \frac{1}{n-1} S_{n-1}^2 \\ &= n (PP_n^1)^2 + \frac{1}{n} S_n^2 \\ &= n (PP_n^1)^2 + \Sigma (P_n^1 A_p)^2 \quad (\text{stelling } d). \end{aligned}$$

#### § IV.

Wij gaan thans over tot het bewijs der in § II genoemde stellingen.

**1 en 2.**  $A_1 A_2$  (fig. 2) is eene zijde eens ingeschreven veelhoeks,  $O$  het middelpunt van den omgeschreven cirkel. De punten  $P_{1,n-1}^1$  en  $P_{2,n-1}^1$  hebben dezelfde beteekenis als in de voorgaande figuur. Laten verder  $P_{1,n-1}^m$  en  $P_{2,n-1}^m$  de  $m^e$  merkwaardige punten zijn van de restfiguren van  $A_1$  en  $A_2$ .

Blijkens onze definitie (§ I, 2, h.) hebben wij dan, door in plaats van  $n$  te schrijven  $(n-1)$  en voor  $m'$  te nemen 1:

$$O P_{1,n-1}^m : O P_{1,n-1}^1 = O P_{2,n-1}^m : O P_{2,n-1}^1 = (n-1) : (n-m).$$

Hieruit volgt, dat  $P_{1,n-1}^m P_{2,n-1}^m \parallel P_{1,n-1}^1 P_{2,n-1}^1 \parallel A_1 A_2$  en verder dat  $P_{1,n-1}^m P_{2,n-1}^m = \frac{n-1}{n-m} P_{1,n-1}^1 P_{2,n-1}^1 = \frac{A_1 A_2}{n-m}$  (Zie

§ III, 1, *a*)

Hieruit volgt, in verband met stelling 1, *a* in § III, onmiddellijk de waarheid der stellingen 1 en 2 in § II.

**3.** Wij bewijzen thans stelling III.

Uit stelling 1 is het bestaan gebleken van de veelhoeken  $V_n^m$ . Tot deze veelhoeken behoort ook de veelhoek  $V_n^1$  gevormd door de zwaartepunten van de primaire  $(n-1)$ -hoeken des  $n$ -hoeks. Het gelijkvormigheidspunt van  $V_n$  en  $V_n^1$  is, blijkens § III, 1, *b*, het punt  $P_n^1$ . Omdat de veelhoeken  $V_n^1, V_n^2, V_n^3$  enz. alle tegengesteld homothetisch zijn met  $V_n$  zijn ze onderling rechtstreeksch homo-

thetisch en hebben zij het middelpunt  $O$  des omgeschreven cirkels tot gelijkvormigheidspunt. Hieruit volgt dat de gelijkvormigheidspunten van  $V_n^1, V_n^2, V_n^3$ , enz. met  $V_n$  alle met  $O$  op een rechte moeten liggen, die dan ook het punt  $P_n^1$  bevat.

Hiermede is aangetoond, dat het gelijkvormigheidspunt van  $V_n^m$  en  $V_n$  inderdaad op de rechte van Euler ligt. Wij hebben nu nog aan te toonen, dat het juist het punt  $P_n^m$  is. Dit bewijzen wij als volgt:

Zij  $A_1$  (fig. 3) een hoekpunt eens ingeschreven veelhoeks,  $P_n^m$  en  $P_{n-1}^{m'}$  de gelijkvormigheidspunten van  $V_n^m$  en  $V_n^{m'}$  met  $V_n$ . Dan zullen wij moeten aantoonen, dat wij inderdaad gerechtigd zijn deze aan te duiden met  $P_{n-1}^m$  en  $P_{n-1}^{m'}$ , en dit zal het geval zijn als:

$$\frac{OP_n^m}{OP_{n-1}^{m'}} = \frac{n - m' + 1}{n - m + 1}.$$

Nu heeft men, als in fig. 3  $P_{n-1}^m$  en  $P_{n-1}^{m'}$  respectievelijk het  $m'$  en  $m''$  merkwaardige punt zijn van den rest- $(n - 1)$ hoek van  $A_1$ ,

$$\frac{A_1 P_n^m}{P_{n-1}^m P_n^m} = -(n - m) \text{ en } \frac{A_1 P_n^{m'}}{P_{n-1}^{m'} P_n^{m'}} = -(n - m') \quad (\S \text{ II, 1 en 2})$$

waaruit volgt:

$$\frac{P_{n-1}^m A_1}{P_{n-1}^m P_n^m} = n - m + 1 \text{ en } \frac{P_{n-1}^{m'} A_1}{P_{n-1}^{m'} P_n^{m'}} = n - m' + 1. \quad (1)$$

Beschouw nu  $OP_{n-1}^m P_{n-1}^{m'}$  als transversaal in  $\Delta A_1 P_n^m P_n^{m'}$  dan is:

$$\frac{OP_n^m}{OP_{n-1}^{m'}} \times \frac{P_{n-1}^{m'} P_n^{m'}}{P_{n-1}^{m'} A_1} \times \frac{P_{n-1}^m A_1}{P_{n-1}^m P_n^m} = +1$$

waaruit in verband met (1) volgt:

$$\frac{OP_n^m}{OP_{n-1}^{m'}} = \frac{n - m' + 1}{n - m + 1}.$$

Omdat voor  $m = 1$  het punt  $P_n^m$  het zwaartepunt des veelhoeks wordt en dit inderdaad het gelijkvormigheidspunt is van  $V_n$  en  $V_n^1$ , moet ook  $P_{n-1}^{m'}$  het gelijkvormigheidspunt zijn van  $V_n$  en  $V_n^{m'}$ .

4. Wij zullen thans overgaan tot het bewijzen van de *Hoofdstelling* (§ II, 4) en beginnen met het geval dat een der getallen  $p$  of  $q$  gelijk aan één is. Wij hebben dan (voor  $p = 1$ ), te bewijzen, dat de rechte  $P_a^1 P_b^q$  door het punt  $P_n^q$  gaat.

In fig. 4 zijn  $OP_a^1 P_a^p$  en  $OP_b^1 P_b^q$  de rechten van Euler van den in stelling 4 genoemden  $a$ -hoek en  $b$ -hoek. Deelen wij  $P_a^1 P_b^1$  in reden als  $b : a$ , dan is het deelpunt het punt  $P_n^1$  (§ III).  $OP_n^1$  is dan een gedeelte van de lijn van Euler van  $V_n$  en wij moeten

dus bewijzen, dat het snijpunt van  $P_a^1 P_b^q$  en  $O P_n^1$  het punt  $P_n^q$  is. Duiden wij nu dit snijpunt bij voorbaat reeds aan door  $P_n^q$ , dan hebben wij te bewijzen: (Zie § I, Bepaling)

$$O P_n^q : O P_n^1 = n : (n - q + 1).$$

Beschouw  $O P_n^1 P_n^q$  als transversaal in  $\Delta P_a^1 P_b^1 P_b^q$ , dan is:

$$\frac{O P_b^1}{O P_b^q} \times \frac{P_n^q P_b^q}{P_n^q P_a^1} \times \frac{P_n^1 P_a^1}{P_n^1 P_b^1} = 1.$$

Blijkens § I (Bep.) heeft men  $\frac{O P_n^1}{O P_b^q} = \frac{b - q + 1}{b}$  terwijl  $\frac{P_n^1 P_a^1}{P_n^1 P_b^1} = -\frac{b}{a}$

$$\text{en dus } \frac{P_n^q P_b^q}{P_n^q P_a^1} = -\frac{a}{b - q + 1} \quad (1).$$

Beschouw  $P_a^1 P_n^1 P_b^1$  als transversaal in  $\Delta O P_n^q P_b^q$  dan is:

$$\frac{P_a^1 P_n^q}{P_a^1 P_b^q} \times \frac{P_b^1 P_b^q}{P_b^1 O} \times \frac{P_n^1 O}{P_n^1 P_n^q} = 1.$$

Uit (1) volgt:  $\frac{P_a^1 P_n^q}{P_a^1 P_n^1} = \frac{b - q + 1}{a + b - q + 1} = \frac{b - q + 1}{n - q + 1}$

Uit § I, bep. blijkt:  $\frac{P_b^1 O}{P_b^1 P_b^q} = -\frac{b - q + 1}{q - 1}$  en dus

$$\frac{P_n^1 P_n^q}{P_n^1 O} = -\frac{q - 1}{n - q + 1}, \text{ derhalve } \frac{O P_n^1}{O P_n^q} = \frac{n - q + 1}{n} \quad (2). \text{ h. t. b. w.}$$

Reeds vonden wij in (1):

$$P_n^q P_b^q : P_n^1 P_n^q = a : (b - q + 1).$$

Het 2<sup>e</sup> gedeelte van stelling vier blijkt dus ook waar te zijn voor  $p = 1$ .

Thans overgaande tot het algemeene geval, hebben wij aan te toonen, dat het snijpunt van  $O P_n^q$  en  $P_a^p P_b^q$  het punt  $P_n^{p+q-1}$  is. Duiden we nu het snijpunt van  $P_a^p P_b^q$  en  $O P_n^q$  reeds bij voorbaat aan door  $P_n^{p+q-1}$ , dan zullen wij moeten bewijzen: (Zie § I, Bep. voor  $m = q$  en  $m' = p + q - 1$ ):

$$O P_n^q : O P_n^{p+q-1} = (n - p - q + 2) : (n - q + 1).$$

Beschouw daartoe  $O P_n^q P_n^{p+q-1}$  als transversaal in  $\Delta P_a^1 P_a^p P_b^q$  dan is:

$$\frac{O P_a^1}{O P_a^p} \times \frac{P_n^{p+q-1} P_a^p}{P_n^{p+q-1} P_b^q} \times \frac{P_n^q P_b^q}{P_n^q P_a^1} = 1.$$

Blijkens § I, bep. is:  $\frac{O P_n^1}{O P_a^p} = \frac{a - p + 1}{a} \quad (3)$

en volgens (1):  $\frac{P_n^q P_b^q}{P_n^q P_a^1} = -\frac{a}{b - q + 1}$ , derhalve

$$\frac{P_n^{p+q-1} P_a^p}{P_n^{p+q-1} P_b^q} = -\frac{b - q + 1}{a - p + 1} \quad (4)$$

Beschouw thans  $P_b^q$   $P_n^q$   $P_a^1$  als transversaal in  $\Delta$   $O$   $P_a^p$   $P_n^{p+q-1}$ , dan is:

$$\frac{P_b^q P_n^{p+q-1}}{P_b^q P_a^p} \times \frac{P_a^1 P_a^p}{P_a^1 O} \times \frac{P_n^q O}{P_n^q P_n^{p+q-1}} = 1$$

Uit (4) volgt:  $\frac{P_b^q P_n^{p+q-1}}{P_b^q P_a^p} = \frac{a-p+1}{a+b-p-q+2} = \frac{a-p+1}{n-p-q+2}$ .

Uit (3) volgt:  $\frac{P_a^1 P_a^p}{P_a^1 O} = -\frac{p-1}{a-p+1}$  en dus:

$$\frac{P_n^q O}{P_n^q P_n^{p+q-1}} = -\frac{n-p-q+2}{p-1} \text{ derhalve: } \frac{O P_n^q}{O P_n^{p+q-1}} = \frac{n-p-q+2}{n-q+1}$$

Uit (4) blijkt verder de waarheid van het 2<sup>e</sup> gedeelte der stelling.

5. Gemakkelijk kunnen we thans stelling V aantoonen.

In fig. 5 is  $A_1 A_2$  eene zijde eens ingeschreven veelhoeks,  $P_{n-2}^m$  en  $P_{n-2}^{m+2}$  zijn 2 merkwaardige punten van de restfiguur van  $A_1 A_2$ ,  $P_2^1$  is het midden (zwaartepunt) van  $A_1 A_2$ . Trek  $P_{n-2}^{m+2} P_n^{m+2}$ , dan ligt op deze lijn het punt  $P_n^{m+2}$  (§ II, 4) en wel zóó, dat:

$$P_{n-2}^{m+2} P_n^{m+2} : P_n^{m+2} P_2^1 = 2 : (n-m-3)$$

en dus:  $P_{n-2}^{m+2} P_n^{m+2} : P_{n-2}^{m+2} P_2^1 = 2 : (n-m-1)$ . (1)

Verder is volgens § I, Bep.

$$P_{n-2}^{m+2} O : P_{n-2}^m O = (n-m-1) : (n-m-3)$$

en dus:  $P_{n-2}^{m+2} P_{n-2}^m : P_{n-2}^{m+2} O = 2 : (n-m-1)$  (2)

Uit (1) en (2) volgt:

$$P_{n-2}^m P_n^{m+2} // O P_2^1 \text{ en dus } P_{n-2}^m P_n^{m+2} \perp A_1 A_2.$$

6. Uit (1) of (2) van het vorige bewijs volgt onmiddellijk:

$$P_{n-2}^m P_n^{m+2} = \frac{2 O P_2^1}{n-(m+1)}.$$

7. In § II, 6, bep., hebben we gezegd, dat we den omgeschreven cirkel van  $V_n^m$  zouden aanduiden door  $O_n^m$ . We zullen thans stelling 7 bewijzen.

In stelling 2, § II is gebleken dat de verhouding tusschen  $V_n^m$  en  $V_n$  gelijk is aan  $-(n-m)$ . Verder is  $P_n^m$  het gelijkvormigheidspunt van  $V_n^m$  en  $V_n$ . Nu heeft men:

$$O P_n^m : O P_n^{m+1} = (n-m) : (n-m+1)$$

en dus  $\frac{P_n^m O}{P_n^m P_n^{m+1}} = -(n-m)$

Hieruit blijkt, dat  $O$  en  $P_n^{m+1}$  overeenkomstige punten zijn van de veelhoeken  $V_n$  en  $V_n^m$ . Omdat  $O$  het middelpunt is van den omgeschreven cirkel van  $V_n$ , is  $P_n^{m+1}$  het middelpunt van den omgeschreven cirkel van  $V_n^m$ .



8. De straal van  $O_n^m$  zal gelijk zijn aan  $\frac{R}{n-m}$ , als  $R$  de straal van den omgeschreven cirkel van  $V_n$  is. Het behulp hiervan valt het gemakkelijk, stelling 8 te bewijzen.

In fig. 6 hebben we namelijk:

$$P_n^{m-1} O : P_n^{m+2} O = (n-m+1) : (n-m) \quad (1)$$

Zij  $A_1$  een hoekpunt van  $V_n$  en nemen we het punt  $Q$  zóó, dat

$$P_n^{m+2} Q : P_n^{m+2} A_1 = 1 : (n-m) \quad (2)$$

Uit (1) volgt dan:

$$P_n^{m+2} P_n^{m+1} : P_n^{m+2} O = 1 : (n-m) \quad (3)$$

$$\text{Uit (2) en (3) blijkt : } P_n^{m+1} Q = \frac{O A_1}{n-m} = \frac{R}{n-m}.$$

Omdat  $P_n^{m+1}$  het middelpunt en  $\frac{R}{n-m}$  de straal van  $O_n^m$  is ligt  $Q$  op  $O_n^m$ . Stelling 8 is hiermede bewezen. Blijkens het bewijs geldt zij niet alleen voor de hoekpunten van  $V_n$ , maar voor alle punten van zijn omgeschreven cirkel.

9. De straal van  $O_{n-1}^m$  is blijkens § II, 6,  $c$  gelijk aan  $\frac{R}{n-(m+1)}$ , zijn middelpunt is het punt  $P_{n-1}^{m+1}$  (Stelling 7). Nu is  $P_{n-1}^{m+1}$  een der hoekpunten van  $V_n^{m+1}$  en, aangezien de straal van  $O_n^{m+1}$  ook gelijk is aan  $\frac{R}{n-(m+1)}$ , gaat de cirkel  $O_{n-1}^m$  door het middelpunt van  $O_n^{m+1}$  d. i. door het punt  $P_n^{m+2}$  (Stelling 7). Hiermede is stelling 9 bewezen.

10. Bewijs van stelling 10.

$P_n^m$  is het gelijkvormigheidspunt van  $O_n$  en  $O_n^m$ , want de ingeschreven veelhoeken  $V_n$  en  $V_n^m$  hebben hetzelfde inwendig gelijkvormigheidspunt als hunne omgeschreven cirkels  $O_n$  en  $O_n^m$ .

Verder heeft men:

$$O P_n^{m+2} : O P_n^{m+1} = (n-m) : (n-m-1) \text{ en dus}$$

$$O P_n^{m+2} : P_n^{m+1} P_n^{m+2} = (n-m) : 1.$$

En aangezien de straal van  $O_n$  staat tot den straal van  $O_n^m$  als  $(n-m) : 1$  is  $P_n^{m+2}$  het uitwendig gelijkvormigheidspunt van  $O_n$  en  $O_n^m$ .

11. Uit deze stelling blijkt tevens dat  $O$ ,  $P_n^{m+1}$  en  $P_n^m$ ,  $P_n^{m+2}$  harmonische puntenparen zijn.

12. Blijkens § 1, bep. heeft men:

$$O P_n^1 = \frac{1}{n} O P_n^n \quad (1)$$



Past men de stelling in § III, 1,  $f$  toe op het punt  $O$ , dan heeft men:

$$\Sigma (O A_p)^2 = \Sigma (P_n^1 A_p)^2 + n (O P_n^1)^2$$

Omdat  $O$  het middelpunt is van  $V_n$  is  $\Sigma (O A_p)^2 = n \cdot R^2$ .

Verder is  $\Sigma (P_n^1 A_p)^2 = \frac{1}{n} S^2$ . (§ III, 1,  $d$ )

en blijkens (1),  $(O P_n^1)^2 = \frac{1}{n^2} (O P_n^n)^2$  en dus

$$n R^2 = \frac{1}{n} S^2 + (O P_n^n)^2.$$

Duidt men nu de lengte van  $O P_n^n$  aan door  $L$ , dan heeft men

$$S^2 + L^2 = n^2 R^2.$$

### 13. (Zie fig. 7)

$A_p$  is een hoekpunt eens ingeschreven  $n$ -hoeks,  $O P_n^n$  de rechte van Euler die wij weer aanduiden door  $L$ .

Dan is:  $O P_n^1 = \frac{L}{n}$ ,  $O P_n^m = \frac{L}{n-m+1}$  en dus  $P_n^1 P_n^m = \frac{(m-1)L}{n(n-m+1)}$ .

Past men het theorema van Stewart toe op  $\triangle A_p O P_n^n$  dan verkrijgt men:

$$\begin{aligned} A_p O^2 \times P_n^1 P_n^m + (A_p P_n^m)^2 \times O P_n^1 &= (A_p P_n^1)^2 \times O P_n^m + O P_n^1 \times O P_n^m \times \\ &\quad \times P_n^1 P_n^m \\ R^2 \frac{(m-1)L}{n(n-m+1)} + (A_p P_n^m)^2 \times \frac{L}{n} &= (A_p P_n^1)^2 \times \frac{L}{n-m+1} + \frac{(m-1)L^3}{n^2(n-m+1)^2} \\ (m-1) \times n(n-m+1) R^2 + n(n-m+1)^2 (A_p P_n^m)^2 &= \\ n^2(n-m+1) (A_p P_n^1)^2 + (m-1) L^2. \end{aligned}$$

Vormt men deze betrekking voor elk hoekpunt, dan verkrijgt men door optelling:

$$(m-1) \times n^2(n-m+1) R^2 + n(n-m+1)^2 \Sigma (A_p P_n^m)^2 = n^2(n-m+1) \Sigma (A_p P_n^1)^2 + n(m-1) L^2.$$

Nu is  $\Sigma (A_p P_n^1)^2 = \frac{1}{n} S^2$  en  $L^2 = n^2 R^2 - S^2$  en dus: (tevens door

$$\begin{aligned} n \text{ deelende}) \quad n(n-m+1)(m-1) R^2 + (n-m+1)^2 \Sigma (A_p P_n^m)^2 \\ = (n-m+1) S^2 + (m-1)(n^2 R^2 - S^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n-m+1)^2 \Sigma (A_p P_n^m)^2 &= (n-m+1-m+1) S^2 + n(m-1) \\ (n-n+m+1) R^2 &= (n-2m+2) S^2 + n(m-1)^2 R^2 \end{aligned}$$

$$\Sigma (A_p P_n^m)^2 = \frac{(n-2m+2) S^2 + n(m-1)^2 R^2}{(n-m+1)^2}$$

In den veelhoek met een even aantal zijden vindt men voor het punt  $P_{\frac{n}{2}+1}$

$$\Sigma (A_p P_{\frac{n}{2}+1})^2 = n R^2.$$

**14. a.**  $A_1, A_2, A_3$  (fig. 8) zijn drie hoekpunten van een ingeschreven  $n$ -hoek. De  $m^e$  merkwaardige punten van de restfiguren van  $A_1 A_2$  en  $A_2 A_3$  duiden we aan door  $(P_{n-2}^m)_{1,2}$  en  $(P_{n-1}^m)_{2,3}$ . De restfiguren van  $A_1 A_2$  en  $A_2 A_3$  zijn primaire  $(n-2)$ -hoeken van de restfiguur,  $\{(n-1)$ -hoek $\}$ , van  $A_2$ . Derhalve: (St. III en IV)

$$(P_{n-2}^m)_{1,2} (P_{n-2}^m)_{2,3} // A_1 A_3 \text{ en } (P_{n-2}^m)_{1,2} (P_{n-2}^m)_{2,3} = \frac{A_1 A_3}{n-m+1}.$$

*b.*  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  (fig.) 6) zijn 6 hoekpunten van een ingeschreven  $n$ -hoek  $(P_{n-2}^m)_{1,3}, (P_{n-2}^m)_{2,4}, (P_{n-2}^m)_{3,5}, (P_{n-2}^m)_{4,6}$  de  $m^e$  merkwaardige punten van de restfiguren van  $A_1 A_3, A_2 A_4, A_3 A_5, A_4 A_6$ . Uit stelling III en IV volgt nu op overeenkomstige wijze als hier boven van XVII, *a.*

$$(P_{n-2}^m)_{1,3} (P_{n-2}^m)_{3,5} // A_1 A_5 \text{ en } (P_{n-2}^m)_{1,3} (P_{n-2}^m)_{3,5} = \frac{A_1 A_5}{n-m+1}, \text{ enz.}$$

Evenzoo bewijst men de stelling voor de tertiaire figuren.

**15.**  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$  (fig. 10) is een gedeelte van  $V_n$ , de punten  $(P_{n-2}^m)_{1,2}, (P_{n-2}^m)_{2,3}$  enz. hebben de door de notatie aangeduide betekenis. Dan is: (XVII)

$$(P_{n-2}^m)_{1,2} (P_{n-2}^m)_{2,3} // A_1 A_3, (P_{n-2}^m)_{2,3} (P_{n-2}^m)_{3,4} // A_2 A_4, (P_{n-2}^m)_{3,4} (P_{n-2}^m)_{4,5} // A_3 A_5, \text{ en de verhouding tot } A_1 A_3, A_2 A_4, A_3 A_5, \text{ is als } 1 : (n-m+1).$$

Trek door  $(P_{n-2}^m)_{2,3}, (P_{n-2}^m)_{3,4}, (P_{n-2}^m)_{4,5}$  de rechten  $Q_2 Q_3 // A_2 A_3, Q_3 Q_4 // A_3 A_4$  en  $Q_4 Q_5 // A_4 A_5$  dan is  $\Delta Q_3 (P_{n-2}^m)_{2,3} (P_{n-2}^m)_{3,4} \sim A_3 A_2 A_4$  dus  $(P_{n-2}^m)_{3,4} Q_3 = \frac{A_3 A_4}{n-m+1}.$

Evenzoo is  $(P_{n-2}^m)_{3,2} Q_4 = \frac{A_3 A_4}{n-m+1}$  en dus  $(P_{n-2}^m)_{3,4}$  het midden van  $Q_3 Q_4$  terwijl  $Q_3 Q_4 = \frac{2 A_3 A_4}{n-m+1}.$  De veelhoek, gevormd door

de rechten  $Q_1 Q_2, Q_2 Q_3$  enz. is dus homothetisch met  $V_n$  naar de

$$\text{verhouding} = \frac{2}{n-m+1}.$$

Hieruit blijkt reeds, dat de punten  $P_{n-2}^m$  van de restfiguren der zijden de middens zijn der zijden van een veelhoek  $W_n^m$ , die homothetisch is met  $V_n$ . Wij zullen nu bewijzen dat het midden van de diagonaal  $Q_3 Q_5$  het punt  $(P_{n-2}^m)_{3,5}$  is.

Duiden nu het midden dier diagonaal reeds weer bij voorbaat

aan door  $(P_{n-2}^m)_{3,5}$  en trekken we  $A_4(P_{n-2}^m)_{3,5}$  en  $A_5(P_{n-2}^m)_{3,5}$ . Nu is

$$(P_{n-2}^m)_{3,4} (P_{n-2}^m)_{3,5} \parallel Q_4 Q_5 \parallel A_3 A_5 \text{ en } (P_{n-2}^m)_{3-4} (P_{n-2}^m)_{3,5} =$$

$$\frac{1}{2} Q_3 Q_5 = \frac{A_3 A_5}{n-m+1}.$$

Hieruit volgt dat  $A_5(P_{n-2}^m)_{3,5}$  de lijn  $A_4(P_{n-2}^m)_{3,4}$  verdeelt in reden als 1:  $(n-m+1)$  zoodat het snijpunt van  $A_5(P_{n-2}^m)_{3,5}$  en  $A_4(P_{n-2}^m)_{3,4}$  het punt  $(P_{n-1}^m)_3$  is (st. VI). (Want  $(P_{n-2}^m)_{3,4}$  is het  $m'$  merkwaardige punt in een veelhoek, die de restfiguur is van  $A_4$  in een anderen veelhoek, die zelf weer de restfiguur is van  $A_3$  in  $V_n$ ).

Omdat nu ook  $A_5(P_{n-2}^m)_3 : (P_{n-2}^m)_3 (P_{n-2}^m)_{3,5} = (n-m+1) : 1$  moet  $(P_{n-2}^m)_{3,5}$  volgens stelling VI, het  $m'$  merkwaardige punt zijn van een veelhoek, die de restfiguur is van  $A_5$  in veelhoek  $A_1 A_2 A_4 A_5$  en dus de restfiguur van  $A_3 A_5$  in  $V_n$ . Hieruit blijkt, dat  $(P_{n-2}^m)_{3,5}$  werkelijk de door de notatie aangeduide beteekenis heeft.

Op dezelfde wijze blijkt de waarheid der stelling voor de punten  $P_{n-2}^m$  van de tertiaire  $(n-2)$ -hoeken  $V_n$ .

16. Uit het voorgaande volgt nu onmiddellijk, dat de loodlijnen uit de punten  $P_{n-2}^m$  op de restzijden en restdiagonalen neergelaten, de middelloodlijnen zijn van de zijden en diagonalen van  $W_n^m$ . En aangezien deze loodlijnen elkander blijkens stelling 5 in het punt  $P_{n+2}^m$  snijden, is  $P_{n+2}^m$  het middelpunt van den omgeschreven cirkel van  $W_n^m$ .

## § V.

### TOEPASSINGEN.

In deze paragraaf zullen wij de voorgaande stellingen toepassen op bepaalde gevallen. Vooraf herinneren wij er aan dat wij door  $P_n^1$  verstaan het zwaartepunt van de figuur waartoe het punt behoort. Hieruit volgt:

De punten  $P_1^1$  zijn niet anders als de hoekpunten des veelhoeks.

De punten  $P_2^1$  zijn de middens der zijden en diagonalen.

De punten  $P_2^2$  zijn de punten, die symmetrisch liggen met  $O$ , ten opzichte van de zijde of diagonaal, waartoe zij behooren.

Aan deze punten zullen we in het vervolg den naam geven van *tegenpunten* der zijden en diagonalen.

Den veelhoek  $V_n^1$  zullen we voor alle veelhoeken *zwaarteveelhoek* noemen. De cirkel van Euler in een driehoek is de omgeschreven

cirkel van zijn zwaartedriehoek. In overeenstemming hiermede zullen we in het vervolg den omgeschreven cirkel van den zwaarteveelhoek eens ingeschreven veelhoeks *den cirkel van Euler* in dien veelhoek noemen en zijn middelpunt  $P_n^2$  *het punt van Euler*.

Zooals we reeds vroeger zeiden, noemen we de rechte  $OP_n^n$  waarop de  $n$  merkwaardige punten eens ingeschreven veelhoeks liggen *de rechte van Euler* in den veelhoek.

In een driehoek is het hoogtepunt het snijpunt van de loodlijnen uit de zwaartepunten van de restfiguren der zijden op die zijden neergelaten. Volkomen hetzelfde geldt volgens stelling 5, § II voor het punt  $P_n^3$  van een willekeurigen ingeschreven veelhoek. Daarom komt  $P_n^3$  overeen met het hoogtepunt eens driehoeks en zullen wij het den naam geven van 1° *hoogtepunt des ingeschreven veelhoeks*. De punten  $P_n^4$ ,  $P_n^5$ , ..... enz. heeten het 2°, 3°, ..... hoogtepunt des veelhoeks.

De veelhoek  $V_n^2$ , die de Eulersche punten der primaire  $(n-1)$ -hoeken van  $V_n$  tot hoekpunten heeft, zal *de veelhoek van Euler* heeten. De veelhoeken  $V_n^3$ ,  $V_n^4$ , ..... enz. die de hoogtepunten der primaire  $(n-1)$ hoeken van  $V_n$  tot hoekpunten hebben, zullen de *hoogteveelhoeken* van  $V_n$  genoemd worden.

Wij gaan thans over tot het verifieeren van de stellingen in § II voor den ingeschreven drie-, vier- vijf- en zeshoek.

#### a. Driehoek.

In een driehoek heeft men: het zwaartepunt  $P_3^1$ , het punt van Euler  $P_3^2$  en het hoogtepunt  $P_3^3$ , die zoo gelegen zijn dat:

$$OP_3^1 : OP_3^2 : OP_3^3 = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : 1 \quad (\text{Bep. § I, h}).$$

1. De zwaartedriehoek is tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken driehoek. Evenzoo de driehoek, die de tegenpunten der zijden tot hoekpunten heeft.

2. De verhouding bedraagt achtereenvolgens voor de bovengenoemde driehoeken —  $\frac{1}{2}$  en — 1.

3a. Het zwaartepunt is het gelijkvormigheidspunt van den driehoek en zijn zwaartedriehoek.

b. Het punt van Euler is het gelijkvormigheidspunt van den oorspronkelijken driehoek en den driehoek, die de tegenpunten der zijden tot hoekpunten heeft.



4a. De zwaartelijnen eens driehoeks deelen elkander in het zwaartepunt in reden als 1 : 2.

b. De lijnen, die de hoekpunten verbinden met de tegenpunten der overstaande zijden, deelen elkaar in het punt van Euler middendoor.

5. Het hoogtepunt eens driehoeks is het gemeenschappelijk snijpunt van de loodlijnen uit de hoekpunten op de overstaande zijden neergelaten.

6. De bovenste stukken dezer loodlijnen zijn gelijk aan tweemaal de middelloodlijnen der overeenkomstige zijden.

7a. Het punt van Euler is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van den zwaartedriehoek. (cirkel van Euler)

b. Het hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel des driehoeks, die de tegenpunten der zijden tot hoekpunten heeft.

8. De cirkel van Euler eens driehoeks deelt de afstanden van het hoogtepunt tot de hoekpunten middendoor.

9. Stelling 9, § II verliest haar beteekenis voor den driehoek.

10. Het zwaartepunt is het inwendig en het hoogtepunt het uitwendig gelijkvormigheidspunt van den omgeschreven cirkel en den cirkel van Euler.

11. Het middelpunt van den omgeschreven cirkel, het zwaartepunt, het punt van Euler en het hoogtepunt zijn 4 harmonisc gelegen punten.

12. De som van de vierkanten der zijden eens driehoeks is gelijk aan 9-maal het vierkant van den straal des omgeschreven cirkels verminderd met het vierkant van de lijn van Euler.

13a. De som van de vierkanten der afstanden van de hoekpunten eens driehoeks tot het zwaartepunt is  $\frac{1}{3}$  van de som van de vierkanten der zijden.

b. De som van de vierkanten der afstanden van de hoekpunten tot het middelpunt van den cirkel van Euler is  $\frac{1}{4} (S^2 + 3 R^2)$ .

c. De som van de vierkanten der afstanden van de hoekpunten tot het hoogtepunt is  $12 R^2 - S^2$ .

14. Stelling 14, § II is voor den driehoek van geen belang, maar gaat desniettemin door. De 2 driehoeken vallen samen, omdat de punten  $P_1^1$  de hoekpunten zelf zijn.

16. De hoekpunten eens driehoeks zijn de middens der zijden van een tweeden driehoek, tegengesteld homothetisch met de oorspronkelijken. Verhouding — 2.



17. Het middelpunt des omschreven cirkels van dezen nieuwen driehoek is het hoogtepunt des oorspronkelijken.

*b. Ingeschreven vierhoek.*

In een ingeschreven vierhoek heeft men:

Het zwaartepunt  $P_4^1$ , het punt van Euler  $P_4^2$ , het 1° en 2° hoogtepunt  $P_4^3$  en  $P_4^4$ , welke vier punten op één rechte zóó gelegen zijn, dat:

$$O P_4^1 : O P_4^2 : O P_4^3 : O P_4^4 = \frac{1}{4} : \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : 1. \quad (\text{Bep. § I, } h).$$

1. De zwaartevierhoek, de vierhoek van Euler en de hoogtevierhoek eens ingeschreven vierhoeks zijn tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken.

2. De verhouding bedraagt achtereenvolgens  $-\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{1}{2}$  en  $-1$ .

3a. Het zwaartepunt is het gelijkvormigheidspunt van den vierhoek en zijn zwaartevierhoek.

b. Het gelijkvormigheidspunt van een ingeschreven vierhoek en zijn vierhoek van Euler is het punt van Euler.

c. Het gelijkvormigheidspunt van een ingeschreven vierhoek en zijn hoogtevierhoek is zijn 1° hoogtepunt.

4a. Het zwaartepunt eens vierhoeks is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 7 rechten.

1°. Die, welke de hoekpunten verbinden met de zwaartepunten hunner restfiguren. Verhouding der deelen 3 : 1.

2°. Die, welke de middens van twee overstaande zijden en van de diagonalen vereenigen. Verhouding der deelen 1 : 1.

b. Het punt van Euler eens ingeschreven vierhoeks is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 10 rechten. (De verhouding der deelen wordt telkens aangewezen achter de stelling).

1°. Die welke de hoekpunten verbinden met de Eulersche punten der primaire restdriehoeken (2 : 1).

2°. Die, welke de tegenpunten der zijden en diagonalen verbinden met de middens hunner restfiguren (2 : 1).

c. Het 1° hoogtepunt is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 7 rechten.

1° Die, welke de hoekpunten verbinden met de hoogtepunten hunner restdriehoeken (1 : 1).

2°. Die, welke de tegenpunten der overstaande zijden en der diagonalen vereenigen. (1 : 1).

5. *a.* De 6 loodlijnen, uit de middens der zijden en diagonalen eens ingeschreven vierhoeks neergelaten op hunne restfiguren, snijden elkander in het 1° hoogtepunt.

*b.* De 6 loodlijnen, uit de tegenpunten der zijden en diagonalen neergelaten op hunne restfiguren, snijden elkander in het 2° hoogtepunt.

6. *a.* De bovenste stukken van de loodlijnen, in 5*a* genoemd, zijn gelijk aan de middelloodlijnen der overeenkomstige zijden en diagonalen.

*b.* De bovenste stukken van de loodlijnen in 5*b* genoemd zijn gelijk aan tweemaal de middelloodlijnen der overeenkomstige zijden en diagonalen.

7. *a.* Het punt van Euler is het middelpunt van den omgeschreven cirkel des zwaartevierhoeks d. i. van den cirkel van Euler.

*b.* Het 1° hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van den vierhoek van Euler.

*c.* Het 2° hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van den hoogtevierhoek.

8. *a.* De cirkel van Euler eens ingeschreven vierhoeks deelt de afstanden van het 1° hoogtepunt tot de hoekpunten in reden als 1 : 2. Zijn straal is  $\frac{1}{3}$  R.

*b.* De omgeschreven cirkel van den vierhoek van Euler deelt de afstanden van het 2° hoogtepunt tot de hoekpunten middendoor. Straal  $\frac{1}{2}$  R.

9. *a.* De cirkels van Euler van de primaire driehoeken eens ingeschreven vierhoeks snijden elkander in zijn 1° hoogtepunt.

*b.* De cirkels die gaan door de tegenpunten van de primaire driehoeken snijden elkander in het 2° hoogtepunt des vierhoeks.

10. *a.* Het zwaartepunt is het inwendig, het 1° hoogtepunt het uitwendig gelijkvormigheidspunt van den omgeschreven cirkel en den cirkel van Euler.

*b.* Het punt van Euler is het inwendig en het 2° hoogtepunt het uitwendig gelijkvormigheidspunt van den omgeschreven cirkel des oorspronkelijken vierhoeks en van dien van zijn vierhoek van Euler.

11. *a.*  $O$ ,  $P_4^1$ ,  $P_4^2$ ,  $P_4^3$  zijn 4 harmonisch gelegen punten.

*b.* Evenzoo  $O$ ,  $P_4^2$ ,  $P_4^3$ ,  $P_4^4$ .

12. De som van de vierkanten der zijden en diagonalen eens ingeschreven vierhoeks, vermeerderd met het vierkant van de lijn van Euler, is 16 maal het vierkant van den straal des omgeschreven cirkels.

13. Voor de som van de vierkanten der afstanden van de hoek-

punten tot het zwaartepunt, het punt van Euler, het  $1^\circ$  en  $2^\circ$  hoogtepunt vindt men achtereenvolgens.

$$\frac{1}{4} S^2, \frac{2}{9} (S^2 + 2 R^2), 4 R^2, 36 R^2 - 2 S^2.$$

14. *a.* De middens der zijden en diagonalen eens vierhoeks zijn de hoekpunten van een vierhoek, waarvan de zijden evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan de helft van de diagonalen des vierhoeks.

*b.* De tegenpunten der zijden vormen eveneens een vierhoek, waarvan de zijden evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan de diagonalen des vierhoeks.

15. *a.* De middens der zijden en diagonalen eens vierhoeks zijn tevens de middens der zijden en diagonalen van een anderen vierhoek, tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken. Verhouding —1.

*b.* De tegenpunten der zijden en diagonalen eens ingeschreven vierhoeks zijn de middens der zijden en diagonalen van een nieuwen vierhoek, tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken. Verhouding —2.

16. *a.* Het  $1^\circ$  hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel des nieuwen vierhoeks, vermeld in 15 *a.*

*b.* Het  $2^\circ$  hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel des nieuwen vierhoeks vermeld in 15 *b.*

### *c. De ingeschreven vijfhoek.*

In een ingeschreven vijfhoek heeft men:

Het zwaartepunt  $P_5^1$ , het punt van Euler  $P_5^2$ , het  $1^\circ$ ,  $2^\circ$  en  $3^\circ$  hoogtepunt  $P_5^3$ ,  $P_5^4$  en  $P_5^5$ , welke 5 punten op één rechte zóó liggen, dat:

$$O P_5^1 : O P_5^2 : O P_5^3 : O P_5^4 : O P_5^5 = \frac{1}{5} : \frac{1}{4} : \frac{1}{3} : \frac{1}{1} : 1.$$

1. De zwaartevijfhoek, de vijfhoek van Euler en de twee hoogtevijfhoeken eens ingeschreven vijfhoeks zijn tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken.

2. De verhouding bedraagt achtereenvolgens  $-\frac{1}{4}$ ,  $-\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{1}{2}$  en  $-1$ .

3*a.* Het zwaartepunt is het gelijkvormigheidspunt van den vijfhoek en zijn zwaartevijfhoek.

*b.* Het punt van Euler is het gelijkvormigheidspunt van den vijfhoek en zijn vijfhoek van Euler.

*c.* Het  $1^{\circ}$  hoogtepunt is het gelijkvormigheidspunt van den vijfhoek en zijn  $1^{\text{en}}$  hoogtevijfhoek.

*d.* Het  $2^{\circ}$  hoogtepunt is het gelijkvormigheidspunt van den vijfhoek en zijn tweeden hoogtevijfhoek.

*4a.* Het zwaartepunt eens vijfhoeks is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 15 rechten.

$1^{\circ}$ . Die, welke de hoekpunten verbinden met de zwaartepunten hunner restvierhoeken. Verhouding der deelen 4 : 1.

$2^{\circ}$ . Die welke de middens der zijden en diagonalen verbinden met de zwaartepunten hunner resthoeken (3 : 2)

*b.* Het punt van Euler eens ingeschreven vijfhoeks is het snijpunt van de volgende 25 rechten.

$1^{\circ}$ . Die, welke de hoekpunten verbinden met de punten van Euler hunner restvierhoeken (3 : 1).

$2^{\circ}$ . Die, welke de middens der zijden en diagonalen verbinden met de punten van Euler der restdriehoeken (1 : 1).

$3^{\circ}$ . Die, welke de tegenpunten der zijden en diagonalen verbinden met de zwaartepunten hunner restdriehoeken.

*c.* Het  $1^{\circ}$  hoogtepunt is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 25 rechten.

$1^{\circ}$ . Die, welke de hoekpunten verbinden met de  $1^{\circ}$  hoogtepunten hunner restvierhoeken. (2 : 1).

$2^{\circ}$ . Die, welke de middens der zijden en diagonalen verbinden met de hoogtepunten hunner restdriehoeken (1 : 2).

$3^{\circ}$ . Die, welke de tegenpunten der zijden en diagonalen verbinden met de middelpunten van de cirkels van Euler hunner restdriehoeken (2 : 1).

*d.* Het  $2^{\circ}$  hoogtepunt is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 15 rechten.

$1^{\circ}$ . Die, welke de hoekpunten verbinden met de  $2^{\circ}$  hoogtepunten hunner restvierhoeken (1 : 1).

$2^{\circ}$ . Die, welke de tegenpunten der zijden en diagonalen verbinden met de hoogtepunten hunner restdriehoeken (1 : 1).

*5a.* De loodlijnen, uit de zwaartepunten der primaire en secundaire driehoeken eens ingeschreven vijfhoeks neergelaten op de restzijden en restdiagonalen, snijden elkander in het  $1^{\circ}$  hoogtepunt.

*b.* De loodlijnen, uit de punten van Euler der primaire en secundaire driehoeken neergelaten op de restzijden en restdiagonalen, snijden elkander in het  $2^{\circ}$  hoogtepunt.

*c.* De loodlijnen, uit de hoogtepunten der primaire en secundaire driehoeken neergelaten op de restzijden en restdiagonalen, snijden elkander in het  $3^{\circ}$  hoogtepunt.



6a. De bovenste stukken der loodlijnen in 5a zijn  $\frac{2}{3}$  van de middelloodlijnen der zijden en diagonalen.

b. De bovenste stukken van de loodlijnen in 5b zijn gelijk aan de middelloodlijnen der zijden en diagonalen.

c. De bovenste stukken der loodlijnen in 5c zijn gelijk aan tweemaal de middelloodlijnen der zijden en diagonalen.

7a. Het punt van Euler eens ingeschreven vijfhoeks is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van zijn zwaartevijfhoek. (Cirkel van Euler).

b. Het  $1^\circ$  hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van zijn vijfhoek van Euler.

c. Het  $2^\circ$  hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van zijn  $1^{\text{en}}$  hoogtevijfhoek.

d. Het  $3^\circ$  hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van zijn  $2^{\text{en}}$  hoogtevijfhoek.

8a. De cirkel van Euler eens ingeschreven vijfhoeks deelt de afstanden van het  $1^\circ$  hoogtepunt tot de hoekpunten in reden als 1 : 3.

b. De omgeschreven cirkel van den vijfhoek van Euler deelt de afstanden van het  $2^\circ$  hoogtepunt tot de hoekpunten in reden als 1 : 2. enz.

9a. De cirkels van Euler van de primaire vierhoeken eens ingeschreven vijfhoeks snijden elkander in het  $1^\circ$  hoogtepunt. Enz.

10a. Het zwaartepunt is het inwendig en het  $1^\circ$  hoogtepunt het uitwendig gelijkvormigheidspunt van den omgeschreven cirkel des vijfhoeks en zijn cirkel van Euler. Enz.

11a. Het middelpunt van den omgeschreven cirkel, het zwaartepunt, het punt van Euler en het  $1^\circ$  hoogtepunt eens ingeschreven vijfhoeks liggen harmonisch. Enz.

12. De som van de vierkanten der zijden en diagonalen eens ingeschreven vijfhoeks, vermeerderd met het vierkant van de lijn van Euler, is gelijk aan 25 maal het vierkant van den straal des omgeschreven cirkels.

13. De som van de vierkanten der afstanden van de hoekpunten eens ingeschreven vijfhoeks tot het zwaartepunt, het punt van Euler en de 3 hoogtepunten bedraagt achtereenvolgens:

$$\frac{1}{5} S^2, \frac{1}{16} (3S^2 + 5R^2), \frac{1}{9} (S^2 + 20R^2), \frac{1}{4} (-S^2 + 45R^2), \\ -3S^2 + 80R^2.$$

14a. De hoogtepunten van de primaire driehoeken eens inge-



ingeschreven vijfhoeks zijn de hoekpunten van een nieuwen vijfhoek, wiens zijden evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan de diagonalen des vijfhoeks.

*b.* De hoogtepunten van de secundaire driehoeken eens ingeschreven vijfhoeks zijn de hoekpunten van een nieuwen vijfhoek, wiens diagonalen evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan de zijden des oorspronkelijken.

Overeenkomstige eigenschappen gelden voor de zwaartepunten en de punten van Euler der primaire en secundaire driehoeken.

15. De hoogtepunten van de primaire en secundaire driehoeken eens ingeschreven vijfhoeks zijn de middens der zijden en diagonalen van een nieuwen vijfhoek, tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken, volgens de verhouding  $-2$ .

(Zie verder de opmerking bij 14*b*).

16. Het  $3^\circ$  hoogtepunt is het middelpunt van den nieuwen vijfhoek genoemd in 15. Soortgelijke beteekenis hebben het  $1^\circ$  en  $2^\circ$  hoogtepunt.

#### d. *De ingeschreven zeshoek.*

In een ingeschreven zeshoek heeft men:

Het zwaartepunt  $P_6^1$ , het punt van Euler  $P_6^2$ , de 4 hoogtepunten  $P_6^3, P_6^4, P_6^5, P_6^6$ , welke 6 punten op één rechte zóó liggen, dat:

$$OP_6^1 : OP_6^2 : OP_6^3 : OP_6^4 : OP_6^5 : OP_6^6 = \frac{1}{6} : \frac{1}{5} : \frac{1}{4} : \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : 1.$$

1. De zwaartezeshoek, de zeshoek van Euler en de drie hoogtezeshoeken van een ingeschreven zeshoek zijn tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken.

2. De verhouding bedraagt achtereenvolgens  $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1$ .

3*a.* Het zwaartepunt is het gelijkvormigheidspunt van den zeshoek en zijn zwaartezeshoek.

*b.* Het punt van Euler is het gelijkvormigheidspunt van den zeshoek en zijn zeshoek van Euler.

*c. d. e.* Het  $1^\circ, 2^\circ$  en  $3^\circ$  hoogtepunt zijn achtereenvolgens de gelijkvormigheidspunten van den zeshoek en zijn  $1^\circ, 2^\circ$  en  $3^\circ$  hoogtezeshoek.

4a. Het zwaartepunt eens zeshoeks is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 31 rechten.

1° Die, welke de hoekpunten verbinden met de zwaartepunten hunner restvijfhoeken. (5 : 1).

2° Die, welke de middens der zijden en diagonalen verbinden met de zwaartepunten der restvierhoeken. (2 : 1).

3° Die, welke de zwaartepunten van twee restdriehoeken verbinden (1 : 1).

b. Het punt van Euler eens ingeschreven zeshoeks is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 56 rechten.

1° Die, welke de hoekpunten verbinden met de punten van Euler der restvijfhoeken. (4 : 1).

2° Die, welke de middens der zijden en diagonalen verbinden met de punten van Euler der restvierhoeken. (3 : 2).

3° Die, welke de tegenpunten der zijden en diagonalen verbinden met de zwaartepunten van de restvierhoeken. (4 : 1).

4° Die, welke de zwaartepunten der verschillende driehoeken verbinden met de punten van Euler der restdriehoeken.

c. Het 1° hoogtepunt is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 66 rechten.

1° Die, welke de hoekpunten verbinden met de 1° hoogtepunten hunner restvijfhoeken. (3 : 1).

2° Die welke de middens der zijden en diagonalen verbinden met de 1° hoogtepunten der restvierhoeken. (1 : 1).

3° Die, welke de tegenpunten der zijden en diagonalen verbinden met de punten van Euler der restvierhoeken. (3 : 1).

4° Die, welke de zwaartepunten der verschillende driehoeken verbinden met de hoogtepunten der restdriehoeken. (1 : 3).

5°. Die, welke de punten van Euler der verschillende driehoeken verbinden met de punten van Euler der restdriehoeken. (1 : 1).

d. Het 2° hoogtepunt is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 56 rechten.

1° Die, welke de hoekpunten verbinden met de 2° hoogtepunten hunner restvijfhoeken. (2 : 1).

2° Die, welke de middens der zijden en diagonalen verbinden met de 2° hoogtepunten der restvierhoeken. (1 : 2).

3° Die, welke de tegenpunten der zijden en diagonalen verbinden met de 1° hoogtepunten der restvierhoeken. (2 : 1).

4° Die, welke de punten van Euler der verschillende driehoeken verbinden met de punten van Euler der restfiguren. (1 : 1).

e. Het 3° hoogtepunt is het gemeenschappelijk snijpunt van de volgende 31 rechten.

1° Die, welke de hoekpunten verbinden met de 3° hoogtepunten hunner restvijfhoeken. (1 : 1).

2° Die, welke de tegenpunten der zijden en diagonalen verbinden met de 2° hoogtepunten der restvierhoeken. (1 : 1).

3° Die, welke de hoogtepunten der verschillende driehoeken verbinden met de hoogtepunten hunner restfiguren.

5*a*. De loodlijnen, uit de zwaartepunten der verschillende vierhoeken neergelaten op de restzijden en restdiagonalen, snijden elkander in het 1° hoogtepunt.

*b*. De loodlijnen, uit de punten van Euler der verschillende vierhoeken neergelaten op de restzijden en restdiagonalen, snijden elkander in het 2° hoogtepunt.

*c*. De loodlijnen, uit de 1° hoogtepunten der verschillende vierhoeken neergelaten op de restzijden en restdiagonalen, snijden elkander in het 3° hoogtepunt.

*d*. Het 1° hoogtepunt is het gemeenschappelijk snijpunt van de 15 loodlijnen uit de 2° hoogtepunten der verschillende vierhoeken, neergelaten op de restzijden en restdiagonalen.

6*a*. De bovenste stukken in 5*a* zijn de helften van de middelloodlijnen der zijden en diagonalen.

*b*. De bovenste stukken der loodlijnen in 5*b* zijn  $\frac{2}{3}$  van de middelloodlijnen der zijden en diagonalen.

*c*. De bovenste stukken der loodlijnen in 5*c* zijn gelijk aan de middelloodlijnen der zijden en diagonalen.

*d*. De bovenste stukken der loodlijnen in 5*d* zijn gelijk aan tweemaal de middelloodlijnen der zijden en diagonalen.

7*a*. Het punt van Euler eens ingeschreven zeshoeks is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van zijn zwaartezeshoek.

*b*. Het 1° hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van zijn zeshoek van Euler.

*c*. Het 2° hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van den 1° hoogtezeshoek. Enz.

8*a*. De cirkel van Euler eens ingeschreven zeshoeks deelt de afstanden van het 1° hoogtepunt tot de hoekpunten in reden als 1 : 4. Enz.

9*a*. De cirkels van Euler van de primaire vijfhoeken eens ingeschreven zeshoeks snijden elkander in zijn 1° hoogtepunt. Enz.

10*a*. Het zwaartepunt is het inwendig en het 1° hoogtepunt het uitwendig gelijkvormigheidspunt van den omgeschreven cirkel des zeshoeks en zijn cirkel van Euler. Enz.

11*a*. Het middelpunt van den omgeschreven cirkel, het zwaartepunt van Euler en het 1° hoogtepunt liggen harmonisch.

12. De som van de vierkanten der zijden en diagonalen van een ingeschreven zeshoek, vermeerderd met het vierkant van de lijn van Euler, is gelijk aan 36 maal het vierkant van den straal des ingeschreven cirkels.

13. De sommen van de vierkanten der afstanden van de hoekpunten tot het zwaartepunt, het punt van Euler en het  $1^\circ$ ,  $2^\circ$ ,  $3^\circ$  en  $4^\circ$  hoogtepunt bedragen achtereenvolgens:

$$\frac{1}{6} S^2, \frac{2}{25} (2 S^2 + 3 R^2), \frac{1}{8} (S^2 + 12 R^2), 6 R^2, \frac{1}{2} (48 R^2 - S^2), \\ 150 R^2 - 4 S^2.$$

14a. De  $2^\circ$  hoogtepunten der primaire vierhoeken eens ingeschreven zeshoeks zijn de hoekpunten van een nieuwen zeshoek, waarvan de zijden evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan de diagonalen der  $1^\circ$  orde van den oorspronkelijken.

b. De  $2^\circ$  hoogtepunten der secundaire vierhoeken eens ingeschreven zeshoeks zijn de hoekpunten van een nieuwen zeshoek, waarvan de diagonalen der  $1^\circ$  orde evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan de diagonalen der  $1^\circ$  orde van den oorspronkelijken.

Overeenkomstige eigenschappen gelden voor de zwaartepunten, de punten van Euler en de  $1^\circ$  hoogtepunten der primaire en secundaire vierhoeken.

15a. De  $2^\circ$  hoogtepunten van de primaire, secundaire en tertiaire vierhoeken eens ingeschreven zeshoeks zijn de middens der zijden, der diagonalen van de  $1^\circ$  orde en der hoofddiagonalen van een nieuwen zeshoek, tegengesteld homothetisch met den oorspronkelijken, volgens de verhouding  $-2$ ,

b. c. d. Zie de opmerking bij 14.

16a. Het  $4^\circ$  hoogtepunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel van den nieuwen zeshoek bedoeld in 15a.

Met behulp van de voorgaande eigenschappen kan men nog gemakkelijk de volgende stellingen bewijzen, die evenwel niet in de stellingen 1—16 van § II vervat zijn.

1. De hoogtepunten van de zes driehoeken, die 3 opeenvolgende hoekpunten eens ingeschreven zeshoeks tot hoekpunten hebben, zijn de hoekpunten van een zeshoek, waarvan de overstaande zijden twee aan twee evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan de hoofddiagonalen des zeshoeks. (Zeshoekig parallelogram).









2. De hoogtepunten van de zes driehoeken, die men verkrijgt door drie niet opeenvolgende zijden des zeshoeks tot bases en de uiteinden der overstaande zijden tot toppen te nemen, zijn de hoekpunten van een zeshoekig parallelogram, waarvan de overstaande zijden twee aan twee evenwijdig loopen met en gelijk zijn aan de drie andere niet opeenvolgende zijden des zeshoeks.

N.B. Men kan 2 zulke zesh. parall. verkrijgen.

3. De drie zeshoekige parallelogrammen hierboven genoemd, hebben het 2° hoogtepunt des zeshoeks tot gemeenschappelijk middelpunt.

---









# Over een peroxy-salpeterzuur zilver

(*Eerste Verhandeling*),

DOOR

**E. MULDER en J. HERINGA.**

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

**(EERSTE SECTIE).**

Deel III. N<sup>o</sup>. 8.



AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
1896.



# Over een peroxy-salpeterzuur zilver.

DOOR

E. MULDER en J. HERINGA.

(*Eerste Verhandeling*).

In den zilver-voltameter ontstaat aan de anode een betrekkelijk kleine hoeveelheid eener zwarte en meer of min zwarte zelfstandigheid, die (werkende met den zilver-voltameter) aanleiding gaf, om nader kennis te maken met de zwarte kristallijne verbinding, onder sommige omstandigheden, ontstaande bij electrolyse eener waterige oplossing van zilvernitraat, en door RITTER werd ontdekt in 1804. Dit lichaam <sup>1)</sup> werd bij herhaling onderzocht, maar toch is de studie dezer belangrijke verbinding nog verre verwijderd van te zijn afgesloten; en ook na de onderzoekingen, die hier volgen, blijft nog veel over voor lateren arbeid.

Gemeld lichaam werd door RITTER gehouden voor een peroxyde van zilver, en zoo ook door WALLQUIST; maar FISCHER, GMELIN en MAHLA toonden aan, dat deze verbinding *stikstof* bevat, nader bevestigd door BERTHELOT, die met dit lichaam het laatst arbeidde, en volgens welken scheikundige dit zou te beschouwen zijn als het zilverzout van een argento-salpeterzuur, op de wijze als er bestaat phosphormolybdeenzuur, enz. (zie beneden).

MAHLA geeft aan dit lichaam de formule:

---

<sup>1)</sup> De uitvoerige litteratuur hierover wordt aangetroffen in:

GMELIN-KRAUT. Bd. III (Metalle) S. 914 (1875);

GRAHAM-OTTO. (4e Aufl.) Bd. II (Abth. 3) S. 825;

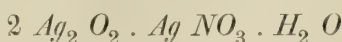
Dict. de Chim. de WURTZ, art. argent, p. 366; l. c. Supplém. I, art. argent p. 198;

l. c. Supplém. II, art. argent, p. 362 (1892). Zie daarenboven:

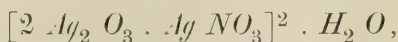
Ann. Ch. et de Phys. Sér. 5. T. XXI. p. 174 (1880); Compt. rend. T. 94. p. 653, 573 (1880); (BULL. Soc. Chim. (2) 34, 138).



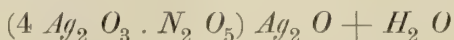
FISCHER de volgende:



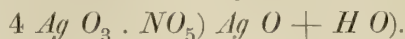
en BERTHELOT:



of het beschouwende als een zilverzout van een zuur, namelijk argento-salpeterzuur:



(of volgens vroegere waarden der symbolen:



De verschillen zijn betrekkelijk zeer groot (hierover later). BERTHELOT vermoedt, dat de vroegere onderzoekers het lichaam te lang in aanraking lieten met water, en mede de methoden ter quantitative bepaling wel eens te wenschen overlieten (zie over een en ander later).

Bij vergelijking dezer formules blijkt, dat in die van FISCHER en BERTHELOT de verhouding tusschen zilver en stikstof dezelfde is, maar naar FISCHER bevat het lichaam  $\text{Ag}_2 \text{ O}_2$ , en zoo ook volgens MAHLA, terwijl BERTHELOT daarin de aanwezigheid aanneemt van  $\text{Ag}_2 \text{ O}_3$  (de andere hoeveelheid zilver zich gedacht voorhanden te zijn als  $\text{Ag NO}_3$ ). Het verschil komt dus met betrekking tot de formules van FISCHER en BERTHELOT vooral neêr op de hoeveelheid gemakkelijk vrijkomende zuurstof, bij het ontstaan van  $\text{Ag}_2 \text{ O}$  (uit het superoxyde, verondersteld aanwezig te zijn).

Als bron van fouten, zich voordoende bij de bereiding, zou ook kunnen optreden (behalve die door BERTHELOT verondersteld aanwezig te zijn), dat het lichaam eenvoudig *niet scheikundig zuiver is* (zelfs zich nog bevindende in de oplossing van zilvernitraat), dat vrij noodlottig zou zijn, daar alle zorg besteed aan de analyse dan bijkans te vergeefs zou kunnen wezen.

Daarvan uitgaande, dat het lichaam onder den invloed van water wordt ontleed, zou het kunnen zijn, dat de *concentratie* der oplossing van zilvernitraat invloed heeft op de samenstelling van het product; reden waarom in deze richting een bijzondere studie werd gemaakt, en het lichaam van RITTER gemaakt is uitgaande van oplossingen met verschillende concentratie van zilvernitraat. Behalve de analyse van het lichaam, heeft men ook gemeend het lichaam van RITTER in hoeveelheid te moeten bepalen, en wel in verhouding tot het *zilver* afgezet aan de andere electrode. Aangezien er *salpeterzuur* vrijkomt bij de reactie, zou ook dit in hooge mate van invloed kunnen zijn op de *qualiteit* en quantiteit van het pro-

duct; en daarom werd ook een reeks van proeven gedaan met het doel, om de oplossing gedurende de bereiding meer of min, of genoegzaam volkomen, neutraal te houden.

Achtereenvolgens zullen de uitkomsten van het onderzoek worden medegedeeld, ook die betreffende de analytische methoden, welke gevolgd zijn.

*Gevolgde wijze van bereiding.* In een platinaschaal (met een inhoud van ongeveer 1 liter, grootendeels gevuld met de oplossing van zilvernitraat), als *kathode*, is geplaatst een *glazen schaal* (om het zwarte lichaam op te nemen), geplaatst onder de *anode*, zijnde een platinadraad (zich bevindende nabij den bodem met het eene uiteinde). Zie hieronder over nadere bijzonderheden. Als bron van electriciteit diende een Thermo-electrische batterij van GÜLCHER, van 50 elementen.

In het volgende zijn twee categoriën van proeven te onderscheiden, te weten die *met neutralisatie* en *zonder neutralisatie*.

---

### Proeven zonder neutralisatie der oplossing.

De platinaschaal, die dienst doet als *kathode* is geplaatst op een reep platinablik, in gemeenschap staande met de negatieve electrode van de batterij. De platinadraad, die dient als *anode*, is betrekkelijk dun. Gedurende de electrolyse vallen bijkans voortdurend kristallen van de anode in de kleine glazen schaal (in de oplossing geplaatst op den bodem der platinaschaal). De kristallen vormen schoone naalden, evenwel samengesteld uit samengegroeide octaëders, die grooter worden, zelfs na te zijn losgemaakt (maar in aanraking blijvende met de overige massa), daar het zwarte lichaam een vrij goede geleider is der electriciteit, dat trouwens volgt uit de boomvorming (opeenhooping van vertakte naalden), die zich voordoet. De octaëders kunnen soms tamelijk groot worden, maar zijn veelal alleen te onderscheiden door loupe of microscoop. De kristallen bezitten een sterken glans, en een kleur, die men gewoon is zwart te noemen, maar veeleer *donkerbruin* is (zie later).

Is de proef afgelopen, dan worden de kristallen gedaan op een bevochtigd filtrum (van filtreerpapier, dat een snel filtereen toelaat), en snel gewasschen (in weinige minuten), doch met nauwgezetheid. De massa wordt namelijk gewasschen, tot dat het filtraat geen reactie meer vertoont met verdund zoutzuur, en daarna nog 2 of 3 maal water op het filtrum gedaan. Het vochtige filtrum wordt dan



geplaatst op filtreerpapier, dit bij herhaling ververscht, daarna de massa op filtreerpapier gedaan en een weinig geschud, en dit ververscht, totdat de massa ontdaan is zooveel mogelijk van aanhangig water. Dit alles zoo snel mogelijk (maar zonder de massa te drukken, naar den raad van BERTHELOT), dat gemakkelijk is uit te voeren, aangezien de kristallen de aanhangende waterlaag gemakkelijk afstaan. Dit laatste volgt ook uit de snelheid, waarmede een genoegzaam constant gewicht wordt erlangd, bij het geplaatst zijn der massa onder een exsiccator met zwavelzuur en natrium. Overigens zijn ook proeven gedaan met een lang contact van het lichaam met water, om daarvan den invloed te leeren kennen.

---

### Proeven met neutralisatie der oplossing.

Men heeft twee wijzen van neutraliseeren, die zijn aangewend, te onderscheiden, namelijk (A) een neutraliseeren der oplossing buiten de platinaschaal, of (B) in de platinaschaal, en wel in de glazen schaal daarin geplaatst; in beide gevallen door middel van *zilvercarbonaat*, zooals dit trouwens te wachten was.

A. De oplossing werd zoo neutraal mogelijk gehouden, door nu en dan met een pipet van de oplossing nabij de anode weg te nemen gedurende de proef, en deze hoeveelheid te filtreren over *koolzuur zilver*, geplaatst op een filtrum, terwijl het filtraat direct terugvloeide in de platinaschaal (nabij den rand, en nabij de kathode). Het lichaam van RITTER liet zich niet in de war brengen door de beweging hierdoor in de vloeistof teweeg gebracht, en werd even goed gevormd. Toch blijft de oplossing meer of min zuur, al is het filtraat neutraal.

B. Het overige is genoegzaam juist zoo, als bij de proeven zonder neutralisatie, ook in geval het koolzuur zilver is gedaan in de kleine glazen schaal, zoodat de kristallen van het zwarte lichaam als omgeven zijn door koolzuur zilver, en dientengevolge de neutralisatie een maximum kan bereiken. Na de proef is het koolzuur zilver gemakkelijk te verwijderen door wasschen met water, daar de kristallen een groot soort-gew. bezitten.

*Herstelling der oplossing van zilvernitraat na de proef.* De groote hoeveelheid zout, waarvan men zich bedient, maakt het noodig, om de door de bewerking zuur geworden oplossing op doelmatige wijze weder geschikt te maken voor een volgende bereiding. Dit geschiedt

met koolzuur zilver, gedaan op een filtrum, en daarop de vloeistof te doen. Is dit verricht, dan wordt een bepaald volumen van het filtraat ingedampt, en het terugblijvende zilvernitraat gewogen. De oplossing wordt daarna op het vereischte titre gebracht door toevoeging eener bekende hoeveelheid zilvernitraat, en toevoegen vervolgens van water tot een bekend volumen, b.v. van 1 liter; of door toevoegen van water tot een vereischt volumen bij een gedeelte der oplossing; (al naar dat men een oplossing verlangt die geconcentreerder is of meer verdund).

In den aanvang werd gebruik gemaakt van een normaal-oplossing, inhoudende 169,55 gr. zilvernitraat (en minder) in 1 liter der oplossing; maar vervolgens werden bereidingen gedaan met oplossingen, die tot 1000 gr. (1 kilogr.) zilvernitraat bevatten in 1 liter. Later zal blijken, dat er geen aanleiding bestond, om nog verder te gaan. Het voornemen bestaat, om de grens van ontstaan te bepalen (in geval deze mocht bestaan), door te werken met oplossingen, die meer en meer zullen verdund worden.

*Methoden ter quantitatieve bepaling gevolgd.* Er moeten bepaald worden: *zilver*, *stikstof*, *zuurstof*, en volgens de vorige onderzoekers tevens *waterstof*. Voor zooverre de *zuurstof* betreft, valt er te onderscheiden dat gedeelte van de zuurstof, hetwelk betrekkelijk gemakkelijk vrijkomt, de zoogenaamde „*vrijkomende*” zuurstof (l’oxygène excédant), en het andere deel, dat kan geacht worden te zijn verbonden met zilver van het superoxyde tot zilveroxyde  $Ag_2 O$ , van  $NAg O_3$ , en met waterstof tot water  $H_2 O$  (het is duidelijk, dat deze wijze van zich uit te drukken alleen ten doel heeft, om zich eenig denkbeeld te vormen der structuur van het lichaam, met 't oog op de methoden ter quantitatieve bepaling te volgen). Het zilver kan aanwezig zijn als peroxyde ( $Ag_2 O_2$ ,  $Ag_2 O_3$ ), wellicht te gelijktijd ook als  $Ag_2 O$ , welk laatste in ieder geval moet worden aangenomen voorhanden te zijn in het zilvernitraat  $NAg O_3$ , welks aanwezigheid zou kunnen worden verondersteld in het zwarte kristallijne lichaam.

*De methoden ter quantitatieve bepaling van Ag, N, O en H<sub>2</sub> O meer in bijzonderheden.* Er is getracht, zoowel nauwkeurigheid als *verscheidenheid* te hebben van methoden, gebruikt ter bepaling derzelfde stof, met 't oog op contrôle; dit was volstrekt geboden voor het lichaam, dat ons bezig houdt; waarvan men zich ten overvloede nog later zal kunnen overtuigen.

*Zilver.* Het zilver werd, onder anderen bepaald als zilveroxyde  $Ag_2O$ , terugblijvende na behandeling met *water*, ter verwijdering van het zilvernitraat (zie later), van den inhoud der V-buis (na aanvankelijk te zijn verhit). Hierbij wordt soms een kleine hoeveelheid zilveroxyde medegevoerd, maar ook na verdampen en hernemen met water blijft iets terug, welke kleine hoeveelheden beiden worden gebracht op een klein filtrum (vooraf gewogen). Deze methode wordt aangeduid met (a). Ter contrôle werd ook wel een deel van het zilveroxyde gegloeid, en het terugblijvende zilver gewogen (b). Ook werd de zwarte kristallijne stof wel gegloeid als zoodanig, en daarvan het zilveragehalte bepaald. Maar dan wordt het lichaam verhit, b.v. te beginnen met het eenigen tijd te houden bij  $50^\circ$ , en langzamerhand hooger te gaan. (c).

Het gehalte aan zilver werd ook bepaald, door het zwarte lichaam eerst te verhitten met water, en er daarna ongeveer zooveel salpeterzuur bij te doen als ter oplossing noodig is, om vervolgens neêr te slaan met zoutzuur (d).

*Zuurstof* (niet medegerekend de gemakkelijk vrijkomende zuurstof). Deze is af te leiden uit het zilveroxyde  $Ag_2O$  direct bepaald (zie boven), en uit het zilvernitraat  $Ag N_2 O_3$  tevens gevonden, en door van deze twee hoeveelheden de som te nemen. Aldus te werk gaande, blijft men wel op het terrein van directe bepaling.

*Zuurstof* (gemakkelijk vrijkomende). Deze is langs indirecten weg bepaald, door de stof in een V-buis te verhitten, en wel in een bad van zeer fijn kopervijlsel. Zuurstof kan ook direct bepaald worden, maar deze methode is niet zoo nauwkeurig. Het is waar, dat, wanneer de zuurstof indirect wordt bepaald, door het verschil in gewicht voor en na verhitten, daarin ook het *water* is begrepen, dat wellicht in het zwarte lichaam voorhanden is, maar deze hoeveelheid kan zeer gering zijn. In ieder geval moet het water direct worden bepaald, en is als zoodanig bepaald, zoodat de bepaling van deze (l'oxygène excédant) langs indirecten weg een merkwaardige nauwkeurigheid kan bereiken, zooals later zal blijken. Dit is vooral daaraan toe te schrijven, dat het verschil in gewicht van de V-buis zeer juist is aan te geven, terwijl overigens bij het einde der proef droge lucht wordt doorgeleid (bij het volgen van den indirecten weg ter bepaling); zie over nadere bijzonderheden, de bepaling van *water*.

*Water.* Het werd beschouwd als een zaak van groot gewicht



betrekkelijk, om te weten, of het zwarte kristallijne lichaam *water* bevat of niet. Aangezien het water wel te gelijkertijd zal vrijkomen met zuurstof (gemakkelijk vrijkomende), zoo moet dit, als gezegd, direct worden bepaald, en daartoe werd gebruik gemaakt van buizen, gevuld met calciumchloride. De stof bevond zich in een V-buis, verhit in een bad van kopervijlsel (zooals reeds gezegd), dat zich daartoe uitstekend leende, en de V-buis vereenigd met *twee* buizen met chloorcaesium, aan elken kant een, terwijl ieder dezer buizen verbonden was met een buis, gedeeltelijk gevuld met zwavelzuur (niet te wege). Een der twee laatste buizen werd daarenboven vereenigd met een buis, gevuld met natron-kalk en chloorcaesium, want, in ieder geval moet tegen het einde der proef een stroom droge lucht doorgaan, waarbij aanvankelijk gebruik werd gemaakt van een adspirator, en later in andere proeven van een gashouder.

Bij het begin der proeven ontmoette men een bezwaar, daarin bestaande, dat de ontleding te snel kan geschieden, en als gevolg daarvan een kleine hoeveelheid van den inhoud der V-buis geslingerd worden in een buisje met chloorcaesium. Maar dit bezwaar werd weldra overwonnen, door in de eerste phase der proef de twee uiteinden te sluiten, en dan langzamerhand bij lagere temperatuur, eerst eenigen tijd te verhitten, zoo bij  $50^{\circ}$ , enz. (zie later de gegevens).

*Stikstof.* Dit werd bepaald als *zilvernitraat*, en als *stikstof*. Nadat de massa in de V-buis is verhit, en de gemakkelijk ontwijkende zuurstof heeft verloren (en wellicht ook een weinig water enz.), wordt deze behandeld met *water*, de oplossing ingedampt tot droogwordens, het terugblijvende hernomen met water (gefiltreerd van een weinig zilveroxyde ( $.Ag_2 O$ ), de oplossing dan opnieuw verdampt in een porseleinen kroesje, en dan de stikstof gewogen als *zilvernitraat*, een der samenstellende bestanddeelen van het zwarte lichaam, om het zoo uit te drukken. De oplossing werd ingedampt op een waterbad (met de noodige zorg), en kroes of schaaltje ten slotte geplaatst in een waterstoof. Het is duidelijk, dat de uitkomst zeer nauwkeurig kan wezen, en, in dit geval, de stikstofmethode naar DUMAS overtreffen. Maar toch is ook deze classieke methode gevolgd, alleen met deze wijziging, dat vooraan in de verbrandingsbuis werd gedaan een ferme laag *koper in korrels* (gemaakt door herleiding van gekorrelde cuprixyde), gevolgd door een laag koperoxyde (nog meer vooraan in de buis), en wel met 't oog op een gehalte van koper aan waterstof, zink, enz.; een voorzorg, die men trouwens altijd gewoon is te nemen bij het volgen der methode van DUMAS. Wordt dit veronachtzaamd, namelijk het gebruik maken van een ferme laag

koper (in korrels b.v.), dan bestaat er kans, om een te hoog gehalte aan stikstof te erlangen, door ontsnappen van zuurstof. En dit kan nog geschieden, indien de stof niet innig wordt vermengd met het koperoxyde, of de laag koper te beperkt is, of te snel wordt verhit, en dientengevolge aan de zuurstof de noodige tijd ontbreekt, om door het koper te worden vastgelegd.

Het geschikst is, beide methoden te volgen, dan heeft men contrôle, en zoo is ook gedaan (zie later de Tweede Verhandeling). Het schijnt, dat eenige onderzoekers zich hierin hebben vergist, en dit is vooral bedenkelijk bij een lichaam als het onderhavige, dat *weinig* stikstof en *veel* zuurstof bevat, en dan daarenboven een deel der zuurstof gemakkelijk loslaat. Wanneer men de methoden, waarvan wordt gebruik gemaakt, niet behoorlijk toetst, dan kan men zeker zijn van onnauwkeurige uitkomsten, of het toeval zou hierbij in 't spel moeten zijn.

*Resumtie met betrekking tot de quantitatieve bepalingen.* Neemt men de som van *zilveroxyde*  $Ag_2 O$ , van *zilvernitraat*  $Ag N O_3$ , van de *gemakkelijk vrijkomende zuurstof* (l'oxygène excédant)  $O$ , en van het water  $H_2 O$ , van eenzelfde hoeveelheid stof (verondersteld, dat deze bepaald zijn naar de methoden beschreven), dan is deze gelijk aan die hoeveelheid stof. Laat deze som zijn:

$$a Ag_2 O + b Ag N O_3 + c O \text{ (excédant) } + d H_2 O.$$

Overigens is gebruik gemaakt van verschillende methoden ter quantitatieve bepaling (zie vroeger). Wat betreft de bepaling van *water*, zoo is geen gebruik gemaakt van de methode der elementair-analyse (in ieder geval tot dit doel dan te wijzigen), omdat dit zoo goed als onuitvoerbaar was. Lettende op de geringe hoeveelheid water in verhouding tot gehalte aan stikstof en zuurstof, is dit wel duidelijk. Toch is het water direct bepaald (zie vroeger), en tevens meer of min langs indirecten weg (dan trouwens uitgaande van een formule). Het is ten slotte duidelijk, dat, de *som* van gemelde stoffen gelijk zijnde aan de geheele hoeveelheid van het zwarte lichaam, waarvan werd uitgegaan, hierin een uitstekende contrôle is gelegen voor de studie betreffende de samenstelling van dit lichaam.

Men zal thans gegevens laten volgen van analyses gedaan van verschillende bereidingen, ieder van welke door een *nummer* zal worden aangegeven (hetzij de bereiding plaats had zonder of met neutralisatie.

---



Analysen der zwarte zilververbinding, gemaakt  
zonder neutralisatie.

N<sup>o</sup>. 13 (zonder neutralisatie). De sterkte der oplossing, die aan electrolyse werd onderworpen, was die van 500 gr. zilvernitraat in 1 liter (dezer oplossing). Het zwarte lichaam werd zoo snel mogelijk gewasschen en gedroogd. Een hoeveelheid van 0,9942 gr. der stof werd aanvankelijk verhit tot en bij 150°, waardoor een gewichtsverlies ontstond van 0,0877 gr., terwijl het gewicht constant bleef bij verhitten later (gedurende een uur, als de eerste maal) van 150° tot 250° en bij deze laatste temperatuur. Geen spoor van water was te ontdekken in het uitgetrokken gedeelte der V-buis. Bij behandeling met water naar de gegeven methode werd uit het terugblijvende 0,1804 gr. *zilvernitraat*  $Ag\ N\ O_3$  afgezonderd, en bleef terug 0,7261 gr. *zilveroxyde*  $Ag_2\ O$ . Dit geeft derhalve te zamen:

Zilveroxyde .....	0,7261 gr.
Zilvernitraat .....	0,1801 „
Vrijkomende zuurstof (+ een weinig water enz.) .....	0,0877 „
Zijnde de som .....	<u>0,9939 gr.</u>

Aangezien de hoeveelheid oorspronkelijk was 0,9942 gr., zoo heeft men slechts een verschil van 0,0003 gr., dus wel zeer gering. De 0,0877 gr. vrijkomende zuurstof komt overeen met 8,82 gew.d. op 100 gew.d. der stof (zie later).

Berekent men het *zilver* van het gevonden *zilveroxyde*, dan komt men tot 67,99 gew.d. zilver op 100 gew.d. van het zwarte lichaam. De hoeveelheid *zilvernitraat* leidt tot 11,49 gew.d. zilver op 100 gew.d. van de stof. De totale hoeveelheid zilver is dus  $67,99 + 11,49 = 79,48$  p.c. zilver.

Het was niet overbodig, om zich te overtuigen van de zuiverheid van het zilveroxyde. Een hoeveelheid van 0,6753 gr. van dit zilveroxyde (ontleend aan de V-buis, die vooraf was gedroogd bij verhitten in een drogen luchtstroom), gaf 0,628 gr. zilver of 92,98 gr. p.c. ( $Ag_2\ O$  vordert 93,09, dat dus een verschil geeft van 0,11 p.c.). En berekent men het zilver door gloeiing gevonden op de geheele hoeveelheid *zilveroxyde*, dan erlangt men 67,91 gew.d. op 100 gew.d. van het zwarte lichaam. Zilvernitraat gaf 11,49 p.c. zilver (zie boven), dus zou dan de totale hoeveelheid zilver zijn  $67,91 + 11,49 = 79,4$  gew.d. op 100 gew.d. van de zwarte stof, welke uitkomst nauwelijks verschilt van die boven medegedeeld.

Ongeveer een maand later, werd van deze bereiding verhit in een porseleinen kroes in een luchtbad bij verschillende temperaturen, en ten slotte gegloeid. Er werd uitgegaan van 0,5406 gr. stof. Verhit

			(de temperatuur is niet zoo goed te regelen als in de vorige proef)
	verlies op 100 gew.d.		
tot aan en bij (een uur)	50°	0	
"	"	96°	2,98
"	"	150°	8,42
"	"	195°	8,56
"	"	250°	9,16.

Na gloeien bleef terug 0,4304 gr. of 79,61 p.c. zilver..

Berekent men de samenstelling van het zwarte lichaam in zilveroxyde, zilvernitraat en vrijkomende zuurstof op 100 gew.d., dan heeft men (zie p. 11):

Zilveroxyde.....	73,03
Vrijkomende zuurstof.....	8,82
Zilvernitraat.....	18,11
	<hr/> 99,96.

Het gehalte aan *stikstof* berekend uit het gevonden gehalte aan zilvernitraat (zijnde 1,49 p.c.), en de *overblijvende zuurstof* (= geheele hoeveelheid zuurstof — gemakkelijk vrijkomende zuurstof of oxygène excédant) door het zilveroxyde en het zilvernitraat beide *gevonden* (zijnde 10,15 p.c.), dan heeft men:

Zilver.....	79,48
Stikstof.....	1,49
Vrijkomende zuurstof.....	8,82
Terugblijvende zuurstof.....	10,15
	<hr/> 99,94.

De zoogenaamde „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” bevat tevens een weinig water (enz.).

De volgende bepaling van *water* is slechts een *voorloopige*, later volgen er anderen, die geacht kunnen worden onder meer gunstige omstandigheden te zijn genomen. Bij deze bepaling was namelijk door den stroom van snel vrijkomende zuurstof een weinig stof uit de V-buis weggevoerd in een der twee buizen met chloorcalcium. Dientengevolge werd voor het verlies in gewicht bij verhitten wat meer gevonden, en wel 0.1173 gr. uitgaande van 1,3047 gr. van het zwarte lichaam. Berekend tegen 8,82 p.c. (vrijkomende zuur-

stof + een weinig water enz.) zou 1,3047 gr. stof een verlies hebben moeten geven van 0,115 gr. (in plaats van 0,1173 gr.; men heeft  $100 : 1,3047 = 8,82 : x$ ;  $x = 0,115$  gr.). Dit verondersteld zijnde, zou  $0,1173 - 0,115 = 0,0023$  gr. stof met de zuurstof zijn medegevoerd. Daar de vermeerdering in gewicht der twee buizen met chloorecalcium was 0,0071 gr., zoo maakt dit  $0,0071 - 0,0024 = 0,0048$  gr. voor het water. Maar er dient opgelet, dat de proef vele uren vereischte, en de buizen met chloorecalcium vereenigd met de V-buis door middel van caoutchouc-buisjes, allen tijd hadden om eenig water te onttrekken aan de vochtige omgevende lucht; en contrôle-proeven hebben doen zien, dat dit voor ieder buisje met chloorecalcium, onder gemelde omstandigheden, wel zoo ongeveer 0,001 tot 0,002 gr. bedraagt (ingeval de proef vele uren vordert). Daarom zal later geen gebruik worden gemaakt van caoutchouc-buisjes, maar zullen de buisjes in elkander worden geslepen; terwijl men een gashouder zal nemen in plaats van een adspirator. Maar neemt men zelfs dit niet in aanmerking, dan nog zal het besluit zijn, dat het zwarte lichaam *geen water* als constitueerend bestanddeel bevat. Want naar de formule van FISCHER zou het lichaam 2,63 p.c. water bevatten, en naar die van BERTHELOT 1,27 p.c. dus nagenoeg de helft. Berekend voor 1,27 p.c. zou een hoeveelheid van 1,3047 gr. van het lichaam in quaestie bevatten 0,01656 gr., zij dit 16 milligr. water, wel te verstaan *theoretisch*. Neemt men als gevonden hoeveelheid eens aan 0,0048 gr., zij dit 5 milligr. (dat noodwendig te hoog is, zooals straks bleek het geval te zijn), dan zou dit naar gemelde formule ongeveer  $\frac{1}{3}$  gedeelte zijn der theoretische hoeveelheid. Ook is duidelijk, dat een product als het zwarte lichaam is, wel iets moet inhouden der stoffen in oplossing aanwezig, namelijk *water*, *vrij salpeterzuur*, en *vrij zilvernitraat*, omdat het lichaam niet was gezuiverd door kristallisatie. Wat betreft het *water*, er zou een weinig water kunnen besloten zijn in de kristallen, en dientengevolge niet kunnen verdampen onder den exsiccator. In ieder geval heeft men *geen* spoor water zien verdicht worden tegen den wand van het uitgetrokken gedeelte der V-buis; zoodat de kleine vermeerdering in gewicht der buisjes met chloorecalcium ook het gevolg kan wezen van eenig andere stof. (Zooals reeds vroeger medegedeeld, heeft men den gang der proef zóó leeren regelen, dat hoegenaamd niets van den inhoud der V-buis door de vrijkomende zuurstof wordt medegevoerd).

Men zou kunnen veronderstellen, dat het zwarte lichaam wel *water* bevat, maar dit meerendeels is verwijderd door staan onder een exsiccator met zwavelzuur en natrium. Maar het verlies in ge-



wicht van het zwarte lichaam — nadat het gewicht genoegzaam constant was geworden na te zijn bereid (dat eenige weinige uren vereischt) — is te gering (zie later), om aan een dergelijke veronderstelling voedsel te geven. Ook behouden de kristallen dezelfde kleur en gelijken glans, zelfs na maanden te zijn bewaard in een stofbuisje, onder gewone omstandigheden; en veel minder heeft men de kristallen tot stof zien uiteenvallen.

Later zullen water-bepalingen worden medegedeeld van andere bereidingen.

*Over een theoretische berekening ter contróle.* Het meerendeel der analyses van het zwarte lichaam leidt tot de formule  $3 Ag_2 O \cdot 5 O$ ,  $Ag NO_3$ , als uitdrukking der samenstelling, welke formule 8,46 p.c. vordert voor de gemakkelijk vrijkomende zuurstof (l'oxygène excédant); zie later. Gaat men nu eens uit van de waarde daarvoor gevonden namelijk die van 8,82 p.c.. (er zijn noodwendig ook waarden gevonden, die hiervan eenigermate verschillen), dan zou dit een verschil geven van 0,36 p.c.. De waarde 8,82 heeft betrekking op gemelde zuurstof + een weinig water (of andere vluchtige bestanddeelen), dus heeft men (verondersteld, dat men alleen heeft te doen met water) ongeveer 0,36 p.c. voor het gehalte aan water. In 100 gr. van het zwarte lichaam zou dan 0,36 gr. water zijn, dus in 1,3047 gr. (om de laatste bepaling te nemen) 0,00469 gr. water ( $100 : 1,3047 = 0,363 : x = 0,00469$  gr.), terwijl gevonden werd 0,0048 gr., daarin begrepen het water afkomstig uit den dampkring. Zooals later zal blijken, heeft men nog met andere bronnen van fouten te maken; en men hechte aan dit resultaat dan ook niet meer waarde, dan zulks verdient.

N°. 12 (zonder neutralisatie). De concentratie der oplossing was die van 300. Er werd zoo snel mogelijk gewasschen en gedroogd. Men ging uit van 1,1723 gr. stof. De uiteinden der buizen met zwavelzuur waren *gesloten* bij verhitten tot en bij  $80^\circ$  (zie vroeger). Hoegenaamd niets der stof werd met den zuurstofstroom medegevoerd, en evenmin later. Ten slotte werd een stroom droge lucht doorgelaten, door middel van een adspirator.

In de volgende opgave beteekent:

*a* de temperatuur tot welke en bij welke werd verhit (dit laatste ongeveer 1 uur bedragende, te beginnen bij  $100^\circ$ — $105^\circ$ ; er was zeer veel tijd noodig, alvorens die temperatuur werd bereikt).

*b* geeft de vermeerdering in gewicht der buis met chloorcalcium links; te beginnen bij  $100^\circ$ — $105^\circ$ .

*c* hetzelfde voor zulk een buis rechts (het dichtst bij den aspirator); dus te beginnen bij  $100^{\circ}$ — $105^{\circ}$ .

*d* geeft aan de som dezer *vermeerdering*, in gewicht.

*e* duidt aan de *vermindering* in gewicht der V-buis met de stof (verhit in een bad van kopervijlsel; zie vroeger), aangevangen met te worden bepaald bij  $100^{\circ}$ — $105^{\circ}$ .

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	
$50^{\circ}$	—	—	—	—	} Er werd niet ge- wogen.
$65^{\circ}$	—	—	—	—	
$76^{\circ}$	—	—	—	—	
$80^{\circ}$	—	—	—	—	
$100^{\circ}$ — $105^{\circ}$	0,0014	0,0028	0,0042	0,0586	gr.
$120^{\circ}$ — $125^{\circ}$	0,0009	0,0017	0,0026	0,0413	„
$145^{\circ}$ — $150^{\circ}$	0,0012	0,0015	0,0027	0,0002	„
$195^{\circ}$ — $200^{\circ}$	0,0009	0,0007	0,0016	0,0004	„
$245^{\circ}$ — $250^{\circ}$	0,0009	0,0006	0,0015	0,0001	„
som 0,1006 of					

8,58 p.c. der hoeveelheid stof.

De vermindering van 0,0001 is meer als toevalliger wijze te beschouwen.

Neemt men voor het *water* de vermeerdering van 0,0042 gr. (dat te hoog is), dan zou dit geven 0,3 p.c. water. Voor het oogeblik is niet te zeggen, waardoor het komt, dat de buisjes met chloorcaïum op het laatst iets minder aan gewicht toenemen. Maar zelfs de som nemende van  $0,0042 + 0,0026 + 0,0027$  (na  $100^{\circ}$ — $105^{\circ}$  is het water trouwens wel verwijderd), en dit verminderende met het minimum, zij dit  $3 \times 0,0015$ , dan nog vindt men voor het gehalte aan water 0,005 gr. of 0,4 p.c..

Al gaat de spontane ontleding van het zwarte lichaam langzaam voort (zie later), toch komt er een weinig zuurstof vrij bij gewone temperatuur, als de stof wordt bewaard, dat invloed uitoefent op de uitkomst der analyse. Hierdoor wellicht is de hoeveelheid vrijkomende zuurstof iets lager in de laatste analyse, dan in andere bepalingen (de stof werd altijd bewaard in kleine buisjes, nadat het gewicht genoegzaam constant was geworden, onder den exsiccator).

Wat nog is te releveeren, is wel dit, dat de kristallen, na te zijn verhit tot en bij  $244^{\circ}$ — $250^{\circ}$ , als zoo even beschreven, *hun vorm hebben behouden*. En wat wellicht nog bevreemdender is, de *kleur* is betrekkelijk *weinig* veranderd, en zelfs is er nog wat van den *glans* overgebleven. Hieruit volgt, dat zulks geen eigenschap kan geacht worden te zijn van het zwarte lichaam, om meer of min bij



wijze van ontploffing te worden ontleed; dat trouwens wel kan voorkomen, maar betrekkelijk zwak, indien betrekkelijk snel wordt verhit (overigens werd onder gemelde omstandigheden niets bespeurd van een zoogenaamde ontploffing).

Het zij herhaald, dat alle buisjes in elkander zullen *geslepen* worden, en van een *gashouder* zal worden gebruik gemaakt <sup>1)</sup> (in plaats van een adpirator).

Het terugblijvende werd uitgetrokken met water, en bepaald de hoeveelheid *zilvernitraat* en *zilveroxyde*, op de wijze genoegzaam, als dit geschiedde met bereiding N°. 13. Alzoo werd langs directen weg gevonden:

Zilveroxyde . . . . .	0,86	gr.
Zilvernitraat . . . . .	0,2119	„
vroeger: vrijkomende zuurstof (+ water + enz.) . . . . .	0,1006	„
som . . .	1,1735	gr..

De hoeveelheid stof, waarvan werd uitgegaan, bedroeg 1,1723 gr., dus bedraagt de som te veel 0,0012 gr.. Berekend op 100 gew.d. stof (zich houdende aan hetgeen de proef gaf) heeft men:

Zilveroxyde . . . . .	73,44
Zilvernitraat . . . . .	18,07
vrijkomende zuurstof (+ water + enz.) . . .	8,58
	<u>100,09</u>

en in grondstoffen:

Zilver . . . . .	79,84	
Stikstof . . . . .	1,49	
vrijkomende zuurstof (+ water + enz.) . . .	8,58	18,76
overblijvende zuurstof . . . . .	10,18	
	<u>100,09.</u>	

N°. 21. De concentratie was die van 500 gr.; er werd zoo snel mogelijk gewasschen en gedroogd. Een hoeveelheid van 0,911 gr. werd verhit in een porseleinen *kroes* in een luchtbad (de temperatuur is dus niet zoo goed te regelen als het geval is bij gebruik van een V-buis, en een bad van kopervijlsel). Er werd gevonden:

Verhit tot en bij (een uur).	Totale vermindering in gewicht.	Berekend op 100 gew.d. der stof:
50° C.	0 gr.	0
95°—97°	0,0235 „	2,577
145°—150°	0,0775 „	8,501
195°—200°	0,0785 „	8,610
245°—250°	0,0796 „	8,731

<sup>1)</sup> Dit is later geschied (zie de volgende Verhandeling) en met het gewenschte gevolg.

Na gloeien bleef terug 0,7267 gr. zilver, of 79,708 p.c. (zij dit 79,71 p.c.) (c).

*Het zwarte kristallijne lichaam tegenover water.* Het product van bereiding N°. 21 werd thans behandeld met *water* op een filtrum, terwijl de trechter bij staan gesloten werd met een kurkje. Overigens werd dezelfde weg ingeslagen ter analyse, en dat ter behoorlijke vergelijking. Het zwarte lichaam bleef *twee* dagen in aanraking met water. Voor analyse werd wat van het filtrum afgenomen. Uitgaande van 1,35 gr. stof werden verkregen de volgende uitkomsten:

Tot en bij (een uur).	Totale vermindering in gewicht.	Berekend op 100 gew.d. der stof.
50°	0	0
95°—97°	0,0342 gr.	2,598
145°—150°	0,1115 „	8,471
195°—200°	0,1125 „	8,547
244°—250°	0,1142 „	8,676.

Na gloeiing bleef terug 1,0516 gr. aan zilver, of 79,897 p.c.. Als gevolg van het samenzijn met water gedurende *twee* dagen, was derhalve het zilver toegenomen:

$$\begin{array}{r}
 79,897 \\
 79,708 \\
 \hline
 0,189 \text{ p.c..}
 \end{array}$$

Hetgeen terugbleef op het filtrum (na er te hebben uitgenomen voor de zoo even medegedeelde analyse) liet men weder *twee* dagen staan met water (dus in 't geheel *vier* dagen). Er werd toen een zekere hoeveelheid uitgenomen voor de volgende analyse, en als altijd eerst doorgespoeld, tot het filtraat geen reactie meer vertoonde op zilver. Uitgaande van 1,1781 gr. stof werd gevonden:

Temp. tot en bij (een uur).	Totale vermindering in gewicht.	Berekend op 100 gew.d. stof.
50°	0 gr.	0
95°—97°	0,0274 „	2,326
145°—150°	0,0978 „	8,302
194°—200°	0,099 „	8,403
245°—250°	0,1011 „	8,581.

Na gloeiing bleef terug 0,9471 gr. zilver of 80,392 p.c.. Bij

de tweede behandeling met water nam het gehalte aan zilver dus toe:

$$\begin{array}{r} 80,392 \\ 79,897 \\ \hline 0,495 \text{ p.c.} \end{array}$$

dus betrekkelijk veel meer dan de eerste keer. Neemt men de *vier* dagen bij elkander, dan heeft men:

$$\begin{array}{r} 0,189 \\ 0,495 \\ \hline 0,684 \text{ p.c. zilver, dus } \textit{minder} \text{ dan } 1 \text{ p.c.} \end{array}$$

zilver te hoog, zij het 0,7 p.c. zilver. De vrijkomende zuurstof (oxygène excédant) is langzamerhand verminderd, zooals werd opgegeven (zie pag. 16 onderaan):

$$\begin{array}{r} 8,731 \text{ p.c.} \\ 8,676 \text{ „} \\ 8,581 \text{ „} \end{array}$$

dus een aanraking van het zwarte lichaam gedurende *vier* dagen gaf een vermindering in vrijkomende zuurstof van 0,15 p.c..

De volgende proef doet ook recht duidelijk zien, dat water wel de ontleding bevordert van het zwarte lichaam, doch betrekkelijk langzaam. Een hoeveelheid stof, niet meer bedragende dan 0,1 gr., werd tot poeder fijngewreven, en toen met water gedaan op een filtrum (de trechter werd bij staan gesloten met een kurkje). Na eenige dagen werd het water ververscht, en later telkens na eenige weken. En deze betrekkelijk kleine hoeveelheid der zwarte stof gaf nog de reactie op zilver en salpeterzuur (met diphenylamine) bij gedeeltelijke indamping der oplossing), *na eenige maanden*, en wel ongeveer *zeven* maanden.

Hetzelfde werd gedaan met een kleine hoeveelheid van het lichaam, zonder te zijn fijn gemaakt; na zes maanden vertoonden zich de reacties van zilver en salpeterzuur nog zeer duidelijk (de blauwe verkleuring liet niets te wenschen over).

### De kristallen na totale ontleding.

Merken we ten slotte nog op, dat de naaldvormige kristallen den vorm hadden behouden (zijnde langzamerhand verhit), na alleen het *zilver* te hebben overgehouden. Hieruit volgt genoegzaam, dat men de ontledingssnelheid van het zwarte lichaam in zijne macht heeft, en deze, om zich zoo uit te drukken, kan vertragen, nagevoeg zooveel men wil.

## Met neutralisatie der oplossing.

N°. 8 (met neutralisatie). De concentratie was die van 300. Er werd zoo snel mogelijk gewasschen en gedroogd. Een hoeveelheid van 0,2886 gr. stof werd aanvankelijk verhit in een V-buis tot en nabij 300° (waarbij het 9,27 p.c. in gewicht verloor; maar waarschijnlijk werd hierbij een weinig zilveroxyde ontleed). Daarna werd gegloeid in een porceleinen kroes en erlangd 0,2298 gr. zilver (daaronder begrepen, door berekening, het zilver der kleine hoeveelheid stof in de buis teruggebleven), of 79,62 p.c. zilver (*c*).

N°. 10 (met neutralisatie). De concentratie was die van 300. Er werd zoo snel mogelijk gewasschen en gedroogd. Een hoeveelheid van 0,488 gr. gaf 0,5157 gr. chloorzilver (*a*), bevattende 0,3882 gr. zilver of 79,54 p.c. zilver.

N°. 11 (met neutralisatie). De concentratie was die van 300. Er werd zoo snel mogelijk gewasschen en gedroogd. Deze proef was de eenige, waarbij *koolzuur zilver* als zoodanig werd gedaan in groote hoeveelheid in de kleine glazen schaal, geplaatst in de groote platina schaal, ten einde een maximum van neutralisatie der oplossing nabij te komen. Het had hoegenaamd geen bezwaar, om het zwarte kristallijne lichaam te bevrijden van het koolzuur zilver (in groote overmaat voorhanden) door wasschen met water, daar het zwarte lichaam (zooals reeds vroeger gezegd) betrekkelijk veel zwaarder is dan het koolzuur zilver. Bij de bereiding kwam veel gas vrij, in hoofdzaak bestaande uit kooldioxyde, als gevolg van het vrijkomen van salpeterzuur bij de reactie; zie hierover vooral later. Een hoeveelheid van 0,4269 gr. gaf 0,4503 gr. chloorzilver (*d*), beantwoordende aan 0,3389 gr. zilver of 79,39 p.c.. Een ander onderzoeker verkreeg van 0,454 gr. derzelfde stof 0,4796 gr. chloorzilver (*d*) of 0,361 gr. zilver, overeenkomende met 79,51 p.c. Het gemiddelde is dus 79,4 p.c. zilver.

## Samenvatting der analytische gegevens.

De uitkomsten zijn gerangschikt, al naar gelang het zwarte kristallijne lichaam zoo snel mogelijk werd gewasschen en gedroogd (*A*) of langeren tijd in aanraking werd gelaten met water (*B*); en verder, naar gelang de oplossing niet werd geneutraliseerd (*a*), of wel werd geneutraliseerd (*b*).

In de volgende Tabel is opgegeven het nommer der bereiding, zoo mede de concentratie; en wat betreft de samenstelling, het



gehalte aan zilver, stikstof en vrijkomende zuurstof (oxygène excédant + sporen van water, enz.), op 100 gew.d. van het zwarte lichaam:

*A. a.*

Nommer.	Concentratie.	Zilver.	Stikstof.	Vrijkomende zuurstof.
13	500 gr.	79,48	1,49	8,82
		79,61	(zie pag. 12)	
21	500 „	79,71	—	8,73
12	300 „	79,84	1,49	8,58

*A. b.*

8	300 gr.	79,62	—	(zie pag. 19)
10	300 „	79,54	—	—
11	300 „	79,40	—	—

*B. a.*

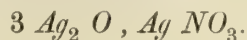
21	500 gr.	79,90	(zie pag. 17)	—
		80,39	(zie pag. 17)	—

Over bijzonderheden, zie vroeger.

Later zullen uitvoerige onderzoekingen worden gedaan met bereidingen door oplossingen met een concentratie beneden 300 gr..

Men heeft zich niet in te laten met *B. a.*, daar deze alleen ten doel hebben, om den invloed te leeren kennen van water op het zwarte lichaam.

*Formule van het zwarte lichaam.* Nemen we als uitgangspunt de analyse van bereiding N°. 13 (zie p. 11). Er was quantitatief bepaald *zilvernitraat* en *zilveroxyde*, en daarvan afgeleid het zilver, zijnde  $11,49 + 67,98$ . De verhouding dezer twee hoeveelheden zilver van zilvernitraat en zilveroxyde is ongeveer die van 1 : 6, want men heeft  $\frac{67,99}{6} = 11,33$ , zijnde  $67,99 + 11,49 = 79,48$ , en  $67,99 + 11,33 = 79,32$  p.c., dus een verschil gevende van  $79,48 - 79,32 = 0,16$  p.c., dat wel gering is (den aard van het lichaam in aanmerking genomen). Daaruit zou dan volgen, dat onder den vorm van zilveroxyde  $Ag_2O$  en zilvernitraat  $AgNO_3$  in het zwarte lichaam de verhouding is van:



De methode is in den grond dezelfde, als men *zilveroxyde* (quant. bepaald) en *zilvernitraat* (bepaald) atomistisch op elkander berekent ( $0,7261 : 23128 = 0,1801 : x$ ;  $Ag_2O = 231,28$ ), en bijgevolg



ook de uitkomst. Berekent men de *gemakkelijk vrijkomende zuurstof* (oxygène excédant; quant. bepaald, er onder begrepen de kleine hoeveelheid water enz.) op het *zilvernitraat* (tevens bepaald) atomistisch, dan wordt gevonden voor zuurstof 82,42 op het mol. gew. van zilvernitraat ( $0,1801 : 16,955 = 0,0877 : x$ ;  $AgNO_3 = 169,55$ ).

Nu heeft men  $\frac{82,42}{15,96} = 5,16$  O; zij dit 5 O op 1  $AgNO_3$ . Maar 82,42 is wel iets te groot, in aanmerking genomen, dat de zoo-genaamde vrijkomende zuurstof (oxygène excédant) ook iets water (enz.) insluit. Het zal dus wel geoorloofd wezen, om 5 te nemen voor dit quotient (ook kan 0,1801 gr. een weinig te laag zijn, maar veeleer is het tegendeel het geval, daar het sporen bevat van zilveroxyde), zoodat men dan heeft de verhouding van:

5 O .  $AgNO_3$ , en men had aanvankelijk  
 3  $Ag_2O$  .  $AgNO_3$ , dat maakt:  
 3  $Ag_2O$  . 5 O .  $AgNO_3$ ,

Wordt zilveroxyde  $Ag_2O$ , zilvernitraat  $AgNO_3$  en de vrijkomende zuurstof (oxygène excédant) berekend op 100 gew.d. van het zwarte lichaam, dan heeft men:

Gevonden (zie pag. 12).		Berekend volgens 3 $Ag_2O$ , 5 O $AgNO_3$ ( $H=1$ ; $O=15,96$ ; $N=14,01$ ; $Ag=107,66$ ):	
Zilveroxyde. . . . .	73,03		73,56
Vrijkomende zuurstof	8,82		8,46
Zilvernitraat. . . . .	18,11		17,98
	<u>99,96</u>		<u>100,—</u>

En berekend op de elementen:

Gevonden (zie pag. 12).		Berekend volgens 3 $Ag_2O$ . 5 O . $AgNO_3$ ;	
Zilver. . . . .	79,48		79,91
Stikstof. . . . .	1,49		1,49
Vrijkomende zuurstof	8,82		8,46
Overblijvende zuurstof	10,15		10,14
	<u>99,94</u>		<u>100,—</u>

Veronderstellen we voor een oogenblik, dat  $8,82 - 8,46 = 0,36$  de hoeveelheid water voorstelt voorhanden in 100 gew.d. der verbinding, of eigentlijk 99,94 (als men zich geheel houdt aan de aanneming, zie pag. 12), dan is:

Zilver . . . . .	79,48
Stikstof . . . . .	1,49
Vrijkomende zuurstof . . . . .	8,46
Overblijvende zuurstof . . . . .	10,15
Water . . . . .	0,36
	<hr/> 99,94 <hr/>

dus zonder water zou dan de samenstelling zijn:

Zilver . . . . .	79,48
Stikstof . . . . .	1,49
Vrijkomende zuurstof . . . . .	8,46
Overblijvende zuurstof . . . . .	10,15
	<hr/> 99,58 <hr/>

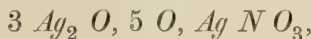
of berekend op 100 gew.d.:	3 $Ag_2 O$ , 5 $O$ , $Ag NO_3$ 3 eischt:
Zilver . . . . .	79,81
Stikstof . . . . .	1,49
Vrijkomende zuurstof . .	8,49
Terugblijvende zuurstof	10,21
	<hr/> 100,— <hr/>
	79,91
	1,49
	8,46
	10,14
	<hr/> 100,— <hr/>

Het water (enz.) direct bepaald, zou overigens, zonder bepaalde correctie, ongeveer zijn 0,3—0,4 p.c. (zie vroeger p. 13).

Lettende op al wat is voorafgegaan, zou men de formules: 3  $Ag_2 O_3$ ,  $Ag NO_3$  (1) en 2  $Ag_2 O_3$ ,  $Ag NO_3$  (2) niet kunnen aanbevelen, want:

1. 3  $Ag_2 O$ , 6  $O$ ,  $Ag NO_3$
2. 2  $Ag_2 O$ , 4  $O$ ,  $Ag NO_3$ ,

maar alleen de formule:



*uitgaande van de uitkomsten van analyse met oplossingen ter concentratie van 300 gr. en hooger.* Met oplossingen van geringere concentratie moeten nog vele bereidingen en analyses worden verricht, alvorens een besluit te kunnen nemen met betrekking tot den invloed van den sterkte-grad der oplossing.

*De formule 3  $Ag_2 O$ , 5  $O$ ,  $Ag NO_3$  (d) vergeleken met andere formules, die voorgesteld zijn.* Deze formules zijn (zie pag. 4):

MAHLA 5  $Ag_2 O_2$ , 2  $Ag NO_3$ ,  $H_2 O$  (a),

FISCHER 2  $Ag_2 O_2$ ,  $Ag NO_3$ ,  $H_2 O$  (b),

BERTHELOT  $[2 Ag_2 O_3, Ag NO_3]^2$ ,  $H_2 O$  (c),

en geven, berekend op 100 gew.d. ( $H = 15,96$ ;  $N = 14,01$ ;  $Ag = 107,66$ ):

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	
Zilver.....	81,08	78,94	76,36	79,91	{ 8,46
Zuurstof totaal..	17,03	18,72	21,51	18,6	{ 10,14
Stikstof.....	1,76	2,85	1,99	1,49	
Waterstof.....	0,13	0,29	0,14	0	

Het gehalte van waterstof berekend als *water*, bedraagt (zie pag. 13) voor de formule van BERTHELOT, 1,27 p.c. *water* (hetzelfde genoegzaam voor die van MAHLA), en voor de formule van FISCHER 2,63 p.c. terwijl de uitkomsten dezer Verhandeling er toe leiden, om *geen* water aan te nemen in het zwarte lichaam.

De gemakkelijk vrijkomende zuurstof (oxygène excédant), een zeer gewichtig bestanddeel, is naar de formule van MAHLA 5 p.c., van van FISCHER 4,68 p.c., en van BERTHELOT 9,04 p.c..

De vrijkomende zuurstof is gemakkelijk te berekenen, als de formule is gegeven, en de samenstelling, berekend op 100 gew.d. B.v. naar MAHLA heeft het molecuul 17 atomen zuurstof, en bevat 17,03 p.c. zuurstof totaal, dat geeft:  $\frac{17,03}{17} = 1$  (nagenoeg),

en aangezien:

$5 Ag_2 O_2, 2 Ag NO_3, H_2 O = 5 Ag_2 O + 5 O + 2 Ag NO_3 + H_2 O$ ,  
wordt voor de vrijkomende zuurstof gevonden 5 p.c..

Volgens de formule van FISCHER bedraagt het molecuul 8 O, en 18,72 p.c. zijnde zuurstof totaal, geeft dit voor vrijkomende zuurstof:  $\frac{18,72}{8} = 2,34$  en  $2,34 \times 2 = 4,68$  p.c., want:

$2 Ag_2 O_2 \cdot Ag NO_3 \cdot H_2 O = 2 Ag_2 O + 2 O + Ag NO_3 + H_2 O$ .

De formule van BERTHELOT bevat 18 O in het molecuul, en 21,51 p.c. zuurstof totaal, dat geeft dus voor de vrijkomende zuurstof:  $\frac{21,51}{19} = 1,13$  en  $1,13 \times 8 = 9,04$  p.c., want:

$[2 Ag_2 O_3, Ag NO_3]^2, H_2 O = 4 Ag_2 O + 8 O + 2 Ag NO_3 + H_2 O$ .

Door deze drie formules te herleiden tot een zelfde hoeveelheid  $Ag_2 O$ , worden de verschillen nog duidelijker. Men heeft:

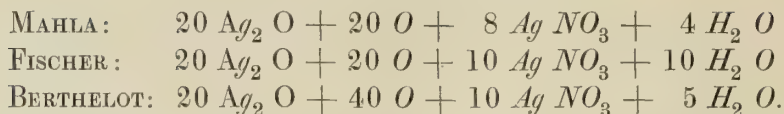
MAHLA:  $5 Ag_2 O + 5 O + 2 Ag NO_3 + H_2 O$

FISCHER:  $2 Ag_2 O + 2 O + 2 Ag NO_3 + H_2 O$

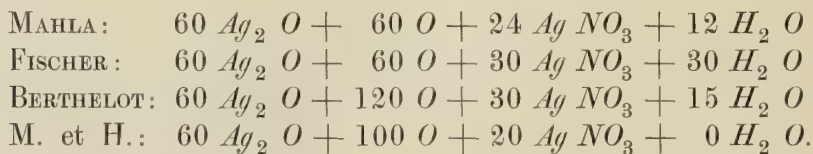
BERTHELOT:  $4 Ag_2 O + 8 O + 2 Ag NO_3 + H_2 O$

M. en H.:  $3 Ag_2 O + 5 O + Ag NO_3$

dat geeft:



Ter vergelijking met de formule, waartoe deze Verhandeling aanleiding geeft, is nog te vermenigvuldigen met 3, zoodat men heeft:



De wijze van bereiding en quantitative bepaling hebben schuld aan de soms verbazende verschillen der uitkomsten van analyse, maar gebrek aan contrôle is er wel de voornaamste schuld van, als veelal in dergelijke gevallen. Het is steeds noodlottig, en zal dit altijd blijven, om de methoden bij analyse aangewend, niet behoorlijk te controleeren. Maar ieder dezer onderzoekers heeft zijne verdiensten gehad met betrekking tot dit lichaam; ook wil men gansch niet zweren bij de formule  $3 \text{ Ag}_2 \text{ O}$ ,  $5 \text{ O}$ ,  $\text{Ag NO}_3$ .

Zooals blijkt (zie boven), vinden FISCHER en BERTHELOT dezelfde verhouding voor  $\text{Ag}_2 \text{ O}$  en  $\text{Ag NO}_3$ ; maar geeft FISCHER 60 O en BERTHELOT het dubbele 120 O. En het water verschilt ook het dubbele, zijnde 3 O en 15  $\text{H}_2 \text{ O}$  (in omgekeerden zin). MAHLA en FISCHER geven dezelfde verhouding voor  $\text{Ag}_2 \text{ O}$  en O.

Wat betreft de uitkomsten in deze Verhandeling neêrgelegd, nogmaals moge duidelijk worden gezegd, dat de proeven in hoofdzaak zijn genomen *met oplossingen van een betrekkelijk groote concentratie*. Maar de invloed van concentratie op samenstelling is overigens nog na te gaan.

BERTHELOT <sup>1)</sup> bepaalde *gemakkelijk vrijkomende zuurstof* (oxygène excédant), water en stikstof langs directen weg, en het overige, naar het schijnt, langs indirecten weg. Deze geleerde vond op 100 gew.d. van het zwarte kristallijne lichaam (uitgedrukt naar de vroegere schrijfwijze, als in de oorspronkelijke Verhandeling het geval is):

O (gemakkelijk vrijkomende zuurstof)	8,9
HO	1,3
N	1,9
Som	<u>12,1.</u>

<sup>1)</sup> l. c. Ann. de Chim. et de Phys.



Het overige is, indien men zich niet vergist, wel aldus bepaald. Door het verschil te nemen van 100 en 12,1 heeft men:  $100 - 12,1 = 87,9$  gew.d., vertegenwoordigende de som van  $x \text{ Ag O} + y \text{ Ag O}_6$  op 100 gew.d. van het lichaam. Uitgaande van de hoeveelheid *stikstof* gevonden, laat zich berekenen de rest  $y \text{ Ag O}_6$  (op 100 gew.d. der verbinding), en door aftrekken van 87,9 vindt men  $x \text{ Ag O}$  (op 100 gew.d. der stof). Van ieder dezer twee hoeveelheden laat zich afleiden *zilver* en *zuurstof* afzonderlijk, en de som dezer hoeveelheden zilver geeft dan de *totale* hoeveelheid zilver, en die van de zuurstof, de zoogenaamde „resterende” zuurstof. Aldus wordt dan verkregen:

De formule  $4 \text{ Ag O}_3$ ,  $\text{Ag N O}_6$ ,  $\text{HO}$  ( $H = 1$ ;  $O = 7,98$ ;  $\text{Ag} = 107,66$ ;  $N = 14,01$ )

			eischt:
Gevonden.	{	O (vrijgekomen)	8,9
		<i>HO</i>	1,9
		<i>N</i>	1,9
Afgeleid.	{	<i>Ag</i>	76,5
		O (overblijvend)	11,4
			100,—
			100,—

(Volgens gemelde berekening werd gevonden voor *Ag* 76,78 p.c. en voor *O* (overblijvend) 11,1 p.c., dus te zamen 87,88, in plaats van 87,9).

De zuurstof van het *water* geeft met de *overblijvende* zuurstof en *vrijkomende* zuurstof, het *totaal* aan zuurstof. Berekent men tevens de waterstof van het water, dan heeft men ten slotte:

Proef	$4 \text{ Ag O}_3$ , $\text{N O}_6$ , $\text{Ag}$ , $\text{HO}$	eischt:
<i>Ag</i> 76,5	76,36	
<i>O</i> 21,4	21,51	
<i>N</i> 1,9	1,99	
<i>H</i> 0,15	0,14	
<hr/> 100,—	<hr/> 100,—	

Deze formule luidt in de nieuwere schrijfwijze (zie vroeger)

( $H = 1$ ;  $O = 15,96$ ;  $\text{Ag} = 107,66$ ;  $N = 14,01$ ):

$[2 \text{ Ag}_2 \text{ O}_3, \text{Ag N O}_3]^2, \text{H}_2 \text{ O}$ .

Er werd in deze Verhandeling voor vrijkomende zuurstof gegeven (b. v. volgens een analyse van N°. 13) 8,82 p.c., dat wel dicht is gelegen bij 8,9 p.c., maar 8,82 p.c. geeft aan: vrijkomende *zuurstof* + mogelijk aanwezig *water* (enz.), dus zou ter vergelijking 8,82 moeten worden



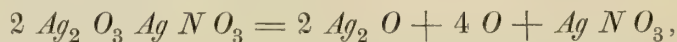
gesteld naast  $8,9 + 1,3 = 10,2$  p.c. volgens bovenstaande analyse. De *stikstof* werd hooger gevonden, dan naar deze uitkomsten. Het is opmerkingswaardig (zie pag. 20), dat in deze Verhandeling de *kleinste* hoeveelheid stikstof voorkomt van al de onderzoekers (onze methode werd in meer dan een opzicht gecontroleerd, o. a., met de methode DUMAS; gewijzigd voor het beoogde doel, met 't oog op de betrekkelijk groote hoeveelheid zuurstof, die vrijkomt in vergelijking der *stikstof*). Maar de graad van concentratie zou daaraan schuld kunnen zijn.

Het is niet onbelangrijk, om eens na te gaan, wat de formule van BERTHELOT, zonder water, vereischt op 100 gew.d.:

Zilver . . . . .	77,34
Vrijkomende zuurstof . . . . .	9,17
Stikstof . . . . .	2,0
Overblijvende zuurstof . . . . .	11,49
	<hr/> 100,—

Uitgaande van de analytische uitkomsten van N°. 13, wordt, berekend op 2 p.c. stikstof, gevonden voor vrijkomende zuurstof (oxygène excédant) 11,84, dat te veel afwijkt;  $1,49 : 2 = 8,82 : x$ ;  $x = 11,84$ ).

Mogelijk is, dat als gevolg eener gedeeltelijke ontleding van  $2 Ag_2 O_3$ ,  $Ag N O_3$ :



het zwarte lichaam een mengsel is van  $Ag_2 O$  ( $Ag N O_3$  zijnde verwijderd door het water) en  $2 Ag_2 O_3$ ,  $Ag N O_3$ . Veronderstel eens, dat dit mengsel is:  $\frac{1}{2} Ag_2 O + 2 Ag_2 O_3$ ,  $Ag N O_3$ , dan zou de samenstelling op 100 gew.d. zijn:

Zilver . . . . .	79,71
Vrijkomende zuurstof . . . . .	7,86
Stikstof . . . . .	1,72
Overblijvende zuurstof . . . . .	10,71
	<hr/> 100,—

dat te veel verschilt van het gevondene, niettegenstaande het zilver genoegzaam overeenstemt.

*Over de zuurstof, die gedurende de bereiding vrij komt.* Welke ook de concentratie zij, b.v. die van 1000 gr. (1 kilogr.) in 1 liter der oplossing, of van 170 gr. zilvernitraat (de normale oplossing bevat 169,55 gr.) *steeds komt zuurstof vrij* gedurende de electro-

lyse bij de anode (waar het zwarte lichaam ontstaat), en dat bijkans van den aanvang af tot het einde toe der bewerking. Het heeft den schijn, dat de hoeveelheid vrijkomende zuurstof langzamerhand een weinig vermeerdert aan het einde, in geval de oplossing *niet* wordt geneutraliseerd. Als van zelf rijst de vraag, of deze zuurstof *primair* is of *secondair*, of beide. Verondersteld een oogenblik, dat de zuurstof *primair* is, dan zou de kans betrekkelijk groot wezen, dat de hoeveelheid zuurstof vermindert, naarmate de concentratie vermeerdert; maar dit schijnt niet het geval te zijn. Ook met 't oog op de beschouwingen, die later volgen, gelooft men de *vrije* zuurstof te moeten beschouwen als van *secondairen* aard, ten minste voor de grootste hoeveelheid; anders gezegd, als een ontledingsproduct van het zwarte kristallijne lichaam. Hieruit zou dan kunnen volgen, dat dit lichaam wordt ontleed van het oogenblik af van zijn ontstaan, en niet wel zuiver kan wezen (zie later).

*Over gedeelten met bruine kleur, die zich vertoonen in oplossingen van zekere concentratie.* In geval de oplossing betrekkelijk geconcentreerd is, neemt men aan de anode *bruine strepen waar*, (vooral bij de oppervlakte), zich veelal richtende naar de kathode. Dit was vooral het geval met de oplossing van 1000 gr. zilvernitraat in 1 liter der oplossing (zijnde overigens het maximum, waarvan men zich bediende); maar toch eveneens (in een minderen graad) met een concentratie van 1000—400 gr. in 1 liter, en wellicht minder.

De verklaring van dit verschijnsel komt voor, niet moeielijk te zijn. De reactie geeft aanleiding tot het doen vrijkomen van salpeterzuur, en het zwarte kristallijne lichaam is daarin oplosbaar met *bruine* kleur. Er is *tijd* noodig tot vermengen van het vrije salpeterzuur gevormd met het andere deel der oplossing, dat minder of geen vrij salpeterzuur bevat, en verdund salpeterzuur (tot een zekeren graad) lost het lichaam niet op. Ook kan een sterkere oplossing betrekkelijk meer vrij salpeterzuur doen ontstaan in de eenheid van volumen en tijd.

Uit het bovenstaande leidt men tevens af, dat het zwarte kristallijne lichaam aanvangt met te ontstaan in *oplossing* met bruine kleur, om zich eerst daarna af te zetten; en dat wel in iedere oplossing, waarin het wordt gevormd.

*Over de ontleding van het zwarte lichaam, van zijn ontstaan af.* Men besluit er daarenboven uit, dat er gedeeltelijke ontleding van het lichaam in *oplossing* zal plaats hebben, want de bruine oplos-

sing met een salpeterzuur van 30 en zelfs van 70 p.c. wordt ontleed, al is dit dan ook langzaam, bij gewone temperatuur (waarvan men zich met de proef heeft overtuigd; ook wat dit onderwerp betreft, blijft de litteratuur in gebreke). Op 't oogenblik dus, dat het zwarte lichaam kristalliseert, zou een mengsel kunnen afgezet worden of een meer of min chemische verbinding eener veranderlijke samenstelling. Voegen we hieraan toe, dat het lichaam in oplossing in salpeterzuur, zich langzamerhand moet afzetten als gevolg van diffusie met de oorspronkelijke oplossing, of deze na een weinig te zijn veranderd, dus, of van salpeterzuur is ontbloot, of daarvan betrekkelijk weinig bevat; want het zwarte lichaam is *onoplosbaar* in betrekkelijk verdund salpeterzuur. In den grond ontmoet men hier hetzelfde, als in het geval, dat water wordt gevoegd bij de bruine oplossing van het zwarte lichaam in salpeterzuur, onder welke omstandigheden het wordt afgezet. Werkt men nu met oplossingen van verschillende sterkte, dan is het duidelijk, dat de omstandigheden van ontstaan niet juist dezelfde zijn, en dat dit van invloed zou kunnen zijn op de samenstelling van het zwarte lichaam.

---

#### Over de zelfontleding van het zwarte kristallijne lichaam.

Het lichaam is zoo snel mogelijk gewasschen (A), of lang in aanraking gebleven met water (B). De oplossing is geneutraliseerd (*b*) of niet geneutraliseerd (*a*) met koolzuur zilver. In de volgende tabellen is onder *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i* en *j*, achtereenvolgens gegeven het nommer der bereiding; de concentratie; de datum der bereiding; de datum der eerste weging en volgende wegingen; het gewicht der stof, gedaan op een horlogeglas onder een exsiccator (met zwavelzuur en natrium), en gewogen tusschen twee op elkander geslepen horlogeglazen; het verlies in gewicht als gevolg eener zelfontleding, en aanvankelijk van eenig water; het gewicht der stof na te zijn overgebracht in een glazen buisje (met glazen stop), geplaatst onder een gewonen exsiccator; het verlies in gewicht der stof in dit buisje; en dit verlies berekend op 1 gr. stof in 7 dagen.

Nemen we duidelijkshalve een voorbeeld in N<sup>o</sup>. 14. De concentratie is die van 1000 gr. (1 kilogr.) zilvernitraat in 1 liter der oplossing. De bereiding geschiedde 29 Mei, de eerste weging 30 Mei, zijnde 2,378 gr. stof. Op 31 Mei had een verlies plaats in

gewicht van 0,0001 gr., enz.. Op 12 Juni werd de stof overgebracht in een glazen buisje, waarna er van stof overbleef 2,37 gr.. Op 22 Juni werd een verlies (het stopje sluit niet volkomen) waargenomen van 0,0039 gr. (enz.); zijnde berekend op 1 gr. stof en 7 dagen 0,0012 gr. (enz.).

Mogelijk is de temperatuur van invloed, maar deze werd tot nog toe niet waargenomen. Van tijd tot tijd werd wel eens stof uit het buisje genomen voor analyse.

*A. a.*

<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
N <sup>o</sup> . 14	1000 gr.	29 Mei	30 Mei	2,378 gr.	—	—	—
			31 "		— 0,0001 gr.	—	—
			1 Juni		— 0,0001 "	—	—
			4 "		— 0,0004 "	—	—
			5 "		— 0,0002 "	—	—
			7 "		— 0,0001 "	—	—
			10 "		— 0,0009 "	—	—
			12 "	2,37 "	— 0,0014 "	—	—
			22 "		—	— 0,0039 gr.	— 0,0012 gr.
			2 Juli		—	— 0,0035 "	— 0,0026 "
N <sup>o</sup> . 15	900 gr.	5 Juni	5 Juni	1,597 gr.	—	—	—
			6 "		— 0,0082 gr.	—	—
			7 "		+ 0,0001 "	—	—
			10 "		— 0,0001 "	—	—
			12 "	1,59 "	— 0,0011 "	—	—
			22 "		—	— 0,0014 gr.	— 0,0006 gr.
			2 Juli			— 0,0056 "	— 0,0025 "
			10 "			— 0,0056 "	— 0,0031 "
N <sup>o</sup> . 16	800 gr.	8 Juni	8 Juni	2,54 gr.	—	—	—
			10 "		— 0,0041 gr.	—	—
			11 "		— 0,0006 "	—	—
			12 "		— 0,0002 "	—	—
			15 "		+ 0,0003 "	—	—
			20 "	2,54 "	—	—	—
			29 "		—	— 0,0007 gr.	— 0,0002 gr.
			6 Juli		—	— 0,0013 "	— 0,0005 "
N <sup>o</sup> . 17	700 gr.	13 Juni	13 Juni	3,109 gr.	—	—	—
			14 "		— 0,00005 gr.	—	—
			15 "		— 0,00005 "	—	—
			17 "		— 0,0001 "	—	—
			18 "		0	—	—
			22 "	3,109 "	—	—	—
			1 Juli		—	— 0,0004 gr.	— 0,0001 gr.
			10 "		—	— 0,0008 "	— 0,0002 "



<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
N°. 18	600 gr.	18 Juni	18 Juni	3,556 gr.	—	—	—
			19 "		— 0,0001 gr.	—	—
			20 "		+ 0,0002 "	—	—
			22 "	3,556 "	—	—	—
			1 Juli		—	— 0,0006 gr.	— 0,0001 gr.
			10 "		—	— 0,0009 "	— 0,0002 "
N°. 13	500 gr.	21 Mei	21 Mei	4,122 gr.	—	—	—
			22 "		— 0,0037 gr.	—	—
			24 "		— 0,0002 "	—	—
			25 "		+ 0,0004 "	—	—
			14 Juni	3,122 "	—	—	—
			24 "		—	— 0,0009 gr.	— 0,0002 gr.
			2 Juli		—	— 0,0011 "	— 0,0003 "
N°. 19	500 gr.	21 Juni	21 Juni	3,747 gr.	—	—	—
			22 "		0	—	—
			24 "		+ 0,0002 gr.	—	—
			2 Juli		—	0	0
			10 "		—	— 0,0006 gr.	— 0,0001 gr.
N°. 20	400 gr.	26 Juni	26 Juni	3,147 gr.	—	—	—
			27 "		— 0,0002 gr.	—	—
			28 "		0	—	—
			29 "	3,147 "	0	—	—
			6 Juli		—	— 0,0005 gr.	— 0,0002 gr.
N°. 12	300 gr.	16 Mei	16 Mei	3,133 gr.	—	—	—
			17 "		— 0,0002 gr.	—	—
			18 "		— 0,0001 "	—	—
			20 "		+ 0,0001 "	—	—
			13 Juni	3,133 "	—	—	—
			24 "		—	— 0,0003 gr.	— 0,0001 gr.
			2 Juli		—	— 0,0008 "	— 0,0002 "

*B. a.*

N°. 1	170 gr.	2 Maart	11 Maart	0,698 gr.	—	—	—
			12 "		— 0,0001 gr.	—	—
			13 "		0	—	—
			14 "		— 0,0001 "	—	—
			15 "		+ 0,0002 "	—	—
			16 "		0	—	—
			18 "		+ 0,0003 "	—	—
			13 Juni	0,349 "	—	—	—
			24 "		—	— 0,0007 gr.	— 0,0013 gr.
			1 Juli		—	— 0,0006 "	— 0,0017 "



*A. b.*

<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
N°. 11	300 gr.	4 Mei	6 Mei	3,707 gr.	—	—	—
			7 "		— 0,0002 gr.	—	—
			8 "		0	—	—
			14 Juni	2,827 "	—	—	—
			24 "		—	— 0,0025 gr.	— 0,0006 gr.
			2 Juli		—	— 0,0019 "	— 0,0006 "
N°. 8	300 gr.	1 Mei	1 Mei	0,882 gr.	—	—	—
			2 "		— 0,0003 gr.	—	—
			3 "		+ 0,0001 "	—	—
			20 Juni	0,593 "	—	—	—
			29 "		—	— 0,0003 gr.	— 0,0004 gr.
			6 Juli		—	— 0,0005 "	— 0,0008 "
N°. 9	300 gr.	2 Mei	2 Mei	1,692 gr.	—	—	—
			3 "		+ 0,0002 gr.	—	—
			4 "		— 0,0003 "	—	—
			6 "		+ 0,0003 "	—	—
			20 Juni	1,692 "	—	—	—
			29 "		—	— 0,0004 gr.	— 0,0002 gr.
N°. 10	300 gr.	2 Mei	3 Mei	1,727 gr.	—	—	—
			4 "		— 0,0003 gr.	—	—
			6 "		+ 0,0003 "	—	—
			4 Juni	1,727 "	—	—	—
			14 "		—	+ 0,0004 gr.	0
			24 "		—	— 0,0004 "	— 0,0002 gr.
N°. 6	250 gr.	18 April	18 April	1,312 gr.	—	—	—
			idem.		— 0,0203 gr.	—	—
			19 "		+ 0,0002 "	—	—
			20 "		— 0,0002 "	—	—
			26 "		+ 0,0005 "	—	—
			4 Juni	1,312 "	—	—	—
			14 "		—	+ 0,0001 gr.	0
			24 "		—	— 0,0005 "	— 0,0003 gr.
			1 Juli		—	— 0,0051 "	— 0,0008 "
			10 "		—	— 0,0021 "	— 0,0011 "

<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
N°. 7	250 gr.	18 April	18 April	1,06 gr.	—	—	—
			19 "		— 0,0002 gr.	—	—
			20 "		0	—	—
			26 "		+ 0,0004 "	—	—
			29 "	1,06 "	—	—	—
			4 Juni		—	0	0
			14 "		—	0	0
			24 "		—	— 0,0003 gr.	— 0,0002 gr.
			2 Juli		—	— 0 0006 "	— 0,0004 "
			10 "		—	— 0,0005 "	— 0,0004 "
N°. 5	180 gr.	2 April	2 April	0,681 gr.	—	—	—
			3 "		+ 0,0003 gr.	—	—
			4 "		— 0,0001 "	—	—
			20 Juni	0,377 "	—	—	—
			29 "		—	— 0,0016 gr.	— 0,0033 gr.
			6 Juli		—	— 0,0008 "	— 0,0021 "

*B. b.*

N°. 2	170 gr.	5 Maart	14 Maart	1,226 gr.	—	—	—
			15 "		+ 0,00005 gr.	—	—
			16 "		+ 0,00025 "	—	—
			18 "		0	—	—
			20 "		+ 0,0004 "	—	—
			15 Juni	0,634 "	—	—	—
			24 "		—	— 0,001 gr.	— 0,0012 gr.
			1 Juli		—	— 0,0007 "	— 0,0011 "
N°. 3	150 gr.	8 Maart	16 Maart	2,25 gr.	—	—	—
			18 "		— 0,00005 gr.	—	—
			20 "		+ 0,0003 "	—	—
			15 Juni	1,127 "	—	—	—
			24 "		—	— 0,0023 gr.	— 0,0016 gr.
			1 Juli		—	— 0,0023 "	— 0,002 "

*Besluit betreffende de reeksen A. a. en B. a.* Deze reeksen van proeven maakt het meer of minder waarschijnlijk, dat er voor de ontledingssnelheid van het zwarte lichaam grenzen zijn, aangegeven door de concentratie, zijnde ongeveer die van 500 en 300 gr.; (zooals het schijnt, tevens eenigermate het geval met betrekking tot de samenstelling, die genoegzaam dezelfde zou zijn tusschen zekere concentraties). B. v. N°. 13 en N°. 19, beide gemaakt met een concentratie van 500 gr., geven een bevredigende overeenkomst.

Eenige uitkomsten zouden kunnen doen veronderstellen, dat de ontledingssnelheid toenemende is, maar men zou nog den invloed moeten kennen van een verschil in temperatuur.

Merken we nog op, dat in de eerste phase der proef, wat water aanwezig is, dat moet verdampen.

*De reeksen A. b. en B. b.* De uitkomst schijnt zoo ongeveer dezelfde te zijn. Neutralisatie komt voor, weinig invloed uit te oefenen. Er valt genoegzame overeenkomst op te merken bij N°. 8, N°. 9, N°. 10 en N°. 11; tusschen N°. 9 en N°. 10 is deze opmerkingswaardig groot, maar er werd ook denzelfden dag gewerkt en met dezelfde oplossing. In N°. 11 werd geneutraliseerd met koolzuur zilver, gedaan in het glazen schaalkje (zie vroeger); de invloed er van is eerder in tegenovergestelden zin, als mocht worden verwacht.

De ontledingssnelheid van het zwarte lichaam bij gewone temperatuur schijnt wel afhankelijk te zijn van zekere omstandigheden, waaronder de bereiding geschiedt. Zij schijnt afhankelijk te zijn van de hoeveelheid en verhouding van *bijmengselen* van de oorspronkelijke oplossing (water, salpeterzuur, zilvernitraat; alle in vrijen staat).

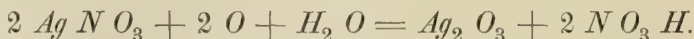
*Het zwarte lichaam tegenover salpeterzuur.* Het was reeds bekend, dat het oplosbaar is in salpeterzuur met *bruine* kleur. Het salpeterzuur moet evenwel een zekere sterkte hebben, om het lichaam te kunnen oplossen; in zeer verdund zuur is het onoplosbaar. Een salpeterzuur van 30 p.c. doet dit nog (en hiermede is zeker wel de grens niet aangegeven). De bruine oplossing wordt evenwel langzamerhand ontleed onder vrijkomen van zuurstof, en de oplossing wordt ontkleurd onder afzetten van zilvernitraat. Hetzelfde is het geval met een salpeterzuur van 70 p.c. (zie pag. 28). Deze proeven moeten worden vervolgd.

*Vorming en ontleding van het zwarte kristallijne lichaam.* Welke moleculair-formule ook wordt toegekend aan het zwarte kristallijne lichaam, daaromtrent is men het eens, dat dit lichaam onder zekere omstandigheden *zuurstof* doet vrijkomen. Vorming en ontleding van een lichaam is in den grond hetzelfde in tegenovergestelden zin, en er zal dus zuurstof moeten worden vastgelegd bij het ontstaan langs electrolytischen weg. Om andermaal te worden *zilvernitraat*, is salpeterzuur noodig, daar salpeterzuur *vrij* komt bij de vorming

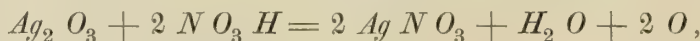
van het zwarte lichaam. Verondersteld, dat de formule der zwarte stof is  $2 Ag_2 O_3$ ,  $Ag NO_3$ . Door hieraan  $Ag NO_3$  te ontnemen, houdt men over  $2 Ag_2 O_3$ , dat aldus kan worden *ontleed*:



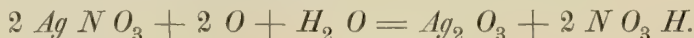
Bij de *vorming* door zilvernitraat en electrolytische zuurstof heeft men:



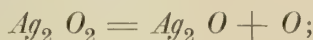
Zooals blijkt, is ter vorming *water* noodig, welk water het zilverzout in de gelegenheid stelt, om salpeterzuur te doen vrijkomen onder opname van zuurstof. Als vertegenwoordiger van het zwarte lichaam werd slechts  $Ag_2 O_3$  genomen. Het is dit salpeterzuur, dat de oplossing *zuur* maakt, en, dat in aanmerkelijke hoeveelheid aanwezig, de *vorming* van het zwarte lichaam moet tegengaan, en de *ontleding* er van integendeel bevorderen. Want, in geval het lichaam wordt ontleed met salpeterzuur, dan ontstaat het uitgangproduct, namelijk zilvernitraat, en de *aanvangstoestand* is ingetreden:



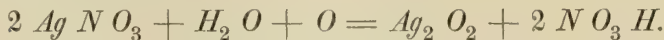
zooals men had bij *vorming* van het zwarte lichaam:



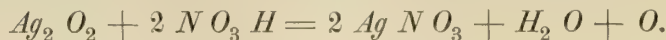
Neemt men aan met MAHLA en FISCHER de aanwezigheid van  $Ag_2 O_2$  in de zwarte stof (in plaats van  $Ag_2 O_3$ ), b. v. in den vorm van  $2 Ag_2 O_2 \cdot Ag NO_3 \cdot H_2 O$ , dan heeft men  $Ag NO_3$  (en  $H_2 O$ ) voor 't oogenblik daarlatende, voor de *ontleding*:



en voor de *vorming*:



Om weder te komen tot den *aanvangstoestand*, heeft men:



In den grond is alles hetzelfde, uitgenomen de hoeveelheid vrijkomende zuurstof, en wat daarvan afhangt; en dat geldt tevens, in geval men uitgaat van de formule in deze Verhandeling gegeven.

*Verhouding tusschen het zilver afgezet aan de kathode, en het zwarte lichaam der anode.* Na een voorbereidende oefening met den zilver-voltameter (en ter contrôle, met twee dezer, met elkander vereenigd) werd het zilver quantitatief bepaald, en het zwarte lichaam,



beide aan de electoden afgezet. In de volgende opgave is de hoeveelheid van het zwarte lichaam berekend op 100 gew.d. van het zilver. De oplossing werd niet geneutraliseerd en geneutraliseerd, in verschillende proeven. Iedere proef duurde 90 minuten; de thermo-electrische stroom is, zooals bekend, maar ongeveer constant (en zoo ook de temperatuur der omgeving). In N°. 8, N°. 9 en N°. 10 is het zilver gezamenlijk gewogen na de drie proeven, en hiervan het derde gedeelte genomen, en het gemiddelde der *som* van het zwarte lichaam in ieder dezer drie proeven bepaald.

Er werd gebruik gemaakt van de groote platinaschaal (met een inhoud van ongeveer 1 liter). In N°. 11 werd de oplossing geneutraliseerd met koolzuur zilver, gedaan in het kleine glazen schaalte, geplaatst te midden der oplossing (zie vroeger).

Er is gegeven onder:

- a* het nummer der bereiding;
- b* de concentratie der oplossing;
- c* de hoeveelheid van het zwarte lichaam;
- d* die van het zilver;
- e* de verhouding van het zilver en het zwarte lichaam, berekend op 100 gew.d. zilver.

#### Zonder neutralisatie der oplossing.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
N°. 14	1000 gr.	3,1379 gr.	4,292 gr.	73,11 gew d.
" 15	900 "	3,1731 "	4,38 "	72,45 "
" 16	800 "	3,4688 "	4,44 "	78,13 "
" 17	700 "	3,8359 "	4,6 "	83,39 "
" 18	600 "	4,2098 "	4,94 "	85,22 "
" 13	500 "	4,5020 "	5,26 "	85,60 "
" 19	500 "	4,0971 "	4,795 "	85,45 "
" 20	400 "	3,6430 "	4,255 "	85,62 "
" 12	300 "	3,4647 "	4,08 "	84,90 "

#### Met neutralisatie der oplossing.

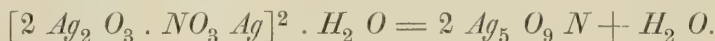
N°. 11	300 gr.	2,1288 gr.	2,59 gr.	82,19 gew.d.
" 8	300 " }	Gemiddeld:		
" 9	300 " }	1,7788 gr.	2,16 "	82,48 "
" 10	300 " }			



Proeven met oplossingen ter concentratie beneden 300 gr. moeten nog met de *grootte* platinaschaal worden gedaan.

Op te merken valt, dat in de proeven met grootte concentratie een zekere hoeveelheid van het zwarte lichaam verloren gaat, zooals wel volgt uit de bruine kleur, die zich hier en daar vertoont in de oplossing (zie vroeger). Het neutraliseren der oplossing schijnt eenigen invloed te hebben op de uitkomst.

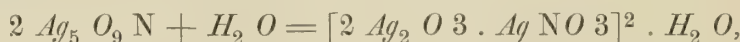
*Over de hoeveelheid van het zwarte lichaam, berekend op 100 gew.d. van het zilver, beide aan de electoden afgescheiden, naar eenige formules.* Uitgaande van de formule van BERTHELOT heeft men:



Men kan aannemen, dat op 2 *Ag* aan de kathode, vrijkomt aan de anode 1 *O* (of wil men aan de kathode 2 *H*, gevende 2 *Ag*; en aan de anode 1 *O*). Ter vorming van  $\text{Ag}_5 \text{ O}_9 \text{ N}$  wordt vereischt (zie vroeger):



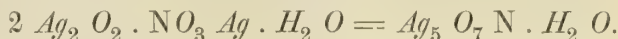
een hoeveelheid van 4 *O* werpt zich namelijk op 5 mol. zilvernitraat (terwijl 4 mol. salpeterzuur daarbij vrijkomen). Ter vorming van  $\text{Ag}_5 \text{ O}_9 \text{ N}$  worden dus vereischt  $4 \times 2 \text{ Ag} = 8 \text{ Ag}$  afzetsel op de kathode, en dus voor



worden vereischt 16 *Ag*. Voor 1 mol. van het zwarte lichaam afgezet aan de anode, zijn dus 8 mol. zilver noodig ( $8 \text{ Ag}_2 = 16 \text{ Ag}$ ) aan de kathode. Nu heeft men:

$16 \text{ Ag} = 16 \times 107,66 = 1722,56$  gew.d. zilver en  $[2 \text{ Ag}_2 \text{ O}_3 \cdot \text{Ag NO}_3]^2 \cdot \text{H}_2 \text{ O} = 1409,86$  gew.d. van het zwarte lichaam. Berekend op 100 gew.d. van het zilver op de katode afgescheiden, geeft dit *volgens deze formule* 81,8 gew.d. voor het zwarte lichaam. Volgens de Tabel is deze hoeveelheid dan eens overschreden, dan weder beneden die door de theorie vereischt, uitgaande namelijk van deze formule.

Nemen we thans de formule van FISCHER:



Wat betreft de vorming, zoo heeft men de vergelijking:



Voor 2 *O* heeft men  $2 \times 2 \text{ Ag} = 4 \text{ Ag}$ , en daar 2 *O* kunnen

doen ontstaan 1 mol. van de zwarte verbinding (volgens deze formule), heeft men de verhouding:

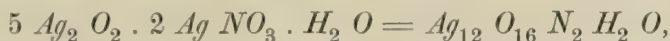
$4 \text{ Ag}$  en  $\text{Ag}_5 \text{O}_7 \text{N} \cdot \text{H}_2 \text{O}$ ; in gewicht:

$4 \text{ Ag} = 4 \times 107,66 = 430,64 \text{ gew.d.}$  en

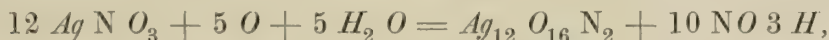
$\text{Ag}_5 \text{O}_7 \text{N} \cdot \text{H}_2 \text{O} = 681,99 \text{ gew.d.}$ ,

dat, berekend op 100 gew.d. zilver afgescheiden aan de kathode, voor het zwarte lichaam aan de anode bedraagt 158,3 gew.d., dus wel een groot verschil met hetgeen de Tabel ons geeft. De waarde naar de formule van BERTHELOT verschilt betrekkelijk veel minder. Maar daaruit volgt nog geenszins, dat de formule van FISCHER moet komen te vervallen, want er zou nog rekening te houden zijn met de zuurstof, die vrijkomt bij de anode.

De formule van MAHLA levert zoo ongeveer dezelfde uitkomst op als die van FISCHER, want men heeft:



en de vergelijking voor de vorming is deze:



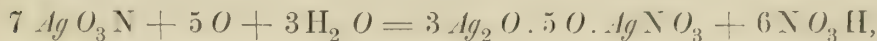
voor welke 5 O men aan zilver heeft:  $5 \times 2 \text{ Ag} = 10 \text{ Ag}$ ; en daar 5 O in staat zijn, om 1 mol. te maken van het zwarte lichaam (volgens deze laatste formule), wordt men geleid tot deze verhouding in gewicht:

$10 \text{ Ag} = 10 \times 107,66 = 1076,6 \text{ gew.d.}$  zilver tegen

$\text{Ag}_{12} \text{O}_{16} \text{N}_2 \cdot \text{H}_2 \text{O} = 1593,26 \text{ gew.d.}$  van het zwarte lichaam, dat geeft op 100 gew.d. zilver aan de kathode een hoeveelheid van 147,9 gew.d. van het zwarte lichaam aan de anode, hetgeen betrekkelijk weinig verschilt van de hoeveelheid vereischt door de formule van FISCHER.

En eindelijk, wat betreft de formule in deze Verhandeling gegeven voor het zwarte lichaam (gemaakt met betrekkelijk zeer sterke oplossingen), namelijk die van:

$3 \text{ Ag}_2 \text{O} \cdot 5 \text{O} \cdot \text{AgNO}_3$ . zoo leidt deze tot de vormingsvergelijking:



zoodat de gewichts-verhouding deze is:

$5 \times 2 \text{ Ag} = 10 \text{ Ag} = 10 \times 107,66 = 1076,6 \text{ gew.d.}$  zilver, tegen:

$3 \text{ Ag}_2 \text{O} \cdot 5 \text{O} \cdot \text{AgNO}_3 = 943,19 \text{ gew.d.}$  van het zwarte lichaam;

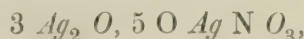
of berekend op 100 gew.d. zilver op de katode, overeenstemt met 87,6 gew.d. op de anode, altijd naar de laatste formule. Als maxi-

mum nu is gevonden 85,6 gew.d.. Maar men kan gerust zeggen, dat de methode leiden moet tot een te laag gehalte, met hoeveel zorg ook worde gewerkt.

*Nogmaals over de zuurstof, die vrijkomt aan de anode* (zie vroeger pag. 26, 27 en 28). Merken we in de eerste plaats op, dat men geen ozon heeft ontdekt bij het werken met oplossingen van groote concentratie; aan dit punt is trouwens nog niet de noodige aandacht geschonken. Er komt zuurstof vrij, genoegzaam van het oogenblik af, dat de reactie intreedt; en zelfs als de stroom is onderbroken, ziet men een menigte uiterst kleine gasbellen. Onder de bereiding kunnen zich vrij groote gasbellen voordoen nu en dan. Voor 't oogenblik mag wel worden aangenomen (zie vroeger), dat deze zuurstof een *ontledingsproduct* is van het zwarte lichaam, dus is van secundaire natuur. De hoeveelheid zuurstof vrijkomende aan de anode, is nog niet bepaald; dit is nog te doen overgebleven, en tegelijkertijd moet dan het zilver en zwarte lichaam worden bepaald. Maar zoolang dit nog niet is verricht, kan men zich moeilijk onthouden, om zich eenig denkbeeld te vormen van de reactie, in verband met die vrijkomende zuurstof. En nu stelt men zich voor, dat, wanneer van het zwarte lichaam is gemaakt *in (bruine) oplossing*, een deel hiervan wordt ontleed, maar dat de electrolytische zuurstof voortdurend het ontlede gedeelte herstelt, *terwijl het zwarte lichaam, in vasten staat, door de geheele massa de rol vervult van anode* (in plaats van een platinadraad, zou men dan ook even goed het lichaam van RITTER kunnen gebruiken als anode). Men ziet dan ook de kristallen zich vergrooten, die betrekkelijk groote dimensies kunnen aannemen; en zelfs, als een kleine hoeveelheid der kristallen aan de oppervlakte mocht ontleed zijn, zou dit in de gemelde omstandigheden gemakkelijk zijn te herstellen. Ook bezitten de kristallen een voortreffelijken glans, zelfs waargenomen met loupe of microscoop. In geval de vrijkomende zuurstof voor een goed deel primaire zuurstof ware, zou die in hoeveelheid moeten verminderen bij toename der concentratie, maar op 't oog geschat, is dit hoegenaamd niet het geval; en toch is men gegaan tot 1000 gr. zilvernitraat (zegge: 1 kilogr.) in een liter.

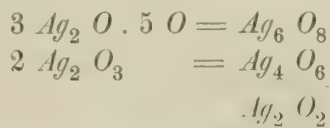
Het is duidelijk, dat de secundaire zuurstof niet opnieuw van het zwarte lichaam kan doen ontstaan; de hoeveelheid hiervan kan wel minder, maar niet meer bedragen dan eenige formule vordert.

*Over de verhoudings-, molecuulair- en structuur-formule van de zwarte kristallijne verbinding.* Tot dusverre werd slechts een empirische formule gegeven, te weten:

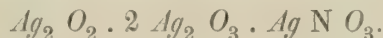


die een theoretische uitdrukking voorstelt van de samenstelling, zonder meer of min de structuur te willen uitdrukken. De molecuulair-formule is tot heden niet te bepalen langs directen weg. Het is evenwel altijd mogelijk, dat men later het mol.-gew. leert bepalen door uit te gaan van het zwarte lichaam opgelost in zuiver salpeterzuur.

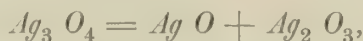
Uitgaande van de formule  $3 \text{ Ag}_2 \text{ O} . 5 \text{ O} . \text{ Ag N O}_3$ , en deze beschouwende als molecuulair-formule, laten zich daarop vele structuur-formules samenstellen. Neemt men b.v. met BERTHELOT de aanwezigheid aan van de rest  $\text{Ag}_2 \text{ O}_3$ , dan heeft men:



en zou bijgevolg het zwarte lichaam beschouwd kunnen worden als te zijn:

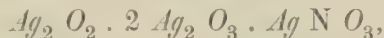


De som van  $\text{Ag}_2 \text{ O}_2$  en  $2 \text{ Ag}_2 \text{ O}_3$ , zijnde  $\text{Ag}_6 \text{ O}_8$ , zou ook beschouwd kunnen worden als:  $\text{Ag}_6 \text{ O}_8 = 2 \text{ Ag}_3 \text{ O}_4$ . Evenzoo kan  $\text{Ag}_3 \text{ O}_4$  aldus worden ontleed:

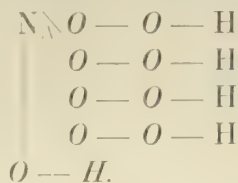


dat trouwens doet denken aan een tweewaardig metaal, terwijl zilver éénwaardig zou wezen.

Om terug te komen op de formule:



zoo kan deze beschouwd worden als een moleculaire verbinding van  $\text{Ag}_2 \text{ O}_2$  en  $2 \text{ Ag}_2 \text{ O}_3 . \text{ Ag N O}_3 = \text{N O}_9 \text{ Ag}_5$ , en dit laatste als het zilverzout van een zuur der formule:  $\text{N O}_4 . 5 \text{ O H}$ , waarvan het anhydride zou zijn:  $2 (\text{N O}_4 . 5 \text{ O H}) = \text{N}_2 \text{ O}_8 . 10 \text{ O H}$ , en  $\text{N}_2 \text{ O}_8 . 10 \text{ O H} - 5 \text{ H}_2 \text{ O} = \text{N}_2 \text{ O}_{13} = (\text{N O}_6)_2 \text{ O}$ . In affiniteiten zou dit zuur aldus terug gegeven kunnen worden:



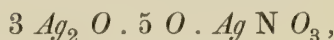


Om gemelde verbinding te beschouwen als atomistisch, zou men het atoom stikstof moeten maken:  $N^{VII}$ , dat wel wat al te vermetel kan geacht worden te zijn ( $2 Ag O \equiv N \equiv 4 O_2 Ag$ ).

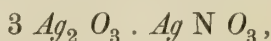
Merkwaardig is, dat de zwarte verbinding ontstaat onder het doen vrij komen van salpeterzuur in een betrekkelijk verbazende hoeveelheid; en het is duidelijk, dat een zuur van de formule  $N O_4 \cdot 5 O H$  dit wellicht zou vermogen te doen.

BERTHELOT <sup>1)</sup> verkreeg door effluve-electriciteit een verbinding van stikstof, „oversalpeterzuur” geheeten, van de formule  $N_2 O_6$ .

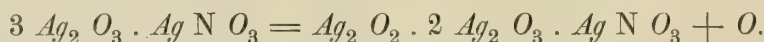
Terugkomende op de formule aanvankelijk gegeven:



zou men kunnen veronderstellen, dat het zwarte lichaam eigenlijk heeft tot formule ( $3 Ag_2 O \cdot 6 O \cdot Ag N O_3$ ):



maar, dat de evenwichtstoestand bij gewone temperatuur zich daartegen verzet, en diengevolge een deel der zuurstof doet vrijkomen van de verbinding (slechts voor een oneindig kleinen tijd bestaanbaar):



Ook zou mogelijk kunnen zijn, dat de verbinding oorspronkelijk is:  $2 Ag_2 O_3 \cdot Ag N O_3$ , maar ten deele wordt ontleed ( $2 Ag_2 O_3 \cdot Ag N O_3 = 2 Ag_2 O_2 + 2 O + Ag N O_3$ ), zoodat ten slotte een mengsel zou ontstaan van  $2 Ag_2 O_2$  met  $2 Ag_2 O_3 \cdot Ag N O_3$ . Maar de analyse geeft tot nog toe de verhouding  $3 Ag_2 O$  en  $Ag N O_3$ , en het denkbeeld van mengsel moet alzoo worden losgelaten. Het is in ieder geval nuttig, om te weten, welke proc. sam. deze formules vereischen:

	$2 Ag_2 O_3 \cdot Ag N O_3$	$3 Ag_2 O_3 \cdot Ag N O_3$
Zilver .....	77,34	78,5
Stikstof .....	2,0	1,46
Vrijkomende zuurstof ..	9,17	9,9

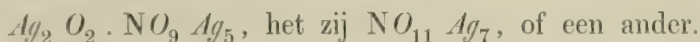
De analytische gegevens tot nog toe verkregen, laten zich daarmede niet in overeenstemming brengen.

Ten slotte zou kunnen verondersteld worden, dat een deel van het zilveroxyde is dat van  $Ag_2 O$ . In werkelijkheid is dit zoo, als het zwarte lichaam ten deele is gedissociëerd, gelijk steeds het geval is (evenwel

<sup>1)</sup> Dict. de Chim. de Wurtz. Suppl. II, p. 402.



versch bereid, in uiterst geringe mate). Maar bij den aanvang der vorming, mag worden aangenomen, dat het zwarte lichaam een chemisch individu is, dat (gemaakt zijnde met oplossingen van genoegzame concentratie) als integreerend deel bevat een peroxy-azotaat van zilver, het zij:



In ieder geval is het ook nog mogelijk, dat het lichaam is:

$3 Ag_2 O_2 \cdot Ag NO_5$ , of, anders gezegd, een moleculaire verbinding van  $3 Ag_2 O_2$  en het zilverzout van een zuur  $HNO_5 = NO_4 \cdot OH$  zijnde het anhydride:  $N_2 O_9 = (NO_4)_2 O$ ; of, zooals reeds gezegd,  $2 Ag_3 O_4 \cdot Ag NO_3$ , zijnde een moleculaire verbinding van  $2 Ag_3 O_4$  en  $Ag NO_3$  (zie vroeger).

In het volgende heeft men een overzicht trachten te geven van de erlangde uitkomsten, en den weg bij het onderzoek gevolgd.

1. *Methode ter bereiding.* <sup>1)</sup> Ook met 't oog op het nog steeds bestaande verschil met betrekking tot de samenstelling van het zwarte kristallijne lichaam van RITTER, en dat niettegenstaande herhaalde onderzoekingen dienaangaande van beproefde analytici, heeft men gemeend, dat de *concentratie* der oplossing van zilvernitraat wel eens een belangrijke factor zou kunnen zijn. Men heeft daarom gewerkt met oplossingen ter concentratie van 1000 gr. zilvernitraat als maximum, zonder evenwel tot dusverre het minimum te hebben bereikt (daarover zal in een volgende Mededeeling gehandeld worden); en dat wel met en zonder neutralisatie der oplossing door koolzuur zilver.

2. *Methoden ter quantitative bepaling.* <sup>2)</sup> Aangezien wellicht vele fouten zijn ingeslopen bij de bepalingen van eenige onderzoekers, als gevolg van gebrek aan de noodige contrôle, heeft men veelal iedere bepaling willen toetsen. Zoo is b.v. de stikstof naar twee methoden bepaald (zie de volgende Verhandeling), en het zilver langs vier verschillende wegen. Het zwarte lichaam is onderhevig aan ontleding bij gewone temperatuur (dat overigens niet in sterke mate het geval is), als gevolg waarvan zuurstof vrijkomt, en zoo ook bij matige verwarming, vrijkomende zuurstof genoemd (oxygène excédant); daarom werd het beschouwd als te

<sup>1)</sup> Zie deze Verhandeling pag. 5.

<sup>2)</sup> l. c. pag. 7.

zijn van overwegend belang, om als zoodanig quantitatief te bepalen *zilvernitraat*  $Ag\ N\ O_3$  en *zilveroxyde*  $Ag_2\ O$ , die terugblijven, als alle vrijkomende zuurstof is uitgetreden. Aldus kan langs zuiver empirischen weg, zonder eenige veronderstelling te wagen, de verhouding worden bepaald van  $x\ Ag_2\ O$  en  $y\ Ag\ N\ O_3$ , en dan blijft nog slechts over de vrijkomende zuurstof (wat betreft de aanwezigheid van water, zie daarover een weinig later). De procentische samenstelling is niet afdoende bij een lichaam, dat bij gewone temperatuur wordt ontleed. Genoemde verhouding kan wel berekend worden (uitgaande van de stikstof gevonden, zie deze Verhandeling), maar volstrekt niet met den vereischten graad van nauwkeurigheid.

De *vrijkomende zuurstof* is tegelijkertijd met het *water* bepaald, langs indirecten weg, en het *water direct*, zoodat de vrijkomende zuurstof indirect is genomen. En dit is met opzet gedaan, want de quantitative bepaling van vrijkomende zuurstof (en tevens die van water) kan op die wijze met zeer groote nauwkeurigheid geschieden. Hierbij is gebruik gemaakt, en met goed gevolg, van een bad van kopervijlsel (in plaats van zand, enz.).

Tevens werd bepaald in hoeveelheid het zwarte lichaam, afgezet aan de anode, en het zilver aan de kathode; aangezien die kennis geacht kan worden van belang te zijn met betrekking tot de formule van het lichaam. <sup>1)</sup> Verondersteld toch, dat alle electrolytische zuurstof werd verbruikt voor de reactie, dan zou er (*ceteris paribus*) een bepaalde verhouding moeten bestaan tusschen het zwarte lichaam en het zilver.

Welke overigens de concentratie zij der oplossing (ten minste nog met die van 1000 gr.), steeds komt zuurstof vrij aan de anode.

3. De analytische gegevens, voor zooverre betreft de uitkomsten, verkregen door te werken met oplossingen van betrekkelijk groote concentratie, leiden tot de verhoudings-formule: <sup>2)</sup>

$3\ Ag_2\ O . 5\ O . Ag\ NO_3$ , zij dit geschreven:  $2\ Ag_3\ O_4 . Ag\ NO_3$ , waarop men verscheiden structuur-formules zou kunnen bouwen (zie de Verhandeling).

4. De hoeveelheid *water* <sup>3)</sup> aanwezig (uitgaande van oplossingen van betrekkelijk groote sterkte), is zóó gering, dat dit als bijkomend bestanddeel is te beschouwen. Evenwel wenscht men op dit onderwerp nog nader terug te komen.

<sup>1)</sup> l. c. pag. 34.

<sup>2)</sup> l. c. pag. 20, 21.

<sup>3)</sup> l. c. pag. 12—17.

5 Er schijnt als grens een *maximum* te bestaan van concentratie (verondersteld constant: stroom, temperatuur, tijd, enz.), waarmede meer of min overeenstemt een *maximum* van opbrengst der zwarte verbinding. Het lichaam, onder die omstandigheden gemaakt, schijnt meer of min te hebben een *minimum* van ontledingssnelheid bij gewone temperatuur <sup>1)</sup>, bijgevolg beantwoordende aan een *maximum* van standvastigheid, wat betreft de samenstelling. Deze ontleding, bij gewone temperatuur, schijnt afhankelijk te zijn van de *hoeveelheid* en de *verhouding* van eenige bijmengselen (water, salpeterzuur, zilvernitraat; alle in vrijen staat). Over 't algemeen is deze ontleding zeer begrensd, en wellicht geheel te ontgaan. Zelfs bij 50° C. is de ontledingssnelheid veelal zeer beperkt, <sup>2)</sup> maar vangt zij in den regel aan bij 60°—80°, van zeer merkbaar te worden. Men kan de omstandigheden overigens zóó doen treffen, dat na volkomen ontleding zilver overblijft, genoegzaam in den vorm van de oorspronkelijke zwarte naalden.

6. De electrolytische proef, zooals deze is ingericht, mag gerekend worden een recht schoone proef te wezen (ook als college-proef), en in meer dan één opzicht leerrijk.

Er zullen nog onderzoekingen worden gedaan met oplossingen van minder concentratie, en de studie van het zwarte lichaam zal daarenboven in verschillende richtingen worden vervolgd.

---

<sup>1)</sup> l. c. pag. 29.

<sup>2)</sup> l. c. pag. 15, 16, 17.

*Utrecht*, 28 September 1895.

---









Over een  
minimaaloppervlak van tweevoudigen  
samenhang

DOOR

**J. C. KLUYVER.**

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

**(EERSTE SECTIE).**

Deel III. N<sup>o</sup>. 9.

**(MET 2 PLATEN.)**

AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
1896.



# Over een minimaaloppervlak van tweevoudigen samenhang

DOOR

**J. C. KLUYVER.**

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

**(EERSTE SECTIE).**

**Deel III. N<sup>o</sup>. 9.**

**(MET 2 PLATEN.)**

---

AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.

1896.





## Over een minimaaloppervlak van tweevoudigen samenhang.

Volgens DARBOUX <sup>1)</sup> is RIEMANN de eerste geweest, die een minimaaloppervlak construeerde, begrensd door twee rechte lijnige convexe veelhoeken in twee evenwijdige vlakken geplaatst <sup>2)</sup>. In 1887 is door SCHWARZ <sup>3)</sup> met groote uitvoerigheid dit vraagstuk behandeld in de onderstelling, dat de veelhoeken grond- en bovenvlak vormden van een regelmatig  $n$ -zijdig prisma. Buitendien spreekt SCHWARZ elders <sup>4)</sup> over een zeer merkwaardig geval, waarbij voor  $n = 4$  de aanwezigheid van acht nieuwe rechte lijnen op het oppervlak kan worden aangetoond, terwijl hij ten slotte er op wijst, dat men door de invoering van ééne constante meer gemakkelijk van het regelmatige, vierzijdige prisma kan opklimmen tot het rechthoekige parallelipedum met willekeurig rechthoekig grondvlak. In het volgende is gepoogd eene behandeling van dit laatste vraagstuk te geven, voor zoover dit met behulp van elliptische functies geschieden kan.

Is tusschen grond- en bovenvlak van een rechthoekig parallelipedum met de breedte  $b$ , de lengte  $l$  en de hoogte  $h$  een minimaaloppervlak  $O$  uitgespannen, dan is het in de eerste plaats duidelijk, dat  $O$  in vier onderling congruente of symmetrische stukken kan worden verdeeld. Een dezer stukken  $ACLD B E N F A$  of  $\Omega$  heeft ongeveer de gedaante, die in fig. 1 is aangegeven. Tot

<sup>1)</sup> Théorie générale des surfaces, I, blz. 427.

<sup>2)</sup> Beispiele von Flächen kleinsten Inhalts bei gegebener Begrenzung; Ges. W. 2<sup>te</sup> Aufl. blz. 445.

<sup>3)</sup> Ueber specielle zweifach zusammenhängende Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt besitzen, als alle benachbarten, von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücken; Ges. W. I, blz. 270.

<sup>4)</sup> Bestimmung einer speciellen Minimalfläche. Nachtrag; Ges. W. I, blz. 98 en 99.

coördinatenassen zijn de assen van het parallelopipedum genomen; de coördinatenvlakken zijn dan de symmetrievlakken van  $O$ . Daar zij het oppervlak loodrecht snijden, zijn de krommen van doorsnede  $CLD$ ,  $ENF$ ,  $LN$  kromtelijnen. Men merkt op, dat in de punten  $C$ ,  $D$ ,  $E$  en  $F$  deze kromtelijnen de rechtlijnige begrenzing van  $\Omega$  loodrecht ontmoeten. Deze punten zijn dus uitzonderingspunten op het oppervlak. Door elk van hen gaan niet twee, maar drie asymptotische lijnen, die met elkander hoeken van  $60^\circ$  zullen maken.

1. *De analytische voorstelling van het oppervlak  $\Omega$ .* Door eene enkele vergelijking is het oppervlak niet voor te stellen; men moet trachten de drie rechthoekige coördinaten  $x, y, z$  in twee onderling onafhankelijke parameters uit te drukken. De methode, die met dit doel gevolgd kan worden, is die der conforme afbeelding, afkomstig van RIEMANN, WEIERSTRASS en SCHWARZ, en onder anderen door DARBOUX <sup>1)</sup> uitvoerig uiteengezet.

Volgens de algemeene formules van WEIERSTRASS zijn de uitdrukkingen voor de drie coördinaten altijd te brengen in den vorm <sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} \pm \mu x &= \Re \int (1-s^2) F(s) ds, & \pm \mu y &= \Re \int i(1+s^2) F(s) ds, \\ \pm \mu z &= \Re \int 2s F(s) ds, \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

waarin  $s$  eene complexe veranderlijke,  $\mu$  een positieve proportioneelheidsfactor beteekent, en het teken  $\Re$  op de gebruikelijke wijze aanduidt, dat alleen het bestaansbare deel der integralen is bedoeld.

De vraag is de nog onbekende functie  $F(s)$  te bepalen, hetgeen geschieden kan door de onderlinge vergelijking van eenige conforme afbeeldingen van het oppervlak  $\Omega$ . De eerste afbeelding wordt verkregen door de complexe  $s$  uit te breiden op den eenheidsbol. Volgens bekende theorieën is dat zoo in te richten, dat in overeenkomstige punten op  $\Omega$  en op den bol de raakvlakken evenwijdig zijn. Derhalve zullen noodzakelijk zoowel de vlakke kromtelijnen  $CLD$ ,  $ENF$ ,  $LN$  als de rechte lijnen,  $AC$ ,  $AF$ ,  $BD$ ,  $BE$  als groote cirkels worden afgebeeld. Een boltweehoek (fig. 2) ontstaat; de punten  $A$  en  $B$  komen in de uiteinden van de verticale middellijn,  $L$  en  $N$  zijn de middens der bogen  $AB$ ,  $bg CL = bg LD$ ,  $bg NE = bg NF$ , de standhoek van den boltweehoek is recht. In alle punten is de teekening getrouw, in de uitzonderingspunten  $C$ ,  $D$ ,  $E$  en  $F$  echter worden de rechte hoeken van den rand van  $\Omega$

<sup>1)</sup> Le problème de Plateau; Th. g. d. surf., I, blz. 424.

<sup>2)</sup> Men vergelijke: SCHWARZ en DARBOUX, t. a. p., of WEIERSTRASS, Ueber die Flächen deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist, Monatsber. der Berl. Ak. 1866, blz. 616. De oorspronkelijke vorm, dien WEIERSTRASS aan deze vergelijkingen gaf, wijkt eenigszins af van de gedaante, waarin zij hier voorkomen.

door gestrekte hoeken weergegeven. De hellingshoeken van de raakvlakken aan  $\Omega$  in  $D$  en  $E$  noemen wij in het vervolg  $2\delta$  en  $2\varepsilon$ ; in fig. 2 is dienovereenkomstig  $\angle DAB = \delta$ ,  $\angle EAB = \varepsilon$ .

Van fig. 2 gaan wij door stereographische projectie uit  $A$  op het horizontale diametraalvlak over tot de tweede conforme afbeelding in het complexe  $s$ -vlak. Beziat men dit diametraalvlak van de onderzijde, dan vindt men fig. 3, eene rechten hoek  $B$ , op welks beenen de overige randpunten  $C, N, D, E, L, A$  gelegen zijn, elk met een affix, zooals die in fig. 3 is bijgevoegd.

Naast deze laatste teekening staat een derde in het vlak eener nieuwe complexe  $\sigma$ , bepaald door de vergelijking

$$d\sigma = \sqrt{2 F(s)} ds. \dots\dots\dots (2)$$

Deze afbeelding heeft de eigenaardigheid, dat alle kromtelijnen op  $\Omega$  in het  $\sigma$ -vlak zich voordoen als lijnen evenwijdig loopende met de coördinatenassen, terwijl de asymptotische lijnen van het oppervlak worden afgetekend als rechte lijnen, welke de assen onder hoeken van  $45^\circ$  snijden. Er ontstaat dus in het  $\sigma$ -vlak de zeshoek  $ACDBEF$  van fig. 4 met twee rechte hoeken in  $A$  en in  $B$ , en met hoeken van  $135^\circ$  in de overige hoekpunten.

De vergelijking van fig. 3 en fig. 4 zal nu de onbekende functie  $F(s)$  doen kennen, want het vraagstuk om fig. 3 op fig. 4 zoo af te beelden, dat de gelijknamige punten der randen samenvallen, laat eene bepaalde oplossing toe.

Immer zal ten eerste door de substitutie

$$s^2 = t$$

fig. 3 overgaan in de positieve helft van het  $t$ -vlak, waarbij de punten  $A, C, D, B, E, F$  alle op de as der bestaانبaren geraken en in volgorde de affixen

$$\infty, -\cot^2 \delta, -tg^2 \delta, 0, tg^2 \varepsilon, \cot^2 \varepsilon$$

verkrijgen, en in de tweede plaats verandert dit positieve halfvlak door de substitutie <sup>1)</sup>

$$\text{const.} \times d\sigma = dt(t + \cot^2 \delta)^{-\frac{1}{2}}(t + tg^2 \delta)^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}(t - tg^2 \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}(t - \cot^2 \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$$

op de voorgeschreven wijze in den zeshoek van fig. 4. De overeenkomst tusschen  $s$  en  $\sigma$  is dus bepaaldelijk

$$d\sigma = \frac{\sqrt{2} e^{\frac{3\pi i}{4}} ds}{\sqrt{(s^2 + \cot^2 \delta)(s^2 + tg^2 \delta)(s^2 - tg^2 \varepsilon)(s^2 - \cot^2 \varepsilon)}}.$$

<sup>1)</sup> SCHWARZ. Ueber einige Abbildungsaufgaben, Ges. W. II. blz. 65, of ook FORSYTH. Theory of Functions, blz. 538.

Aan de constante is eenvoudigheidshalve de modulus  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  gegeven, het argument moest  $-\frac{3\pi}{4}$  zijn, omdat in  $A$  (voor  $s = \infty$ ) in de richting  $FA$  de differentiaal  $ds$  bestaanbaar en positief is, terwijl uit fig. 4 blijkt, dat aldaar  $d\sigma$  het argument  $\frac{3\pi}{4}$  heeft.

Vergelijkende met (2), besluit men

$$F(s) = \frac{e^{\frac{3\pi i}{2}}}{\sqrt{(s^2 + \cot^2 \delta)(s^2 + \tan^2 \delta)(s^2 - \tan^2 \epsilon)(s^2 - \cot^2 \epsilon)}};$$

daarmede zijn de vergelijkingen (1), die het minimaaloppervlak analytisch voorstellen geheel bekend.

Terloops kan men opmerken, dat

$$F(s) = -\frac{1}{s^4} F_0(s)$$

(met  $F_0$  de aan  $F$  toegevoegde complexe functie aanduidend). Dit wijst er op, dat  $\Omega$  de meetkundige plaats is der middens van alle koorden eener bepaalde minimaalkromme. Zulke oppervlakken zijn door LIE „dubbele” minimaaloppervlakken genoemd <sup>1)</sup>.

2. *Herleiding der integralen.* De drie integralen in de vergelijkingen (1) zijn door dezelfde substitutie terug te brengen tot elliptische, echter is het in het algemeen niet doenlijk, die substitutie zoo in te richten, dat het integralen van denzelfden modulus worden. De bedoelde substitutie is

$$s^2 + \frac{1}{s^2} = \xi.$$

Tegelijkertijd voeren wij in de positieve grootheden  $\alpha$  en  $\beta$ , grooter dan de eenheid, bepaald door

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \tan^2 \delta + \cot^2 \delta, & 2\beta &= \tan^2 \epsilon + \cot^2 \epsilon, \\ \text{of} \quad \alpha - 1 &= 2 \cot^2 2\delta, & \beta - 1 &= 2 \cot^2 2\epsilon. \end{aligned} \quad (3)$$

en vinden nu achtereenvolgens

$$\begin{aligned} \frac{ds}{\sqrt{(s^2 + \cot^2 \delta) \dots (s^2 - \cot^2 \epsilon)}} &= \frac{ds}{\sqrt{(s^4 + 2s^2\alpha + 1)(s^4 - 2s^2\beta + 1)}} = \\ &= \frac{d\xi}{2s \sqrt{(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)(\xi - 2)(\xi + 2)}}, \end{aligned}$$

en daarna

<sup>1)</sup> Ueber Minimalflächen; Math. Ann. XV, blz. 346.



$$\begin{aligned}\pm \mu x &= \Re \int \frac{id\xi}{\sqrt{4(\xi+2\alpha)(\xi-2\beta)(\xi+2)}}, \\ \pm \mu y &= \Re \int \frac{d\xi}{\sqrt{4(\xi+2\alpha)(\xi-2\beta)(\xi-2)}}, \\ \pm \mu z &= \Re \int \frac{id\xi}{\sqrt{(\xi+2\alpha)(\xi-2\beta)(\xi+2)(\xi-2)}} \dots\dots(4)\end{aligned}$$

Gedaante en afmetingen van het minimaaloppervlak hangen dus af van de drie positieve constanten  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , die men in bovenstaande integralen van de eerste soort aantreft. Om die afhankelijkheid nader te onderzoeken is het geschikt de drie integralen om te keeren en  $\wp$ -functies in te voeren.

Vóór wij daartoe overgaan kan er aan herinnerd worden, dat nu in het vlak der complexe  $\xi$  al weder eene afbeelding van  $\Omega$  is ontworpen. In fig. 5 is deze geteekend; het geheele  $\xi$ -vlak is er door bedekt; toch is er een rand, namelijk de rechte lijn, as der bestaanbaren, die het punt  $N(\xi=2)$  door het oneindige heen met het punt  $L(\xi=-2)$  verbindt. Die lijn is daarbij tweemaal te doorloopen in de volgorde:  $NFACLD BEN$ .

3. *Omkeering der elliptische integralen.* Aanvangende met de eerste integraal, verstaan wij onder  $\tau_1$  eene positieve constante, onder  $e'_1, e'_2, e'_3$  de drie bestaanbare wortels eener functie  $\wp w_1$  met de perioden  $2\omega_1$  en  $2\omega_1$ , en stellen

$$\begin{aligned}\xi + 2\alpha &= \tau_1^2(e'_1 - \wp w_1), \\ \xi + 2 &= \tau_1^2(e'_2 - \wp w_1), \\ \xi - 2\beta &= \tau_1^2(e'_3 - \wp w_1),\end{aligned}$$

zoodat men heeft

$$\begin{aligned}\tau_1^2(e'_1 - e'_3) &= 2(\alpha + \beta), \\ \tau_1^2(e'_1 - e'_2) &= 2(\alpha - 1), \\ \tau_1^2(e'_2 - e'_3) &= 2(\beta + 1), \\ \pm \frac{id\xi}{\sqrt{4(\xi+2\alpha)(\xi-2\beta)(\xi+2)}} &= \frac{1}{\tau_1} dw_1,\end{aligned}$$

en

$$\pm \mu \tau_1 x = \Re w_1 + \text{const.}$$

In deze vergelijking moet het nog onbekende teeken en de waarde der integratieconstante afgeleid worden uit den van te voren aangenomen stand van het oppervlak  $\Omega$  in verband met het veld, dat men door het argument  $w_1$  laat doorloopen. Na eenig overleg en na raadpleging van fig. 5, blijkt spoedig, dat men alle voorwaarden bevredigt door aan te nemen

$$\mu \tau_1 x = -\Re w_1 + \omega_1, \dots\dots\dots(5)$$



indien men tegelijkertijd het argument  $w_1$  zich denkt binnen den rechthoek  $BDC A$  in fig. 6 met de rechthoekszijden  $BD = \omega$  en  $BA = \frac{2\omega_1'}{i}$ . In deze afbeelding worden alle rechte hoeken aan den rand van  $\Omega$  behoorlijk teruggegeven; de dubbele lijn  $FNE$  moet echter als eene begrenzende insnijding beschouwd worden. In fig. 6 zijn de affixen der verschillende punten op den rand bijgevoegd. Bij  $N$  behoort een argument  $-\omega_1' + v_1$ , hetwelk bepaald is door de vergelijking

$$\tau_1^2 (\wp v_1 - e_3') = \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \dots \dots \dots (6)$$

Achtereenvolgens stellende  $w_1 = \omega_1, 0, -\omega_1' + v_1$ , vindt men voor de halve breedte  $BD = \frac{1}{2} b$  van het grondvlak van  $O$  (fig. 1)

$$\mu \tau_1 b = 2\omega_1,$$

en voor de halve as  $MN = \rho_1$  der middendoorsnede

$$\mu \tau_1 \rho_1 = \omega_1 - v_1 \dots \dots \dots (7)$$

Op volkomen dezelfde wijze wordt de tweede integraal behandeld. Men gebruikt de functie  $(\wp w_2^1)$  met de bestaانبare wortels  $e_1'', e_2'', e_3''$  en de perioden  $2\omega_2$  en  $2\omega_2'$ , en stelt weder onder invoering eener positieve constante  $\tau_2$

$$\begin{aligned} \xi - 2\beta &= \tau_2^2 (\wp w_2 - e_1''), \\ \xi - 2 &= \tau_2^2 (\wp w_2 - e_2''), \\ \xi + 2\alpha &= \tau_2^2 (\wp w_2 - e_3''). \end{aligned}$$

Dit levert eerst

$$\begin{aligned} \tau_2^2 (e_1'' - e_3'') &= 2(\alpha + \beta), \\ \tau_2^2 (e_1'' - e_2'') &= 2(\beta - 1), \\ \tau_2^2 (e_2'' - e_3'') &= 2(\alpha + 1), \end{aligned}$$

en vervolgens

$$\pm \frac{d\xi}{\sqrt{4(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)(\xi - 2)}} = \frac{1}{\tau_2} dw_2,$$

of

$$\pm \mu \tau_2 y = \Re w_2 + \text{const.}$$

Het oppervlak  $\Omega$  verschijnt in den gewenschten stand, wanneer voor  $\mu \tau_2 y$  het minusteeken wordt geplaatst en de constante door  $-\omega_2$  wordt vervangen, zoodat men heeft

$$\mu \tau_2 y = -\Re w_2 + \omega_2 \dots \dots \dots (8)$$

<sup>1)</sup> Het zal tot geen misverstand aanleiding geven, dat hetzelfde teeken  $\wp$  gebruikt wordt tot aanwijzing van verschillende elliptische functies, daar deze door de bijvoeging van het argument  $w_1, w_2$  en later  $w$  voldoende zijn onderscheiden.

Het argument  $w_2$  moet dan beperkt worden tot den reelhoek  $BEFA$  van fig. 7 met de zijden  $BE = \omega_2$ ,  $BA = \frac{2\omega_2'}{i}$ . De dubbele lijn  $CLD$  is wederom eene insnijding, die tot de grens der figuur moet worden gerekend. De argumenten, zooals zij aan de verschillende punten van den rand van  $\Omega$  zijn toegevoegd, zijn in de figuur aangegeven. Zij worden weder met behulp van fig. 5 gemakkelijk bepaald. Op te merken is het argument  $\omega_2' + v_2$ , behoorende bij  $L$ ; het is bepaald door de vergelijking

$$\tau_2^2 (\wp v_2 - e_3'') = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \dots \dots \dots (9)$$

Voor de halve lengte  $BE = \frac{1}{2} l$  van de basis van  $O$  (fig. 1) en voor de halve as  $ML = \rho_2$  der middendoorsnede vindt men door eenvoudige substitutie

$$\begin{aligned} \mu \tau_2 l &= 2\omega_2, \\ \mu \tau_2 \rho_2 &= \omega_2 - v_2. \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

De omkeering der derde integraal berust op eenigszins ingewikkelder vergelijkingen. Van de in te voeren functie  $\wp w$  zullen  $e_1, e_2, e_3$  de bestaانبare wortels zijn,  $2\omega$  en  $2\omega'$  de perioden; onder  $v$  verstaan wij een positief imaginair argument, kleiner dan  $\omega'$ , zoodat  $i\wp'v$  positief uitvalt; ten slotte is  $\tau$  eene positieve constante. Wij kunnen nu aannemen:

$$\begin{aligned} \xi - 2\beta &= -\tau i\wp'v \times \frac{1}{\wp w - \wp v}, \\ \xi + 2\alpha &= -\tau \frac{i\wp'v}{\wp v - e_3} \times \frac{\wp w - e_3}{\wp w - \wp v}, \\ \xi + 2 &= -\tau \frac{i\wp'v}{\wp v - e_2} \times \frac{\wp w - e_2}{\wp w - \wp v}, \\ \xi - 2 &= -\tau \frac{i\wp'v}{\wp v - e_1} \times \frac{\wp w - e_1}{\wp w - \wp v}. \end{aligned}$$

Daaruit leidt men af

$$\begin{aligned} \tau^3 \wp'v &= -2i(\beta - 1)(\beta + 1)(\alpha + \beta), & \tau^2(e_1 - e_3) &= (\beta + 1)(\alpha + 1), \\ \tau^2(\wp v - e_1) &= -(\beta + 1)(\alpha + \beta), & \tau^2(e_1 - e_2) &= 2(\alpha + \beta) \\ \tau^2(\wp v - e_2) &= -(\beta - 1)(\alpha + \beta), & \tau^2(e_2 - e_3) &= (\beta - 1)(\alpha - 1), \\ \tau^2(\wp v - e_3) &= -(\beta + 1)(\beta - 1), \end{aligned}$$

$$\frac{id\xi}{\sqrt{(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)(\xi + 2)(\xi - 2)}} = \frac{dw}{\tau},$$

of  $\pm \mu \tau z = \Re w + \text{const.}$

Al spoedig blijkt, dat men

$$\mu \tau z = \Re w - \omega \dots \dots \dots (11)$$

kan nemen, mits  $w$  blijft binnen den rechthoek  $EFCD$  van fig. 8, met de zijden  $EF = 2\omega$  en  $ED = \frac{\omega'}{i}$ . Uit die figuur zijn af te lezen de argumentwaarden behoorende bij de verschillende punten op den rand van  $\Omega$ , welk oppervlak in fig. 8 geheel conform is afgebeeld met uitzondering van de punten  $A$  en  $B$ . Met behulp van fig. 8 vindt men dadelijk voor de hoogte  $AB = h$  van het minimaaloppervlak (fig. 1)

$$\mu \tau h = 2\omega.$$

De drie integralen zijn daarmede omgekeerd, echter zijn drie verschillende  $\wp$ -functies gebruikt, drie argumenten  $w_1, w_2, w$ , bij eene zelfde waarde van  $\xi$  behoorende, moeten te gelijk worden beschouwd. De verschillende wortels der  $\wp$ -functies zijn niet onafhankelijk van elkander, zij zijn allen in  $\alpha$  en  $\beta$  uitgedrukt, wat tengevolge heeft de homogene vergelijking

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{e_1' - e_2'}{e_1' - e_3'} \times \frac{e_1'' - e_2''}{e_1'' - e_3''}, \dots \dots \dots (12)$$

want beide leden zijn gelijk aan  $\frac{(\beta - 1)(\alpha - 1)}{(\beta + 1)(\alpha + 1)}$ .

Daarnaast is te plaatsen de betrekking

$$\tau_1 \sqrt{e_1' - e_3'} = \tau_2 \sqrt{e_1'' - e_3''} = \tau \sqrt{e_1 - e_2},$$

met behulp waarvan wij uit de gevonden uitkomsten afleiden

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi} \sqrt{e_1' - e_3'}}} &= \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi} \sqrt{e_1'' - e_3''}}} = \\ &= \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\frac{2\omega}{\pi} \sqrt{e_1 - e_2}}} \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

Voor latere berekeningen is het wenschelijk deze vergelijkingen ook in de notatie van JACOBI voor oogen te hebben. Dan worden gebruikt de grootheden  $K, K', E, E'$  en de toegevoegde moduli  $k = \sin \varphi$ ,  $k' = \cos \varphi$ , wier kwadraten wel door  $c$  en  $c'$  worden voorgesteld. In deze schrijfwijze worden (12) en (13) van de gedaante

$$k = \frac{k_1}{k_1} \frac{k_2'}{k_2} \dots \dots \dots (14)$$

$$\sqrt{\frac{b}{2K_1}} = \sqrt{\frac{l}{2K_2}} = \sqrt{\frac{h}{2k'K}} \dots \dots \dots (15)$$

Er moge op gewezen worden, dat doorlopend de aanwijzers 1 en 2 gebruikt zijn voor de grootheden, die op  $\wp w_1$  en op  $\wp w_2$  betrekking hebben, voor de wortels  $e_1, e_2, e_3$  echter zijn die aanwijzers door accenten vervangen. Door  $\alpha$  en  $\beta$  zijn de moduli  $k_1, k_2$  en  $k$  bepaald, men heeft

$$k_1^2 = \frac{\beta + 1}{\alpha + \beta}, \quad k_2^2 = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta}, \quad k^2 = \frac{(\beta + 1)(\alpha + 1)}{(\beta + 1)(\alpha + 1)} \dots \dots (16)$$

Men kan ten slotte nog de exponentiaalgrootheden

$$q_1 = e^{-\frac{E\omega_1'}{i\omega_1}} = e^{-\frac{\pi K_1'}{K_1}}, \text{ enz.}$$

invoeren, waardoor (15) overgaat in

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{b}{2K_1}} &= \sqrt{\frac{l}{2K_2}} = \sqrt{\frac{h}{2k'K}} \\ 1 + 2q_1^4 + 2q_1^4 + 2q_1^9 + \dots &= 1 + 2q_2 + 2q_2^4 + 2q_2^9 + \dots = \\ &= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

om tot de overtuiging te geraken, dat het in het algemeen mogelijk moet zijn om tusschen grond- en bovenvlak van een parallelipedum van gegeven afmetingen  $b, l, h$  een minimaaloppervlak te construeeren. Immers ook in (14) zou men de grootheden  $q$  kunnen invoeren, zoodat in (14) en (17) drie vergelijkingen zouden verkregen worden met de onbekenden  $q_1, q_2$  en  $q$ , die daaruit, zij het ook met groote moeite, zouden kunnen worden opgelost. En waren  $q_1, q_2, q$  eens bekend, dan waren ook de  $\wp$ -functies gevonden en het oppervlak  $\Omega$  zou door bruikbare vergelijkingen (5), (8), (11) analytisch zijn voorgesteld. Eer wij echter tot de discussie dezer vergelijkingen overgaan, zullen nog eenige andere afmetingen van het oppervlak  $\Omega$  worden berekend.

4. *Het lijnelement  $dS$  op  $\Omega$  en het oppervlakelement  $d\Omega$ .* Het lijnelement  $dS$  zal afhangen van de toegevoegde complexen  $\xi$  en  $\xi_0$ . Om het te bepalen kan men uitgaan van de algemeen geldige uitdrukking in  $s$

$$\mu^2 dS^2 = (1 + ss_0)^2 \text{ mod } {}^2F(s) ds ds_0,$$

even eenvoudig echter is de rechtstreeksche berekening uit (4)

$$\begin{aligned}\pm \mu dx &= \Re \frac{id\xi}{\sqrt{4(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)(\xi + 2)}} = \Re \frac{id\xi}{\sqrt{Q_1}}, \\ \pm \mu dy &= \Re \frac{d\xi}{\sqrt{4(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)(\xi - 2)}} = \Re \frac{d\xi}{\sqrt{Q_2}}, \\ \pm \mu dz &= \Re \frac{id\xi}{\sqrt{(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)(\xi + 2)(\xi - 2)}} = \Re \frac{id\xi}{\sqrt{Q}},\end{aligned}$$

waarbij te letten is op de identiteit

$$-\frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q} = 0.$$

Men vindt onmiddellijk uit de voorafgaande vergelijkingen

$$\mu^2 dS^2 = \frac{1}{2} d\xi d\xi_0 \left( \frac{1}{\text{mod } Q_1} + \frac{1}{\text{mod } Q_2} + \frac{1}{\text{mod } Q} \right) \dots\dots\dots (18)$$

Daarnaast plaatsen wij de uitdrukking voor het oppervlakelement  $d\Omega$ , die onmiddellijk uit (18) volgt. Noemende  $dV$  het vlaktelement in het complexe  $\xi$ -vlak, komt er

$$\mu^2 d\Omega = \frac{1}{2} dV \left( \frac{1}{\text{mod } Q_1} + \frac{1}{\text{mod } Q_2} + \frac{1}{\text{mod } Q} \right) \dots\dots\dots (19)$$

Van 18 maken wij gebruik om de lengte van de drie kromtelijnen,  $CLD$ ,  $ENF$  en  $NL$  uit fig. 1 te bepalen.

Ter berekening van  $CLD = b_1$ , beschouwen wij tegelijk met fig. 1 de conforme afbeelding op het  $\xi$ -vlak in fig. 5, en merken op dat de helft  $CL$  der bedoelde kromteliijn wordt afgebeeld door het gelijknamige stuk van de as der bestaانبaren, gerekend van het punt  $\xi = -2\alpha$  tot  $\xi = -2$ . Bij het doorloopen van dit gedeelte der as is  $\xi = \xi_0$ ,  $\text{mod } Q_1 = Q_1$ ,  $\text{mod } Q_2 = Q_2$ ,  $\text{mod } Q = -Q$ ; de vergelijking (18) geeft dus

$$\mu^2 dS^2 = \frac{1}{2} d\xi^2 \left( \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q} \right) = \frac{d\xi^2}{Q_1},$$

of 
$$\mu \tau_1 dS = \pm i dw_1.$$

Uit fig. 6 echter maakt men op, dat voor de halve kromteliijn  $CL$  het argument  $w_1$  zich rechtlijnig van  $\omega_1 - 2\omega_1'$  naar  $\omega_1 - \omega_1'$  beweegt, zoodat

$$\frac{1}{2} \mu \tau_1 b_1 = -i \int_{\omega_1 - 2\omega_1'}^{\omega_1 - \omega_1'} dw_1,$$

of 
$$\mu \tau_1 b_1 = \frac{2\omega_1'}{i} \dots\dots\dots (20)$$



Op dezelfde wijze wordt de lengte  $l_1$  der kromtelijn  $ENF$  gevonden. In fig. 5 ziet men, dat de helft  $NF$  wordt afgebeeld als de rechte lijn tusschen  $\xi = 2$  en  $\xi = 2\beta$ , de afbeelding van  $NF$  in fig. 7 is de rechte lijn, die van  $w_2 = \omega_2''$  naar  $w_2 = \omega_2 + \omega_2'$  gaat. Men heeft alzoo  $\xi = \xi_0$ ,  $\text{mod } Q_1 = -Q_1$ ,  $\text{mod } Q_2 = -Q_2$ ,  $\text{mod } Q = -Q$ ,

$$\begin{aligned}\mu^2 dS^2 &= \frac{1}{2} d\xi^2 \left( -\frac{1}{Q_1} - \frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q} \right) = -\frac{d\xi^2}{Q_2}, \\ \mu \tau_2 dS &= \frac{\pm}{\omega_2 + 2\omega_2'} i dw_2, \\ \frac{1}{2} \mu \tau_2 l_1 &= i \int_{\omega_2''}^{\omega_2 + 2\omega_2'} dw_2, \\ \mu \tau_2 l_1 &= \frac{2\omega_2'}{i} \dots \dots \dots (21)\end{aligned}$$

Ten laatste wordt nog de lengte  $h_1$  der kromtelijn  $LN$  bepaald. Thans is met fig. 5 de fig. 8 te raadplegen. Daar  $\xi$  gaat van  $\xi = -2$  tot  $\xi = +2$ , en het argument  $w$  van  $w = \omega''$  naar  $w = \omega$ , is nu  $\xi = \xi_0$ ,  $\text{mod } Q_1 = -Q_1$ ,  $\text{mod } Q_2 = Q_2$ ,  $\text{mod } Q = Q$ ,

$$\begin{aligned}\mu^2 dS^2 &= \frac{1}{2} d\xi^2 \left( -\frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} + \frac{1}{Q} \right) = \frac{d\xi^2}{Q}, \\ \mu \tau dS &= \pm i dw, \\ \mu \tau h_1 &= -i \int_{\omega''}^{\omega} dw = \frac{\omega'}{i} \dots \dots \dots (22)\end{aligned}$$

Wij zien derhalve, dat ook de drie imaginaire perioden der gebruikte  $\wp$ -functies voor het minimaaloppervlak eene eenvoudige beteekenis hebben, wat nog nader bevestigd zal worden door de uitdrukking voor het gebogen oppervlak  $\Omega$ , die wij thans gaan afleiden. Eene eenvoudige uitkomst kan verwacht worden, ingevolge eener door SCHWARZ <sup>1)</sup> bewezen stelling, waaruit blijkt, dat voor elk minimaaloppervlak het gebogen oppervlak door eene randintegraal kan worden voorgesteld.

Door integratie, uitgestrekt over het geheele  $\xi$ -vlak, wordt dadelijk uit (19) gevonden:

$$\mu^2 \Omega = \frac{1}{2} \int_{\text{mod } Q_1} \frac{dV}{Q_1} + \frac{1}{2} \int_{\text{mod } Q_2} \frac{dV}{Q_2} + \frac{1}{2} \int_{\text{mod } Q} \frac{dV}{Q}.$$

Om echter die integratie werkelijk uit te voeren, moet men van het  $\xi$ -vlak in fig. 5 overgaan tot de afbeeldingen fig. 6, 7 en 8, waarin de argumenten  $w_1$ ,  $w_2$  en  $w$  zich bewegen.

<sup>1)</sup> Ges. W. I, Anmerkungen und Zusätze, blz. 327.

Door  $d\Sigma_1$ ,  $d\Sigma_2$  en  $d\Sigma$  stellen wij voor de vlakke-elementen in die figuren, zij zijn aan  $dV$  verbonden door de betrekkingen

$$\begin{aligned} d\Sigma_1 &= dV \bmod^2 \frac{dw_1}{d\xi} = \tau_1^2 \frac{dV}{\bmod Q_1}, \\ d\Sigma_2 &= dV \bmod^2 \frac{dw_2}{d\xi} = \tau_2^2 \frac{dV}{\bmod Q_2}, \\ d &= dV \bmod^2 \frac{dw}{d\xi} = \tau^2 \frac{dV}{\bmod Q}. \end{aligned}$$

Daarom kan ook geschreven worden

$$\mu^2 \Omega = \frac{1}{2\tau_1^2} \int d\Sigma_1 + \frac{1}{2\tau_2^2} \int d\Sigma_2 + \frac{1}{2\tau^2} \int d\Sigma,$$

waarbij over de volledige figuren 6, 7 en 8 wordt geïntegreerd. Die bewerking geeft

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{\omega_1 \omega_1'}{i\tau_1^2} + \frac{\omega_2 \omega_2'}{i\tau_2^2} + \frac{\omega \omega'}{i\tau^2} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( b^2 \log \frac{1}{q_1} + l^2 \log \frac{1}{q_2} + h^2 \log \frac{1}{q} \right), \dots (23) \end{aligned}$$

of ook

$$4\Omega = bb_1 + ll_1 + 2hh_1,$$

eene uitkomst, die later gebruikt zal worden om de grootten van de verschillende minimaaloppervlakken te vergelijken, die ontstaan wanneer men twee congruente rechthoeken telkens op verschillende afstanden van elkander plaatst.

Men kan hieraan toevoegen de waarden, die de kromtestraal in eenige bijzondere punten aanneemt. Wij beschouwen dien kromtestraal  $R$  als gegeven door de formule <sup>1)</sup>

$$\mu dS^2 = 2R \bmod F(s) ds^2.$$

Daar men nu heeft

$$\bmod F(s) ds^2 = \frac{1}{4} \bmod \frac{\sqrt{(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)}}{Q} d\xi^2,$$

volgt uit de uitdrukking van het lijnelement

$$\mu R = \frac{\bmod(\xi - 2) + \bmod(\xi + 2) + 4}{4 \bmod \sqrt{(\xi + 2\alpha)(\xi - 2\beta)}} \dots \dots \dots (24)$$

Voor de punten  $A$ ,  $B$ ,  $L$  en  $N$  leidt men hieruit door de substitutie  $\xi = \infty$ ,  $-2$ ,  $+2$  af:

<sup>1)</sup> Darboux, Th. g. d. surf., I, blz. 312, formule (4).

$$\mu R_A = \mu R_B = \frac{1}{2}, \mu R_L = \frac{1}{\sqrt{(\alpha - 1)(\beta + 1)}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\delta \sin 2\varepsilon,$$

$$\mu R_N = \frac{1}{\sqrt{(\alpha + 1)(\beta - 1)}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\varepsilon \sin 2\delta.$$

In de punten  $C, E, D, F$  is de kromming nul, zooals te verwachten was. Ten laatste kan men nog op de kromteliĳn  $LN$  het punt  $P$  ( $\xi = 0$ ) vinden, waar het raakvlak met de  $X$ -as en de  $Y$ -as gelijke hoeken maakt. Voor dit punt is

$$R_P = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}},$$

waaruit men de eenvoudige betrekking afleidt

$$\frac{8}{R_P^2} = \frac{1}{R_A^2} + \frac{1}{R_N^2} + \frac{1}{R_B^2} + \frac{1}{R_L^2}.$$

5. *Voorloopig onderzoek naar de bestaanbaarheid der beschouwde minimaaloppervlakken.*

Wij denken ons twee congruente rechthoeken met de breedte  $b$  en de lengte  $l$  op verschillende afstanden  $h$  van elkander geplaatst, en stellen de vraag of in elken stand een minimaaloppervlak te construeeren is; daarbij noemen wij voorloopig minimaaloppervlak elk oppervlak met constante gemiddelde kromming nul.

Blijkbaar is het geoorloofd  $b = 1$  te stellen, en aan te nemen  $l > 1$ . De vergelijkingen (14) en (15), waar alles van afhangt, en die wij thans schrijven

$$\frac{1}{K_1} = \frac{l}{K_2} = \frac{h}{\sqrt{c'}K}, \dots\dots\dots (25)$$

$$c = \frac{c'_1 c'_2}{c_1 c_2} \text{ of } \sin \varphi = \cot \varphi_1 \cot \varphi_2, \dots\dots\dots (26)$$

leeren bij oppervlakkige beschouwing vooreerst, dat  $K_2 > K_1$  en  $\varphi_2 \geq \varphi_1$ , omdat  $l > 1$ , ten tweede, dat

$$c'_1 \leq c_2, \quad c'_2 \leq c$$

moet zijn, daar  $c$  eene echte breuk is.

Daaruit volgt evenwel, dat

$$K'_1 < K_2, \quad K'_2 < K_1$$

is, of ook

$$\frac{K'_1}{K_1} < l < \frac{K_2}{K'_2},$$

$$\varphi_1 < \varphi < \varphi_2.$$

Hoe grooter  $l$  is, des te kleiner is de ruimte, waarbinnen  $q_2'$  moet vallen, de beweeglijkheid van den hulphoek  $q_2$  wordt meer en meer beperkt. Deze hoek zal zeer weinig van  $90^\circ$  gaan verschillen; zooals uit eene hieronder medegedeelde tabel blijkt is voor  $l = 3$  reeds  $90^\circ > q_2 > 87^\circ 30'$ . Daarentegen wordt het veld van den hoek  $q_1$  met  $l$  steeds grooter, voor  $l = 3$  zal  $q_1$  reeds alle waarden tusschen  $4^\circ$  en  $90^\circ$  kunnen aannemen.

Laat echter bij gegeven  $l$  alleen  $h$  veranderen, terwijl als onafhankelijk veranderlijke naar gelang van omstandigheden  $\varphi$  of  $c = \sin^2 \varphi$  wordt genomen. Eene eerste gevolgtrekking uit (26) is dan, dat  $q_1$  en  $q_2$  beide afnemende functies zijn, want uit (25) volgt, dat deze grootheden in denzelfden zin veranderen.

Alle mogelijke gevallen nu liggen tusschen de twee grensgevallen  $\varphi = 0$  en  $\varphi = 90^\circ$ . In de eerste onderstelling volgt uit (26)  $q_1 = 90$ ,  $q_2 = 90$ ,  $K_1 = \infty$ ,  $c' = 1$ ,  $K = \frac{\pi}{2}$ , dus  $h = 0$ .

In de tweede onderstelling is  $c' = 0$ , volgens (26) is nu  $q_1 + q_2 = 90^\circ$ , maar beide hoeken verschillen van  $0^\circ$  en  $90^\circ$ ,  $K_1$  is derhalve eindig en zeker niet nul, de hoogte  $h$  wordt gevonden uit

$$h = \frac{1}{K_1} \lim_{c'=0} \sqrt{c'} K.$$

Dit levert, als men gebruik maakt van de bekende formule van LEGENDRE.

$$\lim_{c'=0} K = \lim_{c'=0} \log \frac{4}{\sqrt{c'}},$$

wederom  $h = 0$ . Blijkbaar kan voor eene waarde van  $\varphi$  tusschen  $0$  en  $90^\circ$  de hoogte  $h$ , zooals die uit (25) en (26) kan worden benaderd, noch oneindig, noch onbestaanbaar worden, en kan men wel aannemen, dat in dit interval  $h$  eene doorloopende functie van  $\varphi$  is, die nu, zooals de beschouwing der grensgevallen leert, noodzakelijk minstens ééne maximumwaarde  $H$  bezit.

Gerechtigd is men derhalve tot de gevolgtrekkingen: Opdat tusschen twee rechthoeken van gegeven gedaante op de aangegeven wijze een minimaaloppervlak  $O$  gespannen zal kunnen worden, moet hun afstand  $h$  een van hunnen vorm en afmetingen afhangend bedrag niet overschrijden. Zoodra de rechthoeken door één minimaaloppervlak  $O_1$  verbonden kunnen worden, is er minstens nog één dergelijk oppervlak  $O_{II}$  te construeeren.

Volkomen gelijkkluidend zijn deze uitkomsten met die van het bekende vraagstuk, dat op cirkels in plaats van op rechthoeken betrekking heeft. De beide catenoiden, die in het algemeen de op-



lossing vormen, worden onbestaanbaar, zoodra de cirkels te ver uit elkander geraken.

De onderstaande tabellen, geldig voor  $l = 1$  en  $l = 3$ , geven eenig denkbeeld van de wijze, waarop  $h$  verandert. Uit de medegedeelde getallen zou men wel willen afleiden, dat  $h$  slechts ééne maximumwaarde  $H$  kan bereiken, die altijd kleiner dan de eenheid is, om pas voor  $l = \infty$  die grenswaarde te naderen. De waarden van  $\varphi$  en  $\varphi_1$ , die bij  $H$  behooren, nemen oogenschijnlijk met toenemende  $l$  af, de overeenkomstige waarde van  $\varphi_2$  echter neemt zeer sterk toe.

$l = 1$			$l = 3$			
$\varphi_1$	$\varphi$	$h = \frac{k'K}{K_1}$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi$	$h = \frac{k'K}{K_1}$
45°	90°	0.	4°	78°57'	30°47'	0.92436
50°	44°45'	0.68162	9°10'	38°	12°30'	0.98178
55°	29°22'	0.71975	14°57'	85° 6'	7° 8'	0.97918
60°	19°28'	0.70713	19°11'	88°12'	5°11'	0.97454
65°	12°34'	0.67212	28°52'	88°30'	2°43'	0.93623
70°	7°37'	0.62433	36°53'	88°48'	1°36'	0.89694
75°	4° 7'	0.56670	44°30'	89° 6'	0°55'	0.85053
80°	1°44'	0.49803	52°23'	89°24'	0°28'	0.79260
85°	0°26'	0.40995	70°47'	89°42'	0° 6'	0.61826
90°	0°	0.	90°	90°	0°	0

6. *De hoogte  $h$  als functie van  $c$ .* Van eenig belang voor het volgende is het een nauwkeuriger inzicht in het verloop van de hoogte  $h$  te verkrijgen. Vooreerst kost het weinig moeite om aan te toonen, dat die hoogte

$$h = \frac{\sqrt{c'} K}{K_1}$$

altijd kleiner dan de eenheid is. Daartoe beginnen wij met den teller  $\sqrt{c'} K$  naar  $c$  te differentieëren, waardoor met behulp van de bekende formule

$$\frac{dK}{dc} = \frac{E}{2cc'} - \frac{K}{2c}$$

gevonden wordt

$$\frac{d}{dc}(\sqrt{c'} K) = \frac{K}{2c\sqrt{c'}} \left( \frac{E}{K} - 1 \right).$$

Altijd is  $E < K$ , dit differentiaalquotient is dus voortdurend negatief,  $\sqrt{c'} K$  is eene afnemende functie, en is altijd kleiner dan



de maximumwaarde  $\frac{\pi}{2}$ , bereikt voor  $c = 0$ . De noemer  $K_1$  is altijd grooter dan  $\frac{\pi}{2}$ , en daaruit volgt dan vanzelf, dat  $h < 1$  is.

De hoogte bereikt, zooals bleek, minstens éénmaal eene maximumwaarde; bewezen moet er worden, en dit is bewerkelijker, dat er geen maxima meer zijn. Eene uitdrukking voor het differentiaalquotient  $\frac{dh}{dc}$  moet worden gezocht, het is dus noodig de drie vergelijkingen

$$c = \frac{c_1' c_2'}{c_1 c_2}, \quad K_2 = h K_1, \quad h = \frac{\sqrt{c'} K}{K_1}$$

te differentieëren.

Uit de eerste leidt men af

$$\frac{1}{c} = -\frac{1}{c_1 c_1'} \frac{dc_1}{dc} - \frac{1}{c_2 c_2'} \frac{dc_2}{dc}, \dots\dots\dots (27)$$

uit de tweede.

$$K_1 \frac{dK_2}{dc_2} \cdot \frac{dc_2}{dc} = K_2 \frac{dK_1}{dc_1} \cdot \frac{dc_1}{dc}.$$

Dit geeft tezamen genomen

$$\frac{dc_1}{dc} = \frac{-\frac{K_1}{c} \frac{dK_2}{dc_2}}{\frac{K_1}{c_1 c_1'} \frac{dK_2}{dc_2} + \frac{K_2}{c_2 c_2'} \frac{dK_1}{dc_1}} < 0 \dots\dots\dots (28)$$

Met behulp hiervan zal men eindelijk uit de derde vergelijking vinden

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \frac{dh}{dc} = & -\frac{d}{dc} \log K_1 \times \frac{d}{dc} \log \sqrt{c'} K \times \\ & \times \left\{ \frac{c K_1}{c_1 c_1' \frac{dK_1}{dc_1}} + \frac{c K_2}{c_2 c_2' \frac{dK_2}{dc_2}} + \frac{K}{\frac{dK}{dc} - \frac{K}{2c'}} \right\}. \end{aligned}$$

Bij maximumhoogte is het differentiaalquotient nul, en daar de eerste beide factoren voor geen waarde van  $\varphi$  tusschen  $0$  en  $90^\circ$  nul worden, moet men zich richten tot den laatsten factor.

De vergelijking

$$-\frac{c K_1}{c_1 c_1' \frac{dK_1}{dc_1}} + \frac{c K_2}{c_2 c_2' \frac{dK_2}{dc_2}} + \frac{K}{\frac{dK}{dc} - \frac{K}{2c'}} = 0,$$

of wat hetzelfde is

$$\frac{c K_1}{E_1 - K_1 c_1'} + \frac{c K_2}{E_2 - K_2 c_2'} + \frac{c c' K}{E - K} = 0 \dots \dots \dots (29)$$

waarin  $q$  de onbekende is, levert alle wortels  $q_0$ , die bij eene maximumwaarde van  $h$  behooren. Dat één wortel  $q_0$  aanwezig is, besluit men uit het voorafgaande; door elk der drie termen in de vergelijking afzonderlijk na te gaan, zal het duidelijk worden, dat die wortel de eenige is.

Aanvangende met den eersten term

$$\frac{c K_1}{E_1 - K_1 c_1'}$$

bewijzen wij, dat de teller met  $c$  toeneemt. Men heeft namelijk, lettende op (28),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc} c K_1 &= \frac{K_1}{\frac{K_1}{c_1 c_1'} \cdot \frac{d K_2}{dc_2} + \frac{K_2}{c_2 c_2'} \cdot \frac{d K_1}{dc_1}} \times \\ &\times \left\{ \frac{K_1 K_2}{c_1 c_1' c_2 c_2'} - \left( \frac{K_1}{c_1 c_1'} - \frac{d K_1}{dc_1} \right) \left( \frac{K_2}{c_2 c_2'} - \frac{d K_2}{dc_2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

In deze uitdrukking is

$$\frac{K_1}{c_1 c_1'} - \frac{d K_1}{dc_1} = \frac{1}{c_1 c_1'} (K_1 - \frac{1}{2} E_1) + \frac{K_1}{2 c_1}$$

steeds positief, hetzelfde geldt van

$$\frac{K_2}{c_2 c_2'} - \frac{d K_2}{dc_2},$$

derhalve is  $\frac{d}{dc} c K_1$  positief en  $c K_1$  toenemende van nul af.

Anders is het met den noemer  $E_1 - K_1 c_1'$  gesteld, wel is deze positief, veranderend tusschen nul ( $\varphi_1 = 0$ ) en één ( $\varphi_1 = 90^\circ$ ), maar het differentiaalquotient

$$\frac{d}{dc} (E_1 - K_1 c_1') = \frac{1}{2} K_1 \frac{dc_1}{dc}$$

doet zien (28), dat de noemer eene afnemende functie is. De geheele term

$$\frac{c K_1}{E_1 - K_1 c_1'}$$

is derhalve positief en toenemende met  $c$ , wat nu meteen ook voor den tweeden term is aangetoond. Blijft over de derde term te onderzoeken, die men al dadelijk als negatief herkent. Na eenige rekening komt er voor het differentiaalquotient van

$$M = \frac{c c' K}{E - K},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^2} \frac{dM}{dc} &= \frac{c - c'}{c^2 c'^2} \left(1 - \frac{E}{K}\right) + \frac{1}{2 c c'} \left(\frac{1}{c} + \frac{E^2}{K^2 c c'}\right) = \\ &= \frac{1}{c c'^2} \left(1 - \frac{E}{K}\right) + \frac{E^2}{2 K^2 c^2 c'^2} + \frac{1}{2 c^2 c'} \left(\frac{2 E}{K} - 1\right) \end{aligned}$$

Uit de eerst verkregen waarde volgt  $\frac{dM}{dc} > 0$  voor  $\varphi > 45^\circ$  of  $c > c'$ , de tweede dient om te laten zien, dat dit waar blijft voor  $\varphi < 45^\circ$ , omdat alsdan  $2 > \frac{2 E}{K} > 1,4$  en dus  $\frac{2 E}{K} - 1$  zeker positief is; men besluit, dat de derde term uit (29) met  $c$  aangroeit.

Alles tezamen nemende, moet nu ook het geheele eerste lid van (29) eene met  $\varphi$  toenemende functie zijn en kan in het vak  $\varphi = 0$  tot  $\varphi = 90^\circ$  die vergelijking ook maar één wortel  $\varphi_0$  hebben, bijgevolg heeft de hoogte  $h$  slechts ééne maximumwaarde  $H$ . Van nul af, voor  $\varphi = 0$ , groeit  $h$  regelmatig aan tot  $H$  voor  $\varphi = \varphi_0$ , om daarna af te nemen tot nul voor  $\varphi = 90^\circ$ .

7. *De beide groepen van minimaaloppervlakken  $O_I$  en  $O_{II}$  en het grensoppervlak  $O_0$ .*

Men is thans in staat om met zekerheid te beweren, dat, zoo de beide rechthoeken met de breedte 1 en de lengte  $l$  geplaatst zijn op een afstand  $h < H$ , er twee en niet meer dan twee minimaaloppervlakken bestaan, die deze rechthoeken verbinden.

Van de bijbehorende waarden van  $\varphi$  is de eerste  $\varphi_I$  kleiner dan  $\varphi_0$ , de tweede  $\varphi_{II}$  is noodzakelijk grooter dan  $\varphi_0$ . Met deze onderscheiding zijn alle oppervlakken  $O$  bij veranderlijke  $h$  in twee afzonderlijke groepen gesplitst, de oppervlakken  $O_I$ , en de daarmede één voor één overeenkomende oppervlakken  $O_{II}$ . Voor de waarde  $\varphi = \varphi_0$  is  $h = H$ , en de beide figuren  $O_I$  en  $O_{II}$  vallen samen in het grensoppervlak  $O_0$ .

Ook door hunne algemeene gedaante zijn twee oppervlakken  $O_I$  en  $O_{II}$  van dezelfde hoogte gemakkelijk te onderscheiden. Voor de hellingshoeken der raakvlakken in  $D$  en  $E$  (fig. 1) geldt (3)

$$\sqrt{\frac{2}{\alpha - 1}} = tg 2\delta, \quad \sqrt{\frac{2}{\beta - 1}} = tg 2\varepsilon,$$

of met behulp van (16), overgaande op de moduli  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k$ ,

$$tg 2\delta = \frac{k_1 k_2 k'}{k_1}, \quad tg 2\varepsilon = \frac{k_1 k_2 k'}{k_2}.$$

Met toenemende  $\varphi$  worden  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k'$  kleiner,  $k_1'$  en  $k_2'$  grooter, derhalve nemen  $2\delta$  en  $2\varepsilon$  af, anders gezegd, voor  $O_I$  zijn deze hoeken altijd grooter dan voor  $O_{II}$ .

Ook de middendoorsnede  $MLN$  (fig. 1) levert verschil op. Voor de halve assen  $\rho_1$  en  $\rho_2$  is gevonden (6), (7), (9), (10).

$$\frac{\rho_1}{b} = 1 - \frac{v_1}{\omega_1}, \quad \frac{\rho_2}{l} = 1 - \frac{v_2}{\omega_2},$$

$$\frac{\rho r_1 - e_3'}{e_1' - e_3'} = \frac{\beta + 1}{\beta - 1} = \left(\frac{k_1}{k_2'}\right)^2, \quad \frac{\rho r_2 - e_3''}{e_1'' - e_3''} = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = \left(\frac{k_2}{k_1'}\right)^2.$$

Hieruit blijkt dat voor aangroeiende  $\varphi$ , waarbij  $k_1$  en  $k_2$  afnemen,  $k_1'$  en  $k_2'$  toenemen, het argument  $r_1$  meer en meer nadert tot  $\omega_1$ , evenzoo  $r_2$  tot  $\omega_2$ , zoodat  $\rho_1$  en  $\rho_2$  kleiner worden voor grooter wordende  $\varphi$ . Voor het oppervlak  $O_I$  zijn dus de assen der middendoorsnede grooter dan voor het bijbehorend oppervlak  $O_{II}$ .

Het duidelijkst is dit alles op te merken aan de oppervlakken  $O_I$  en  $O_{II}$ , die bij de hoogte  $h = 0$  behooren. Voor  $O_I$  is  $\varphi = 0$ ,  $2\delta = 2\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ ,  $\rho_1 = b$ ,  $\rho_2 = l$ ; het oppervlak is samengevallen met het zijdelingsch oppervlak van het parallelopipedum van de breedte 1, de lengte  $l$  en oneindig kleine hoogte. Daarentegen is voor  $O_{II}$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $2\delta = 2\varepsilon = 0$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 0$ . In de grens valt het oppervlak samen met grond- en bovenvlak van het zooeven bedoelde parallelipedum. Tusschen deze beide oppervlakken vertoonen zich nu de andere, waarvoor  $h$  niet nul is. Wij gaan ze vergelijken ten aanzien van hunne grootte, die evenals het oppervlak zelf door het teeken  $O$  wordt aangeduid. Uit (23)

$$O = 4 \Omega = \frac{K_1'}{K_1} + l^2 \frac{K_2'}{K_2} + h^2 \frac{K'}{K}.$$

volgt door differentieeren, waarbij te letten is op de bekende formule

$$\frac{d}{dc} \left( \frac{K'}{K} \right) = - \frac{\pi}{4 K^2 c c'},$$

$$\frac{dO}{dh} = - \frac{\pi}{4 K_1'^2 c_1 c_1'} \cdot \frac{dc_1}{dh} - \frac{\pi l^2}{4 K_2'^2 c_2 c_2'} \cdot \frac{dc_2}{dh} - \frac{\pi h^2}{4 K^2 c c'} \cdot \frac{dc}{dh} +$$

$$+ 2h \frac{K'}{K},$$

of daar

$$K_2 = l K_1, \quad K \sqrt{c'} = h K_1,$$

$$\frac{dO}{dh} = - \frac{\pi}{4 K_1'^2} \left( \frac{1}{c_1 c_1'} \frac{dc_1}{dh} + \frac{1}{c_2 c_2'} \frac{dc_2}{dh} + \frac{1}{c c'} \frac{dc}{dh} \right) + 2h \frac{K'}{K},$$

wat, door gebruik te maken van (27), geeft

$$\frac{dO}{dh} = 2h \frac{K'}{K}.$$

De gevonden uitdrukking is altijd positief, het oppervlak  $O$  is dus met  $h$  aangroeiend, het grensoppervlak  $O_0$  met de maximum-hoogte  $H$  is grooter dan alle andere. Laat  $h$  afnemen van  $H$  tot nul en beschouw steeds een paar oppervlakken  $O_I$  en  $O_{II}$ . Voor het eerste is  $\varphi$  kleiner en dus  $\frac{K'}{K}$  grooter dan voor het tweede oppervlak. Altijddoor is dientengevolge  $O_0 - O_I$  grooter dan  $O_0 - O_{II}$ , anders gezegd van een paar oppervlakken  $O_I$  en  $O_{II}$  is  $O_I$  het kleinste. Eene graphische voorstelling van de vergelijking  $O = f(h)$  is min of meer schematisch licht te maken (fig. 9). Men vindt eene kromme uit twee takken bestaande, die in een keerpunt ( $h = H$ ) samenkomen. De bovenste tak snijdt de  $O$ -as in  $O = 2l$  en wel is daar blijkbaar  $\frac{dO}{dh} = 0$ ; deze tak geldt voor de oppervlakken  $O_{II}$ . De andere tak, betrekking hebbende op  $O_I$ , gaat door den oorsprong. Aldaar is

$$\frac{dO}{dh} = \lim_{h=0} \frac{O}{h} = \lim_{h=0} \frac{2h(1+l)}{h} = 2(1+l).$$

Overigens is

$$\frac{d^2 O}{dh^2} = 2 \frac{K'}{K} - \frac{\pi}{4 K^2 c'} \times \frac{h}{c \frac{dh}{dc}}$$

bepaaldelijk positief voor den tak  $O_{II}$ , omdat daar  $\frac{dh}{dc}$  negatief is.

Door het oneindige heen wisselt voor  $h = H$ ,  $\frac{dh}{dc} = 0$  de uitdrukking van teeken, om in den oorsprong, waar

$$\frac{h}{c} = \frac{dh}{dc}$$

is, weder positief oneindig te worden. De kromming der takken is dus die in fig. 9, de tak  $O_I$  heeft een buigpunt.

Eindelijk kan men het oppervlak  $O$  vergelijken met het zijdelingsch oppervlak van het parallelopipedum met hetzelfde grond- en bovenvlak, en nagaan op welke wijze het quotient

$$U = \frac{O}{2h(1+l)}$$



van  $U = 1$  voor  $\varphi = 0$  tot  $U = \infty$  voor  $\varphi = 90^\circ$  verandert. Door differentieeren komt er

$$\frac{dU}{dc} = \frac{1}{2(1+l)h^2} \left( h \frac{dO}{dh} - O \right) \frac{dh}{dc}.$$

De uitdrukking

$$h \frac{dO}{dh} - O = 2h^2 \frac{K'}{K} - O = h^2 \frac{K'}{K} - \frac{K_1'}{K_2} - l^2 \frac{K_2'}{K_2},$$

die hier voorkomt, is nul voor  $\varphi = 0$  en wordt dan positief; zij heeft echter, zooals later zal worden bewezen voor  $l \geq 3$ , weder eene negatieve waarde als  $h = H$ . Dat dit ook geldt voor  $l = 1$ , volgt wel uit de getallen, die over deze onderstelling zijn medegedeeld. Met groote waarschijnlijkheid kan men dit laatste dan ook wel aannemen voor  $1 < l < 3$ . Dat voor  $\varphi > \varphi_0$  de beschouwde uitdrukking negatief blijft, blijkt daaruit, dat het differentiaalquotient naar  $c$

$$\frac{d^2 O}{dh^2} \cdot \frac{dh}{dc},$$

zooals het voorafgaande doet zien, negatief is.

Uit dit alles volgt, dat er tusschen 0 en  $H$  eene waarde van  $h$  bestaat, waarvoor  $\frac{dU}{dc}$  van positief negatief, ten tweede, dat voor  $h = H$  hetzelfde differentiaalquotient van negatief positief wordt.

Er is derhalve een minimaaloppervlak  $O_l$ , waarvoor het quotient  $U$  een maximumwaarde aanneemt, terwijl ditzelfde quotient voor het grensoppervlak  $O_0$  zoo klein mogelijk wordt.

8. *Opmerking over minimaaloppervlakken in engeren zin.* Of de oppervlakken, die hier werden nagegaan, werkelijk den naam van minimaaloppervlakken verdienen, dat wil zeggen of hun gebogen oppervlak inderdaad een analytisch minimum vormt, is eene vraag, die moeielijk volledig zal kunnen beantwoord worden. Men zal kunnen beproeven of het mogelijk is den weg te volgen, dien SCHWARZ heeft aangewezen, in de aangehaalde verhandeling, betreffende de minimaaloppervlakken door grond- en bovenvlak van een regelmatig  $n$ -zijdig prisma gebracht. Die bewijsvoering van SCHWARZ berust op eigenschappen eener partieele differentiaalvergelijking van de tweede orde, welke algemeene stellingen ook in het hier beschouwde zeer bijzondere geval wellicht zijn toe te passen. Ten aanzien hiervan moge naar de voorafgaande verhandeling <sup>1)</sup> van

<sup>1)</sup> Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung, Ges. W., I, blz. 223.

SCHWARZ verwezen worden, waar deze eigenschappen worden bewezen. Een gedeeltelijk resultaat echter is gemakkelijker te verkrijgen, daarom zal hier op het voetspoor van SCHWARZ <sup>1)</sup> nog worden aangetoond, dat de oppervlakken  $O_{II}$  in geen geval tot de eigenlijke minimaaloppervlakken kunnen worden gerekend. Gebruik kan hier gemaakt worden van eene min of meer meetkundige rede-neering, door MOIGNO <sup>2)</sup> en LINDELÖF aangewend om de beide catenoiden van het overeenkomstige cirkelvraagstuk te onderscheiden.

Men denke zich in fig. 1 alle oppervlakken  $O$  aangebracht, die voor  $b = 1$  bij dezelfde waarde van  $l$ , maar verschillende waarden van  $h$  behooren. Al die oppervlakken geve men hetzelfde middelpunt  $M$  en dezelfde symmetrie-assen  $MX$ ,  $MY$ ,  $MZ$ . Ten aanzien van de oppervlakken  $O_{II}$  besluit men onmiddellijk, dat twee willekeurige oppervlakken dezer groep elkaar snijden. Immers, zooals tevoren werd aangetoond, nemen de halve assen  $\rho_1$  en  $\rho_2$  der middendoorsnede af, als  $\varphi$  toeneemt. Het oppervlak  $O_{II}$  met de kleinste hoogte, heeft dus ook de kleinste halve assen  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , daarom snijdt dit oppervlak elk ander oppervlak van dezelfde groep. Van de oppervlakken  $O_I$  kan niet hetzelfde worden beweerd, daar met eene grootere waarde van de hoogte kleinere assen in de middendoorsnede gepaard gaan.

Alle oppervlakken  $O_{II}$  hebben dus een omhullend oppervlak  $\phi_o$ , dat, daar  $\rho_1$  en  $\rho_2$  tot in het oneindige afnemen, in den oorsprong  $M$  een kegelpunt bezit, en verder uit twee trechtervormige stukken bestaat, die eindigen in de beide rechthoekige begrenzingen van het oppervlak  $O_o$ , op afstand  $H$ . Elk oppervlak  $O_{II}$  raakt de omhullende  $\phi_o$  volgens eene kromme  $\Gamma$ , waarvan het voor de hand ligt om aan te nemen, dat zij uit twee ten opzichte van het  $XY$ -vlak symmetrische stukken bestaat, die elk voor zich om de  $Z$ -as gaan, en in zich zelf terugkeeren.

In fig. 10 is gepoogd een en ander op te helderen, door eene schematische voorstelling te geven van de figuur, die het grensoppervlak  $O_o$ , de oppervlakken  $O_{II}$  en de omhullende  $\phi_o$  in het  $XZ$ -vlak afteekenen.

Wij beschouwen nu in fig. 10 twee opvolgende oppervlakken  $O_{II}$  en  $O_{II}'$ , het laatste met de kleinste hoogte; zij raken  $\phi_o$  volgens de krommen  $\Gamma$  en  $\Gamma'$ . Laatstgenoemde krommen begrenzen elk op  $\phi_o$  de stukken  $\phi$  en  $\phi'$ , het verschil  $d\phi$  dezer stukken bestaat uit twee ringvormige zonen, eveneens door de krommen  $\Gamma$  en  $\Gamma'$

<sup>1)</sup> Ges. W., I, blz. 313.

<sup>2)</sup> Calcul des Variations, blz. 213.

ingesloten. Het stuk van  $O_{II}$ , begrensd door  $\Gamma$ , mag genoemd worden  $S$ , het overeenkomstige stuk van  $O_{II}'$  op dezelfde wijze  $S'$ . Het komt er dan op aan de oppervlakken  $S$  en  $S' + d\phi$  met den zelfden rand  $\Gamma$  met elkander te vergelijken, en door eene redeneering van SCHWARZ te laten zien, dat  $S = S' + d\phi$ . Men denke zich hiertoe  $S$  in vlakke-elementen  $dS$  verdeeld, en brenge door de randen dezer elementen buisvormige oppervlakken, die alle oppervlakken  $O_{II}$  loodrecht snijden. Twee elementen nu  $dS$  en  $dS'$  van de oppervlakken  $S$  en  $S'$  binnen dezelfde buis zijn gelijk, omdat het gedeelten van oneindig dicht bij elkander geplaatste minimaalvlakken zijn, die de wanden der buis loodrecht ontmoeten. Ligt echter  $dS$  aan den rand  $\Gamma$ , dan zal het buisvormige oppervlak door  $dS$  niet langer op  $S'$ , maar op  $d\phi$  een vlakke-element uitsnijden, en wederom zijn de beschouwde vlakke-elementen gelijk, omdat zij op den rand elkander overal aanraken. Daaruit volgt echter  $S = S' + d\phi$ . Tot nu toe was  $S'$  een oppervlak oneindig dicht bij  $S$  gelegen; men kan zich echter  $S'$  als functie denken van de bijbehoorende hoogte  $h'$ , en nu ten opzichte van  $h'$  integreeren. Alsdan blijkt voor twee niet opvolgende oppervlakken te gelden

$$S - S' = \phi - \phi'.$$

Laat men in het bijzonder  $h'$  tot nul naderen, dan komt er niet anders dan  $O_0 = \phi_0$ . Het grensoppervlak is even groot als de omhullende. Intusschen doet de gevonden vergelijking

$$S = S' + (\phi - \phi')$$

zien, dat er twee gelijke oppervlakken  $S$  en  $S' + (\phi - \phi')$  door denzelfden rand  $\Gamma$  gaan, waarvan het eerste over zijne geheele uitgestrektheid, het tweede slechts ten deele een minimaaloppervlak is. In de onmiddellijke nabijheid van laatstgenoemd oppervlak ligt dus stellig een derde  $V$ , dat kleiner is dan  $S' + (\phi - \phi')$  en dat toch door den rand  $\Gamma$  gaat. Laat men nu de hoogte  $h'$  meer en meer tot  $h$  naderen, dan wordt  $V$  een oppervlak, dat oneindig weinig van  $S$  afwijkt, denzelfden rand  $\Gamma$  heeft en kleiner oppervlak heeft dan  $S$ . Daarom is het gedeelte  $S$  van  $O_{II}$  geen analytisch minimum, en kan dit ook niet van het gansche oppervlak  $O_{II}$  worden beweerd. De oppervlakken  $O_{II}$ , waartoe in de grens ook het oppervlak  $O_0$  is te rekenen, kunnen op den naam van eigenlijke minimaaloppervlakken geen aanspraak maken. Aannemende, dat deze laatste bestaan, kunnen het geen andere zijn dan de oppervlakken  $O_I$ .

9. *Benaderde bepaling van de maximumhoogte  $H$ .* Voor eene



benadering van de maximumhoogte  $H$  zijn moeielijk in het algemeen vaste regels aan te geven. Zij wordt pas uitvoerbaar als voor  $b = 1$ ,  $l$  eene bepaalde waarde aanneemt. Is echter  $l$  vrij aanzienlijk, dan worden, zooals uit de tabel voor  $l = 3$  wel is op te maken,  $q_2$  zeer groot,  $q$  en  $q_1$  vrij klein. Van de drie exponentiaalgrootheden  $q_1$ ,  $q_2'$  en  $q$  kan dus ook ondersteld worden, dat zij geringe waarden verkrijgen. Ingevoerd in de vergelijkingen (25) en (26), nemen deze de gedaanten aan van

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + 2q_1 + 2q_1^4 + 2q_1^9 + \dots)^2} &= \frac{\pi l}{(1 + 2q_2' + 2q_2'^4 + 2q_2'^9 + \dots)^2 \log \frac{1}{q_2'}} = \\ &= \frac{h}{(1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots)^2}, \\ \frac{2 \sqrt[4]{q} (1 + q^2 + q^6 + \dots)}{(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots)} &= \frac{(1 - 2q_1 + 2q_1^4 - 2q_1^9 + \dots)}{2 \sqrt[4]{q_1} (1 + q_1^2 + q_1^6 + \dots)} \times \\ &\times \frac{2 \sqrt[4]{q_2'} (1 + q_2'^2 + q_2'^6 + \dots)}{(1 - 2q_2' + 2q_2'^4 - 2q_2'^9 + \dots)}, \end{aligned}$$

waaruit nu de maximumwaarde van  $h$  is te zoeken. De eerste vergelijking geeft als benadering  $q_2' = e^{-\pi l} = A^2$ , eene grenswaarde, die strikt genomen pas voor  $q = 90^\circ$  bereikt wordt. De derde vergelijking levert op dezelfde wijze door machtsverheffing

$$16q_1q = q_2',$$

en daar de verhouding van  $q_1$  en  $q$  eindig is, en zij ten slotte zelfs weinig verschillen, ligt het voor de hand om  $q_1^2$ ,  $q^2$ ,  $q_2'$ ,  $A^2$  te beschouwen als grootheden, die bij steeds toenemende  $l$  van dezelfde orde oneindig klein worden. Eene eerste oplossing wordt derhalve verkregen door overal de eerste macht van  $q_2'$ , de eerste en tweede machten van  $q_1$  en  $q$  in de rekening te behouden. In die onderstelling heeft men

$$\begin{aligned} \sqrt{h} &= 1 - 2q - 2q_1 + 4qq_1 + 4q_1^2, \\ 16qq_1 &= q_2', \\ \frac{1}{\pi l} \log \frac{1}{q_2'} &= (1 + 4q_1 + 4q_1^2 - 4q_2') \end{aligned}$$

Deze laatste vergelijking kan met den aangegeven graad van benadering niet anders leveren dan  $q_2' = A^2$ . Men heeft dus een maximum te zoeken van

$$\sqrt{h} = 1 - 2q - 2q_1 + \frac{1}{4} A^2 + 4q_1^2,$$

onder de voorwaarde

$$16qq_1 = A^2.$$

Op de gewone wijze zal men vinden

$$q = \frac{1}{4} A - \frac{1}{8} A^2,$$

$$q_1 = \frac{1}{4} A + \frac{1}{8} A^2,$$

$$H = 1 - 2 A + 2 A^2 = 1 - 2 e^{-\frac{1}{2}\pi l} + 2 e^{-\pi l},$$

Reeds voor  $l = 3$  geeft dit  $H = 0.98220$ , eene uitkomst, die zeer voldoende met de medegedeelde getallen overeenstemt. Men ziet, dat  $H$  tot één nadert als de rechthoeken tot in het oneindige gestrekt worden. De hier gevonden waarden van  $q_1$ ,  $q_2'$ ,  $q$  en  $H$  veroorloven zonder moeite, zich er van te overtuigen, dat voor  $l \leq 3$  de uitdrukking  $h \frac{dO}{dh} = O$ , in art. 7 beschouwd, inderdaad negatief is voor  $h = H$ , gelijk aldaar werd aangenomen.

10. *Beschouwing van bijzondere gevallen.* Er zijn eenige bijzondere gevallen, die de aandacht verdienen. Zoo komt in aanmerking de onderstelling  $b = l = 1$ , en dientengevolge  $\alpha = \beta$ ,  $c_1 = c_2$ ,  $K_1 = K_2$ . De rechthoeken zijn vierkanten geworden en het minimaaloppervlak behoort tot die, welke in de reeds meermalen genoemde verhandeling van SCHWARZ zijn beschouwd. Ook hier is het mogelijk om vrij gemakkelijk de maximumhoogte  $H$  te bepalen, die kleiner is dan bij rechthoeken, waarvoor  $l > 1$ .

De vergelijking (29), waaruit  $\varphi_0$  is op te lossen

$$\frac{K_1}{E_1 - K_1 c_1'} + \frac{K_2}{E_2 - K_2 c_2'} + \frac{c' K}{E - K} = 0,$$

kan hier eenvoudig geschreven worden

$$F = 2 (E - K) + h \sqrt{c'} (E_1 - K_1 c_1') = 0.$$

Vrij nauwkeurig is aan deze vergelijking voldaan door

$$\varphi = 30^\circ, c = \frac{1}{4}, c' = \frac{3}{4}, c_1 = \frac{2}{3}, c_1' = \frac{1}{3}, \varphi_1 = 54^\circ 44' 6''.$$

De noodige correctie wordt bepaald door de aangroeiing  $\delta F$  te berekenen, die  $F$  ondergaat, wanneer  $c$  met  $\delta c$  toeneemt. Daar in deze omgeving  $h$  weinig verandert en bijna gelijk is aan  $H$ , is bij de berekening van  $\delta F$  de hoogte  $h$  als onveranderlijk te beschouwen. Na eenige herleiding wordt benaderend gevonden

$$\delta F = - \delta c \left\{ \frac{1}{c'} + \frac{c_1^3 c'}{4 c_1'} \right\} K;$$

men heeft hier  $\delta F = - F$ , zoodat de aan te brengen correctie  $\delta c$  bepaald is door

$$\delta c = + \frac{1 c_1' c'}{(4 c_1' + c_1^3 c'^2) K} F$$

$$= - \frac{1 c_1' c'}{4 c_1' + c_1^3 c'^2} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E}{K} \right) + c' \left( c_1' - \frac{E_1}{K_1} \right) \frac{1}{2}.$$



Achtereenvolgens komt er nu:

$\varphi_1$	$\varphi$	$c$	$F$	$\delta c$
$54^\circ 44' 6''$	$30^\circ$	0.25000	$0.03526 \times K$	$-0.02351$
$55^\circ 24'$	$28^\circ 25' 6''$	0.22649	$0.00787 \times K$	$-0.00525$
$55^\circ 33' 24''$	$28^\circ 3' 30''$	0.22124	$0.00041 \times K$	$-0.00027$
$55^\circ 33' 51''$	$28^\circ 2' 22''$	0.22097	$0.00004 \times K$	$-0.00003$
$55^\circ 33' 56''$	$28^\circ 2' 13''$	0.22094	0	0

$$H = \frac{\sqrt{c'} K}{K_1} = 0.72015.$$

De gevonden maximumhoogte stemt overeen met die, welke langs anderen weg door SCHWARZ is afgeleid.

Onder de overige minimaaloppervlakken, die door twee vierkanten zijn gebracht, is er nog een, dat zich van de overige onderscheidt, omdat het behalve de zijden der vierkanten nog acht andere rechte lijnen bevat. Men kan zich namelijk afvragen, of het mogelijk is eene zoodanige hoogte  $h$  te kiezen, dat op het oppervlak  $\Omega$  uit fig. 1 de rechte lijnen  $EC$  en  $DF$  vallen. Die lijnen zouden voor de punten  $C, D, E, F$  de derde asymptotische lijn leveren, die men aldaar moet aantreffen, zooals reeds in den aanvang werd opgemerkt. Noodzakelijk is het dus, dat  $EC$  en  $DF$ , die elkaar in  $Q$  snijden, aldaar loodrecht op elkaar staan, en verder met de zijden van de vierkanten hoeken van  $60^\circ$  maken. Dit is alleen mogelijk, als men heeft  $b = l$ ,  $h = \frac{1}{\sqrt{2}} b$ , in welke onderstelling men heeft

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\delta &= \operatorname{tg} 2\varepsilon = \sqrt{2}, \\ \operatorname{tg} \delta &= \operatorname{tg} \varepsilon = \sqrt{2} - \sqrt{3}, \\ \alpha &= \beta = 2, \\ F(s) &= \frac{e^{\frac{3\pi i}{2}}}{\sqrt{s^8 - 14s^4 + 1}}. \end{aligned}$$

Wij hebben nu omgekeerd aan te toonen, dat een oppervlak, hetwelk bij deze functie  $F(s)$ , bekend uit de theorie van den octaeder, behoort, werkelijk de bedoelde rechte lijnen bevat. Dit geschiedt met behulp van de spherische afbeelding in fig. 2, waar nu  $C, D, E, F$  de hoekpunten worden van een zijvlak van een in den bol beschreven kubus. De groote cirkels  $CE$  en  $DF$  snijden derhalve elkander op het midden  $Q$  van  $LN$ . In fig. 11 is de afbeelding op het  $s$ -vlak voor dit bijzondere geval gegeven. De

groote cirkel  $DF$  uit fig. 2 wordt in fig. 11 afgebeeld door den cirkel  $DQF$  met straal  $\sqrt{2}$  en het middelpunt  $s = e^{-\frac{\pi i}{4}}$ . Het komt er nu op aan te laten zien, dat deze cirkel de afbeelding is van eene asymptotische lijn. Indien wij  $s$  bepaaldelijk op den cirkel  $DQF$  aannemen, is

$$\left(s - e^{-\frac{\pi i}{4}}\right) \left(s_0 - e^{\frac{\pi i}{4}}\right) = 2.$$

Deze betrekking tusschen  $s$  en  $s_0$  is echter een der 24 octaeder-substituties, <sup>1)</sup> zoodat men heeft

$$\frac{\sqrt[4]{s^8 - 14s^4 + 1}}{\left(s - e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)} = - \frac{\sqrt[4]{s_0^8 - 14s_0^4 + 1}}{\left(s_0 - e^{\frac{\pi i}{4}}\right)}.$$

Door de substitutie  $s = e^{\frac{\pi i}{4}}$ ,  $s_0 = e^{-\frac{\pi i}{4}}$  bevestigt men gemakkelijk de juistheid dezer vergelijking.

Tevens is

$$\frac{ds}{s - e^{-\frac{\pi i}{4}}} = - \frac{ds_0}{s_0 - e^{\frac{\pi i}{4}}}$$

zoodat

$$\frac{ds}{\sqrt[4]{s^8 - 14s^4 + 1}} = \frac{ds_0}{\sqrt[4]{s_0^8 - 14s_0^4 + 1}},$$

of

$$\sqrt{F(s)} ds = e^{\frac{3\pi i}{2}} \sqrt{F_0(s_0)} ds.$$

Voldaan is derhalve aan de differentiaalvergelijking der asymptotische lijnen <sup>2)</sup>, de groote cirkel  $DF$  in fig. 2 is inderdaad de spherische afbeelding van eene asymptotische lijn, wier osculatievlakken, raakvlakken aan  $\Omega$ , nu alle loodrecht staan op het vlak van den grooten cirkel  $DF$  uit fig. 2. Dit vereischt bepaaldelijk, dat die asymptotische lijn recht is, waardoor dus voor het geval  $\alpha = \beta = 2$  de aanwezigheid van acht nieuwe rechte lijnen is bewezen <sup>3)</sup>. Wanneer deze lijnen op het oppervlak  $O$  worden getrokken, is dit verdeeld in twaalf congruente dubbel symmetrische scheeve vierhoeken met twee rechte hoeken en twee hoeken van  $60^\circ$ . Ook dit oppervlak is door SCHWARZ <sup>4)</sup> in eene zijner eerste verhandelingen over de minimaaloppervlakken uitvoerig onderzocht. Men behoeft nu in fig. 11 nog slechts de cirkels  $DE$ ,  $CF$  en de rechte lijn

<sup>1)</sup> KLEIN, Ikosaeder, blz. 43, formule (31b).

<sup>2)</sup> DARBOUX, Th. g. d. Surf., I, blz. 303.

<sup>3)</sup> Dat alleen in het geval  $\alpha = \beta = 2$  en in geen ander dergelijke nieuwe rechte lijnen op het oppervlak kunnen voorkomen, volgt wel uit de bekende stelling van SCHWARZ, volgens welke elke rechte lijn op het oppervlak eene as van symmetrie wordt.

<sup>4)</sup> Bestimmung einer speciellen Minimalfläche; Ges. W. I., blz. 90.

$BQA$  als afbeelding van gelijknamige kromtelijnen in fig. 1 te trekken, om onmiddellijk het vierde gedeelte van de bekende octaederfiguur, namelijk de aaneensluiting van 48 cirkeldriehoeken met hoeken van  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  en  $60^\circ$  te herkennen.

Eindelijk is het nog mogelijk om te laten zien, dat uit de vergelijkingen (25) en (26) voor  $\alpha = \beta = 2$  werkelijk volgt  $h = \frac{1}{\sqrt{2}} b$ .

Men heeft hier  $k = \frac{1}{3}$ ,  $k' = \frac{2}{3} \sqrt{2}$ ,  $k_1 = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ ,

dus ook 
$$k = \frac{1 - k_1'}{1 + k_1'}$$
,

tusschen  $K$  en  $K_1$  bestaat derhalve de betrekking van Landen

$$K_1 = (1 + k) K = \frac{4}{3} K,$$

zoodat de algemeene vergelijking

$$\frac{b}{K_1} = \frac{h}{k' K}$$

werkelijk geeft  $h = \frac{1}{\sqrt{2}} b$ .

Omdat  $\varphi = 19^\circ 28' < 28^\circ 2' 13''$  is, behoort het oppervlak tot de groep  $O_I$  en is het dus door eene proef van PLATEAU te verwezenlijken. Door de zeer bijzondere betrekking tusschen  $K$  en  $K_1$  was het hier mogelijk om ten slotte de drie coördinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  in  $\wp$ -functies van dezelfde perioden uit te drukken.

Zulke gevallen zijn nog in willekeurig aantal te vinden, het is echter moeielijk om na te gaan, of dit steeds van grooten invloed is op de algemeene gedaante van het oppervlak.

11. *Ontaarding van het oppervlak.* Eenige wijziging ondergaan de voorafgaande beschouwingen, als de lengte-afmeting der beide rechthoeken meer en meer toeneemt.

Door die lengte  $l$  te laten aangroeien, kan men uit  $O$  twee nieuwe en van elkander verschillende oppervlakken afleiden. Ten eerste kan men aannemen, dat in fig. 1 de punten  $E$ ,  $N$  en  $F$  zich in de richting der  $Y$ -as in het oneindige verwijderen; van elken rechthoek blijven dan drie zijden over, en het middelpunt  $M$  van het oppervlak verdwijnt uit de figuur. In de tweede onderstelling blijft het middelpunt  $M$  behouden, de zijden  $AC$  en  $BD$  verdwijnen in de richting van de  $Y$ -as evenals de tegenoverliggende, zoodat van elken rechthoek nu slechts twee zijden behouden blijven. De tot hertoe gebruikte elliptische functies ontaarden gedeeltelijk, men zal thans met eene enkele  $\wp$ -functie kunnen volstaan. Vandaar, dat het nu geschikter is het elliptisch argument op eenigszins andere wijze in te voeren.

Uit de formules (25) blijkt, dat  $l = \infty$  vereischt  $q_2 = 1$ ,  $k_2' = 0$ , en dus volgens (16)  $\beta = 1$  of  $\alpha = \infty$ .

Deze beide onderstellingen zullen afzonderlijk worden nagegaan.

12. *Eerste onttaarding*,  $\beta = 1$ . Het oppervlak is voorgesteld door

$$\begin{aligned} \pm \mu x &= \Re \int \frac{id\xi}{\sqrt{4(\xi+2\alpha)(\xi-2)(\xi+2)}}, \quad \pm \mu y = \Re \int \frac{d\xi}{2(\xi-2)\sqrt{(\xi+2\alpha)}}, \\ \pm \mu z &= \Re \int \frac{id\xi}{(\xi-2)\sqrt{(\xi+2\alpha)(\xi+2)}}. \end{aligned}$$

De herleiding dezer integralen is zeer eenvoudig, slechts de eerste is elliptisch, men verkrijgt echter het gemakkelijkst een inzicht in de wijze, waarop die integralen veranderen, indien men eene zeer bijzondere substitutie gebruikt, en een argument  $w$  invoert van eene  $\wp$ -functie met de wortels  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  en de periode  $2\omega$  en  $2\omega'$ , verbonden aan  $\xi$  door de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \xi - 2 &= \tau^2 [\wp(2w + \omega) - e_1], \\ \xi + 2 &= \tau^2 [\wp(2w + \omega) - e_2], \\ \xi + 2\alpha &= \tau^2 [\wp(2w + \omega) - e_3]. \end{aligned}$$

Deze substitutie levert eerst

$$\begin{aligned} \tau^2 (e_1 - e_2) &= 4, \\ \tau^2 (e_1 - e_3) &= 2(\alpha + 1), \\ \tau^2 (e_2 - e_3) &= 2(\alpha - 1), \end{aligned}$$

en eindelijk

$$\pm \mu \tau x = \Re 2iw + const.,$$

$$\left. \begin{aligned} \pm \mu \tau y &= \Re \int d2w \sqrt{\frac{\wp(2w + \omega) - e_2}{\wp(2w + \omega) - e_1}} = \Re \int d2w \sqrt{\frac{\wp(2w) - e_3}{e_1 - e_3}} = \\ &= \Re \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \log(\sqrt{\wp(2w) - e_1} + \sqrt{\wp(2w) - e_2}) + const., \\ \pm \mu \tau z &= \Re \int \frac{2id2w}{\tau \sqrt{\wp(2w + \omega) - e_1}} = \Re \int id2w \sqrt{\frac{\wp(2w) - e_1}{e_1 - e_3}} = \\ &= \Re \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}} \log(\sqrt{\wp(2w) - e_2} + \sqrt{\wp(2w) - e_3}) + const. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

De hier voorkomende logarithmische uitdrukkingen kunnen nu echter veel eenvoudiger worden geschreven. Juist met het oog hierop is het argument  $w$  ingevoerd door eene substitutie, die afwijkt van de gewone.

In de eerste plaats is de functie

$$f(w) = \sqrt{\wp(2w) - e_1} + \sqrt{\wp(2w) - e_2},$$



ondanks de wortelteekens, éénwaardig <sup>1)</sup> en dubbelperiodiek met de perioden  $2\omega$  en  $2\omega'$ ; zij heeft tot polen 0 en  $\omega'$ , niet  $\omega$  en  $\omega''$ , zooals men licht zou vermoeden. De substitutie  $w = \omega + \delta$  geeft.

$$f(\omega + \delta) = + \sqrt{\frac{1}{4\delta^2} - e_1} - \sqrt{\frac{1}{4\delta^2} - e_2} = -(e_1 - e_2)\delta.$$

Daaruit blijkt, dat  $\omega$  een nulpunt is van  $f(w)$ , noodzakelijk is dan  $\omega''$  het andere, en is  $f(w)$  op een constanten factor na identiek met

$$\frac{(\wp w - e_1)(\wp w - e_2)}{\wp' w} = + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\wp(w - e_1)}(\wp w - e_2)}{\sqrt{\wp w - e_3}},$$

eene functie, die dezelfde polen en nulpunten heeft.

Wij stellen nu in het vervolg

$$\wp w - e_k = R_k e^{-i\psi_k}, \quad (k=1, 2, 3)$$

en voeren dus in den modulus  $R_k$  en het negatieve argument  $\psi_k$  van  $\wp w - e_k$ ; dit zijn grootheden, waarvan men zich vrij gemakkelijk een denkbeeld maakt, met behulp van de bekende teekening <sup>2)</sup>, die een vierde gedeelte van het periodenparallelogram conform afbeeldt op het positieve of negatieve halfvlak der complexe grootheid  $\wp w$ . Gemakshalve is hier in fig. 12 die teekening toegevoegd. Naast elkander geplaatst ziet men daar ten eerste het vierde gedeelte  $acfh$  van het periodenparallelogram met de rechthoeks zijden  $ac = \omega$  en  $ah = \frac{\omega'}{i}$ , door twee symmetrie-assen  $bg$  en  $kd$  in vier stukken verdeeld, ten tweede in het negatieve  $\wp w$ -vlak de conforme afbeelding, eveneens in vier stukken gedeeld, welke door cirkelbogen met  $h$  en  $c$  tot middelpunten zijn begrensd. Daar in deze laatste figuur de grootheden,  $R_k$  en  $\psi_k$  dadelijk kunnen worden afgelezen, is het met een oogopslag te zien, welke waarden deze grootheden krijgen, indien het argument  $w$  zich beweegt op de zijden of op de symmetrie-assen van den rechthoek  $acfh$  in het  $w$ -vlak. Dit nu is bij het onderzoek naar de gedaante van het minimaaloppervlak van belang. Ten slotte mogen hier ook nog vermeld worden de uitdrukkingen, die voor  $R_k$  en  $\psi_k$  worden gevonden, als gesteld wordt  $w = u + iv$ . Men heeft alsdan

$$R_1 = \frac{[\wp(iv + \omega) - \wp u](\wp iv - e_1)}{\wp u - \wp iv},$$

<sup>1)</sup> HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, I, blz. 190.

<sup>2)</sup> SCHWARZ, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen*, blz. 74.



$$\psi_1 = 2 \operatorname{tg} \left[ \sqrt{\frac{(\phi u - e_2)(\phi u - e_3)(e_1 - \phi iv)}{(e_2 - \phi iv)(e_3 - \phi iv)(\phi u - e_1)}} \right];$$

door verwisseling van aanwijzers worden de overige grootheden afgeleid. Na deze uitwijding over de grootheden  $R_k$  en  $\psi_k$  kunnen wij terugkeeren tot de vergelijkingen (30), die nu na eene doelmatige keuze der integratieconstanten en der voorloopig nog willekeurige teekens overgaan in

$$\left. \begin{aligned} \mu \tau x &= \frac{\omega'}{i} + 2 \Re i w, \\ \mu \tau y &= \frac{1}{2 \sqrt{e_1 - e_3}} \log \frac{R_1 R_2}{R_3 (e_1 - e_2)}, \\ \mu \tau z &= \frac{1}{2 \sqrt{e_1 - e_3}} (\pi + \psi_1 - \psi_2 - \psi_3). \end{aligned} \right\} \dots\dots (31)$$

Daarbij zal dan  $w$  zich moeten bewegen binnen den rechthoek  $BACD$  van fig. 13, met de zijden  $BA = \omega$  en  $BD = \frac{\omega'}{2i}$ , om thans de helft van het minimaaloppervlak  $O$  te verkrijgen, welke voorgesteld <sup>1)</sup> is in fig. 14. Het middelpunt is verdwenen, maar het  $YZ$ -vlak is een vlak van symmetrie gebleven; daarom is de coördinaten-oorsprong  $M$  naar het midden van  $CD$  verlegd. Na de gegeven toelichting omtrent  $R_k$  en  $\psi_k$  is dit spoedig uit de analytische voorstelling van het oppervlak af te leiden. Tevens is het hier zeer eenvoudig om de belangrijkste afmetingen te bepalen. Uit (31) volgt vooreerst

$$b = 2 BD = \frac{2 \omega'}{i \mu \tau}, \quad h = AB = \frac{\pi}{\mu \tau \sqrt{e_1 - e_3}},$$

$$\frac{h}{b} = \frac{1}{2 \frac{\omega'}{i \pi}} \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{1}{(1 + 2q' + 2q'^4 + 2q'^9 + \dots)^2} < 1.$$

Nog steeds is  $h < b$ , om pas voor  $q' = 0$  gelijk aan  $b$  te worden. Zijn  $h$  en  $b$  vooraf bekend en is hunne verhouding  $\frac{h}{b}$  kleiner dan de eenheid, dan is er ééne oplossing voor  $q'$ , en dus ook altijd één minimaaloppervlak. Eene verdere berekening geeft

<sup>1)</sup> Deze en de volgende fig. zijn schematisch. Dikwijls is voor het af te beelden oppervlak geen *schijnbare omtrek* geteekend en zijn alleen eenige belangrijke vlakke doorsneden (bijv. met de coördinatenvlakken) aangegeven.

$$\operatorname{tg} 2\delta = \left(\frac{dz}{dy}\right)_{w=\frac{\omega'-\omega}{2}} = \sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_2}},$$

$$ML = \frac{1}{2\mu\tau\sqrt{e_1-e_3}} \log \frac{\sqrt{e_1-e_3} + \sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_1-e_3} - \sqrt{e_2-e_3}} = \frac{h}{\pi} \log \cot(45^\circ - \delta)$$

De vroeger gevonden uitdrukking (24) voor den kromtestraal  $R$  geeft thans voor  $\beta = 1$

$$R_L = \frac{1}{\mu\tau\sqrt{e_2-e_3}} = \frac{h}{\pi \sin 2\delta},$$

$$R_A = \frac{1}{\mu\tau\sqrt{e_1-e_2}} = \frac{h}{\pi \cos 2\delta}.$$

Eindelijk wordt de lengte  $b_1$  der vlakke kromtelijn  $CLD$  door de periode  $\omega$  uitgedrukt.

Voor het lijnelement  $dS$  geldt thans

$$\mu^2 \tau^2 dS^2 = 2dw dw_0 \left\{ 1 + \operatorname{mod} \frac{\wp 2w - e_3}{e_1 - e_3} + \operatorname{mod} \frac{\wp 2w - e_1}{e_1 - e_3} \right\}.$$

Op  $CLD$  is  $dw$  bestaanbaar,  $\operatorname{mod} (\wp 2w - e_3) = \wp 2w - e_3$ ,  $\operatorname{mod} (\wp 2w - e_1) = e_1 - \wp 2w$  en dus

$$\mu\tau dS = 2dw.$$

Integreerende van  $\frac{\omega'-\omega}{2}$  tot  $\frac{\omega''}{2}$ , komt er

$$\mu\tau b_1 = 2\omega.$$

Het hier besproken oppervlak kan nog verder ontaarden; ook  $\alpha$  kan tot de eenheid naderen, de breedte  $b$  wordt grooter en grooter, ten slotte blijven van elk der rechthoeken slechts twee aangrenzende zijden over, zoodat de  $Z$ -as naar  $AB$  verlegd moet worden. Daar voor  $\alpha = 1$ ,  $e_2 = e_3$ ,  $\tau^2(e_1 - e_3) = 4$ , volgt

$$\frac{\wp w - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{1}{\sin^2(w\sqrt{e_1 - e_3})}, \quad \frac{\wp w - e_1}{e_1 - e_3} = \cot^2(w\sqrt{e_1 - e_3}),$$

worden de vergelijkingen van het oppervlak met invoering van  $u = w\sqrt{e_1 - e_3}$  en aannemende  $\mu = \frac{1}{2}$ ,

$$x = 2\Re i u, \quad e^y = \operatorname{mod} \cot u, \quad 2z = \pi - 2 \arg. \sin 2u,$$

of ook

$$x = i(u - u_0), \quad e^{2y} = \cot u \cot u_0, \quad -e^{2iz} = \frac{\sin 2u}{\sin 2u_0}.$$

De eliminatie van  $u$  en  $u_0$  voert, zooals wel te verwachten was,

tot een der bekende oppervlakken van SCHERK <sup>1)</sup>, en wel komt hier te voorschijn het oppervlak met de vergelijking

$$\cos z = \frac{1}{4} (e^x - e^{-x}) (e^y - e^{-y}),$$

waarvan het vierde gedeelte, dat hier de ontaarding van fig. 14 voorstelt, in fig. 15 is afgebeeld.

13. *Tweede ontaarding*,  $\alpha = \infty$ . Om de tweede ontaarding te beschouwen, is in (4)  $\alpha = \infty$  te substitueeren, waardoor verkregen worden de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \pm \mu x &= \Re \int \frac{id\xi}{\sqrt{4(\xi-2\beta)(\xi+2)}} , \quad \pm \mu y = \Re \int \frac{d\xi}{\sqrt{4(\xi-2\beta)(\xi+2)}} , \\ \pm \mu z &= \Re \int \frac{id\xi}{\sqrt{4(\xi-2\beta)(\xi+2)(\xi-2)}} . \end{aligned}$$

Als te voren maakt men van eene eenigszins ongewone substitutie gebruik, en stelt

$$\begin{aligned} \xi - 2\beta &= \tau^2 (\wp 2w - e_1), \\ \xi - 2 &= \tau^2 (\wp 2w - e_2), \\ \xi + 2 &= \tau^2 (\wp 2w - e_3), \end{aligned}$$

wat tengevolge heeft

$$\begin{aligned} \tau^2 (e_1 - e_3) &= 2(\beta + 1), \\ \tau^2 (e_1 - e_2) &= 2(\beta - 1), \\ \tau^2 (e_2 - e_3) &= 4. \end{aligned}$$

Er komt nu eerst

$$\begin{aligned} \pm \mu \tau x &= 2\Re \int id2w \left[ \sqrt{\frac{\wp 2w - e_2}{e_2 - e_3}} \right], \quad \pm \mu \tau y = 2\Re \int d2w \left[ \sqrt{\frac{\wp 2w - e_3}{e_2 - e_3}} \right], \\ \pm \mu \tau z &= 2\Re \int id2w, \end{aligned}$$

en daarna, wanneer men integratieconstanten kiest, passende bij den gewenschten stand van het oppervlak ten opzichte van het coördinatenstelsel, en tegelijk daarmede in overeenstemming over de dubbele teekens beslist,

$$\left. \begin{aligned} \mu \tau x &= \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}} (\psi_1 + \psi_3 - \psi_2 + \pi), \\ \mu \tau y &= \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}} \log \frac{R_1 R_2}{R_3 (e_1 - e_2)}, \\ \mu \tau z &= \frac{2\omega'}{i} - 4\Re i w. \end{aligned} \right\} \dots \dots (32)$$

<sup>1)</sup> Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Begrenzung; Crelle's Journal, XIII, blz. 198.

Met weinig moeite overtuigt men zich er nu van, dat, indien  $w$  beperkt is tot den rechthoek  $A FEB$  in fig. 16 met de zijden  $AF = \frac{\omega}{2}$  en  $AB = \frac{\omega'}{i}$ , deze vergelijkingen het vierde gedeelte voorstellen van een oppervlak  $O$ , hetwelk in fig. 17 is afgebeeld. Van de rechthoekige grond- en bovenvlakken zijn telkens twee zijden in de richting van de  $Y$ -as verdwenen. De coördinatenoorsprong  $M$  is een middelpunt, de coördinatenvlakken zijn vlakken van symmetrie. De voornaamste afmetingen nagaande, vindt men vooreerst uit (32) voor de breedte  $b = 2BD$  en de hoogte  $h = AB$

$$\mu\tau b = \frac{2\pi}{\sqrt{e_2 - e_3}},$$

$$\mu\tau h = \frac{4\omega'}{i},$$

en dus

$$\frac{h}{b} = \frac{2\omega'}{i\pi} \sqrt{e_2 - e_3} = \frac{2kK'}{\pi} = (1 - 2q' + 2q'^4 - 2q'^9 + \dots)^2.$$

De vraag is hoeveel minimaaloppervlakken bij bepaalde waarden van  $h$  en  $b$  behooren.

Uit de vergelijking

$$\frac{d}{dc} (\sqrt{c} K') = \frac{1}{2c' \sqrt{c}} (K - E)$$

volgt, dat  $\frac{h}{b}$  eene met  $c$  of  $k$  aangroeiende functie is, die blijkbaar alle waarden tusschen nul en één aanneemt. Voor elke gegeven verhouding  $\frac{h}{b}$ , mits deze kleiner dan één is, zal men derhalve één minimaaloppervlak vinden.

De oplossing van  $q'$  en de bepaling der  $\varphi$ -functie zal geen groote moeilijkheden opleveren.

Verdere berekening levert nog voor den hellingshoek  $2\varepsilon$

$$tg 2\varepsilon = \left( \frac{dz}{dy} \right)_{w=\frac{\omega}{2} + \omega'} = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2}}$$

en voor de halve assen  $\rho_1 = MN$ ,  $\rho_2 = ML$  der middendoorsnede

$$\mu\tau\rho_1 = \frac{2}{\sqrt{e_2 - e_3}} b g t g \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2}}, \quad \rho_1 = \frac{2\varepsilon}{\pi} b,$$

$$\mu\tau\rho_2 = \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}} \log \frac{\sqrt{e_1 - e_3} + \sqrt{e_2 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_2 - e_3}}, \quad \rho_2 = \frac{b}{\pi} \log \cot (45^\circ - \varepsilon).$$

Eindelijk komt er voor de kromtestralen in  $L$  en  $N$  met behulp van (24)

$$R_L = \frac{2}{\mu\tau\sqrt{e_1 - e_3}} = \frac{b}{\pi} \sin 2\varepsilon, \quad R_N = \frac{2}{\mu\tau\sqrt{e_1 - e_2}} = \frac{b}{\pi} \operatorname{tg} 2\varepsilon.$$

Met behulp van de algemeene uitdrukking voor het lijnelement

$$\mu^2 \tau^2 dS^2 = 8 dw dw_0 \left\{ \operatorname{mod} \frac{\wp 2w - e_2}{e_2 - e_3} + \operatorname{mod} \frac{\wp 2w - e_3}{e_2 - e_3} - 1 \right\}$$

bepalen wij nog de lengten der kromtelijnen  $LN$  en  $ENF$ .

Op  $LN$  is  $dw = dw_0$ ,  $\operatorname{mod} (\wp 2w - e_2) = e_2 - \wp 2w$ ,  $\operatorname{mod} (\wp 2w - e_3) = \wp 2w - e_3$  en derhalve

$$\mu\tau dS = 4 dw,$$

wat geïntegreerd tusschen de grenzen  $-\frac{\omega'}{2}$  en  $\frac{\omega - \omega'}{2}$  geeft.

$$\mu\tau h_1 = 2\omega.$$

Daarentegen is op  $ENF$  de differentiaal  $dw$  imaginair,  $\operatorname{mod} (\wp 2w - e_2) = \wp 2w - e_2$ ,  $\operatorname{mod} (\wp 2w - e_3) = \wp 2w - e_3$  en dus

$$\mu\tau dS = 4i dw \sqrt{\frac{\wp 2w - e_3}{e_2 - e_3}},$$

integreert men hier tusschen  $\frac{\omega}{2}$  en  $\frac{\omega}{2} - \omega'$  dan komt er

$$\mu\tau l_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{e_2 - e_3}},$$

en dus de zeer bijzondere uitkomst  $l_1 = b$ .

Ook de hier beschouwde ontaarding kan nog tot nieuwe grensgevallen naderen. De hoogte  $h$  kan meer en meer aan de breedte  $b$  gelijk worden. Dan zal  $q'$ , en ook  $e_1 - e_2$ , oneindig klein worden,  $MN$  nadert tot de halve breedte  $BD$ , de halve as  $ML$  wordt oneindig, het middelpunt  $M$  gaat verloren in de richting der  $Y$ -as, en het is noodig  $L$  tot oorsprong te nemen. Men heeft  $\beta = 1$  en de  $\wp$ -functie ontaardt, thans wordt.

$$\frac{\wp w - e_1}{e_1 - e_3} = \frac{1}{\operatorname{Sh}^2(w\sqrt{e_1 - e_3})}, \quad \frac{\wp w - e_3}{e_1 - e_3} = \operatorname{Cth}^2(w\sqrt{e_1 - e_3}),$$

zoodat er voor  $\mu = 1$ , en met invoering van  $u = w\sqrt{e_1 - e_3}$ , komt

$$2x = \pi + 2 \arg \operatorname{Cth} u, \quad y = -\log \operatorname{mod} \operatorname{Sh} 2u, \quad 2z = \pi + 4 \Re i u,$$

of ook



$$-e^{2ix} = \frac{Cth u}{Cth u_0}, \quad e^{-2y} = Sh 2u Sh 2u_0, \quad z = \frac{\pi}{2} + i(u - u_0). \quad 1)$$

Eliminatie van  $u$  en  $u_0$  geeft

$$e^y = \frac{\cos x}{\cos z},$$

het tweede oppervlak van SCHERK <sup>2)</sup>, waarvan het gedeelte, dat nu fig. 17 vervangt, in fig. 18 is voorgesteld. Breedte en hoogte zijn elk gelijk aan  $2\pi$ , het onderscheid tusschen die afmetingen is geheel verdwenen. Op het oppervlak zijn twee nieuwe rechte lijnen gekomen; zij liggen in het raakvlak in  $L$ , en snijden  $AF$  en  $BE$  loodrecht.

Maar de fig. 17 kan ook nog anders vervormd worden. Laat  $\beta$  oneindig worden, en laat dus  $e_2$  tot  $e_3$  naderen. Daardoor verdwijnt in het oneindige al wat van de rechthoeken nog in fig. 17 aanwezig was. De nieuwe vergelijkingen van het oppervlak worden

$$\begin{aligned} \pm \mu x &= \Re \sqrt{\xi + 2}, & \pm \mu y &= \Re i \sqrt{\xi - 2}, \\ \pm \mu z &= \Re \log(\xi + \sqrt{\xi^2 - 4}), \end{aligned}$$

en dit stelt blijkbaar eene catenoïde voor met de vergelijking

$$x^2 + y^2 = (\rho^{\frac{5}{2}} + e^{-\frac{5}{2}})^2.$$

14. *De toegevoegde oppervlakken van Bonnet.* Het is bekend, dat men uit elk minimaaloppervlak door buiging eene geheele groep van minimaaloppervlakken kan afleiden, die men de „geassocieerde” oppervlakken noemt. In die groep is door BONNET <sup>3)</sup> er een aangewezen, het zoogenaamde toegevoegde oppervlak, dat op zeer merkwaardige wijze met het oorspronkelijke oppervlak samenhangt.

Namelijk zijn voor beide oppervlakken in toegevoegde punten de raakvlakken evenwijdig, terwijl twee overeenkomstige raaklijnen rechte hoeken met elkaar maken.

Uit de vergelijkingen (5), (8), (11)

$$\begin{aligned} \mu \tau_1 x &= \omega_1 - \Re w_1, \\ \mu \tau_2 y &= \omega_2 - \Re w_2, \\ \mu \tau z &= \Re w - \omega, \end{aligned}$$

die gelden voor het oppervlak  $\Omega$  uit fig. 1, leidt men onmiddellijk, door den factor  $i$  achter het teeken  $\Re$  te plaatsen, de vergelijkingen

<sup>1)</sup> Met  $Sh$  en  $Cth$  zijn de hyperbolische functies bedoeld.

<sup>2)</sup> t. a. p. blz. 196.

<sup>3)</sup> Note sur la théorie générale des surfaces, Comptes rendus de l'Ac. d. Sc., XXXVII, blz. 529.

van het aan  $\Omega$  toegevoegde oppervlak  $\Omega'$  af. Laatstgenoemd oppervlak zal dus voorgesteld worden door

$$\left. \begin{aligned} \mu\tau_1 x &= -i\omega_1' - \Re iw_1, \\ \mu\tau_2 y &= i\omega_2' - \Re iw_2, \\ \mu\tau z &= \Re iw - \frac{\omega'i}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

Daarbij zijn andere integratieconstanten ingevoerd, dat wil zeggen men heeft aan  $\Omega'$  eene verschuiving gegeven, om het oppervlak in een regelmatig stand ten opzichte van het assenstelsel te brengen. Om zich een denkbeeld te maken van de algemeene gedaante van  $\Omega'$ , heeft men te bedenken, dat als  $\Omega$  eenig vlak loodrecht snijdt, het oppervlak  $\Omega'$  noodzakelijk eene rechte lijn bevat, die loodrecht op dit vlak is gericht, en omgekeerd. Nu sneed  $\Omega$  volgens  $CLD$ ,  $LN$ ,  $ENF$  de coördinatenvlakken loodrecht,  $\Omega'$  bevat dus drie gelijknamige rechte lijnen, evenwijdig aan de coördinatenassen. Daarentegen bevatte  $\Omega$  de lijnen  $BD$  en  $AC$  evenwijdig aan de  $X$ -as,  $BE$  en  $AF$  evenwijdig aan de  $Y$ -as. Het nieuwe oppervlak doorsnijdt dus volgens gelijknamige kromtelijnen loodrecht twee vlakken evenwijdig aan  $MYZ$ , en twee vlakken evenwijdig aan  $MXZ$ . Dit alles wordt door substitutie in de vergelijkingen (33) bevestigd. Men heeft weer de argumenten  $w_1$ ,  $w_2$  en  $w$  te beperken tot de rechthoeken van fig. 6, 7 en 8, die weer als conforme afbeeldingen van  $\Omega'$  dienst doen. Eenige substituties zullen voldoende zijn, om in te zien dat  $\Omega'$  ongeveer gevormd is, zooals fig. 19 aangeeft. Het midden van  $NL$  is nu de oorsprong, de ribben van het parallelopipedum, hetwelk men om  $\Omega'$  kan beschrijven, loopen evenwijdig aan de coördinatenassen.

De afmetingen van dit parallelopipedum worden aangegeven door de lengten der lijnen  $CLD$ ,  $ENF$ ,  $NL$ , welke lijnen door de buiging niet van lengte zijn veranderd. Voor breedte, lengte en hoogte volgt dus uit het voorafgaande, (20), (21), (22)

$$\mu\tau_1 b_1 = \frac{2\omega_1'}{i} \quad , \quad \mu\tau_2 l_1 = \frac{2\omega_2'}{i} \quad , \quad \mu\tau h_1 = \frac{\omega'}{i}.$$

De lengten der kromtelijnen  $BD = AC$ ,  $BE = AF$  worden blijkbaar door  $b$  en  $l$  aangegeven. De afmeting  $h$  daarentegen uit fig. 1 heeft voor fig. 19 geen eenvoudige beteekenis. Nauw verwant met het vraagstuk, om door twee evenwijdig geplaatste rechthoeken een minimaaloppervlak te brengen, is dus het volgende:

Indien een rechthoekig parallelopipedum met de hoogte  $h_1$ , de lengte  $l_1$  en de breedte  $b_1$  gegeven is, vraagt men een minimaaloppervlak te construeren, dat de hoogte-as van het parallelopipedum

bevat, de vier opstaande zijvlakken loodrecht snijdt, en verder grond- en bovenvlak ontmoet volgens twee lijnen, evenwijdig aan de twee opvolgende ribben van het grondvlak.

Ieder geval van het oorspronkelijke vraagstuk, komt met eene oplossing van het tweede overeen. Gebruik makende van de notatie van JACOBI, heeft men te behandelen de vergelijkingen

$$\frac{b_1}{2K_1'} = \frac{b_1}{2K_2'} = \frac{h_1}{K'K''} \dots \dots \dots (34)$$

$$k = \frac{k_1' k_2'}{k_1 k_2}.$$

Hier is geen grens gesteld voor de hoogte  $h_1$  van het parallelipedum; bij elk stel waarden van  $b_1$ ,  $l_1$ ,  $h_1$  is eene oplossing mogelijk.

Wordt  $b = l$  in fig. 1, dan is er in fig. 1 in het vlak  $x = y$  nog eene vlakke kromtelijn  $AB$ , in fig. 19 ontstaat dus voor  $b_1 = l_1$  eene nieuwe rechte lijn  $AB$ , loodrecht op het genoemde vlak. De punten  $A$  en  $B$  komen dan, zooals de symmetrie medebrengt, op de halve hoogte van het parallelipedum. In fig. 19 volgt dan onmiddellijk voor de lengte van  $AB$  de waarde  $b_1 \sqrt{2}$ ; ook in fig. 1 is dus voor  $b = l$  de verhouding der kromtelijnen  $AB$  en  $CLD$  eveneens gelijk aan  $\sqrt{2}$ , eene uitkomst die men rechtstreeks niet zoo gemakkelijk vindt.

Als zeer bijzonder geval, waarin  $b = l$ , vermelden wij nog het oppervlak in fig. 20 afgebeeld, toegevoegd aan het oppervlak  $\Omega$ , waarvoor  $h = \frac{b}{\sqrt{2}}$  is, en dat de rechte lijnen  $EC$  en  $DF$ , benevens de drie vlakke kromtelijnen  $AB$ ,  $DE$  en  $CF$  bevat. In fig. 20 zal men dan aantreffen de vlakke kromtelijnen  $EC$  en  $FD$ , en verder de rechte lijnen  $AB$ ,  $DE$  en  $CF$ . Daar in de uitzonderingspunten  $C$ ,  $D$ ,  $E$  en  $F$  telkens de drie asymptotische lijnen hoeken van  $60^\circ$  met elkander maken, is  $ED = CF = CF = CD$  en dus noodzakelijk  $h_1 = \frac{b_1}{\sqrt{2}}$ . Het aldus ontstane oppervlak kan men gespannen denken tusschen twee paar overstaande ribben van een regelmatig viervlak. In dien vorm is het door SCHWARZ <sup>1)</sup> beschouwd. Dat de hier geldende formules voor  $\alpha = \beta = 2$  inderdaad geven  $h_1 = \frac{b_1}{\sqrt{2}}$

<sup>1)</sup> Ueber die Minimalfläche, deren Begrenzung als ein von vier Kanten eines regulären Tetraeders gebildetes räumliches Vierseit gegeben ist; Ges. W., I, blz. 1.

is spoedig in te zien. Men heeft toch

$$k = \frac{1}{3}, k' = \sqrt{\frac{8}{9}}, k_1' = k_2' = \frac{1}{2}, k_1 = k_2 = \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

en dus 
$$k_1' = \frac{1-k}{1+k},$$

dientengevolge 
$$K' = (1+k_1') K_1' = \frac{3}{2} K_1',$$

en dan geeft (34) 
$$h_1 = \frac{b_1}{\sqrt{2}}.$$

Ten slotte moge in het kort nog worden nagegaan, welke oppervlakken toegevoegd zijn aan de besproken ontandingen. De vergelijkingen (31) van het oppervlak, voorgesteld in fig. 14, waarbij  $\beta = 1$  is, gaan door de invoeging van  $i$  en na eenige wijziging der integratieconstanten, waardoor de coördinatenoorsprong in  $L$  wordt verlegd, over in

$$\left. \begin{aligned} \mu\tau x &= -2 \Re w, \\ \mu\tau y &= \frac{1}{2\sqrt{e_1-e_3}} (\pi + \Psi_3 - \Psi_1 - \Psi_2), \\ \mu\tau z &= \frac{1}{2\sqrt{e_1-e_3}} \log \frac{R_2 R_3}{R_1 (e_2 - e_3)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

waarbij het argument  $w$  zich beweegt binnen den rechthoek van fig. 13. Men ziet in fig. 21 een oppervlak ontstaan, dat slechts weinig van fig. 19 verschilt. De hoogte  $h_1$  is oneindig geworden, de punten  $F$ ,  $N$ ,  $E$  zijn verdwenen in de richting der  $Z$ -as. Eene oppervlakkige vergelijking met fig. 14 leert, dat werkelijk voldaan is aan de eigenschappen van overeenkomstige raakvlakken en raaklijnen op toegevoegde oppervlakken. De afmetingen volgen onmiddellijk uit vorige berekeningen; men heeft

$$\mu\tau b_1 = 2\omega, \quad \mu\tau l_1 = \mu\tau h = \frac{\pi}{\sqrt{e_1 - e_3}}.$$

Ook hier is de constructie van het oppervlak uit gegeven afmetingen  $b_1$  en  $l_1$  vrij gemakkelijk uitvoerbaar. Zij levert steeds ééne oplossing.

Wordt nu ook  $\alpha = 1$ , gaat dus fig. 14 over in fig. 15, dan verdwijnen ook de punten  $C$ ,  $L$ ,  $D$  in de richting van de  $Z$ -as. Het oppervlak van fig. 21 gaat over in een oppervlak, dat de zijvlakken  $x = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $y = \pm \frac{\pi}{2}$  van een prisma met vierkante doorsnede loodrecht snijdt, de as van het prisma benevens de lijn  $z = 0$ ,  $x = -y$  bevat en de vlakken  $x = 0$  en  $y = 0$  asymptotisch nadert. Dit oppervlak, dat nu toegevoegd is aan het oppervlak van SCHERK



$$\cos z = \frac{1}{4} (e^x - e^{-x}) (e^y - e^{-y}),$$

is niet anders dan het tweede oppervlak van SCHERK

$$e^{-z} = -\frac{\sin x}{\sin y},$$

voorgesteld in fig. 18. Echter komt hier dit oppervlak in een anderen stand te voorschijn, en moet ook een ander stuk hier worden beschouwd, dan in fig. 18 is weergegeven.

Meer regelmatig is de figuur, die men door buiging uit fig. 17 afleidt. De invoering van  $i$  in (32) geeft na toevoeging van doelmatige integratieconstanten

$$\left. \begin{aligned} \mu \tau x &= -\frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}} \log \frac{R_1 R_3}{R_2 (e_1 - e_3)}, \\ \mu \tau y &= \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}} (\psi_1 + \psi_2 - \psi_3 + \pi), \\ \mu \tau z &= 4 \Re i w; \end{aligned} \right\} \dots \dots (36)$$

het argument  $w$  is daarbij steeds gelegen binnen den rechthoek van fig. 16.

Door verschillende argumentwaarden in (36) te substitueeren, overtuigt men zich spoedig, dat een oppervlak ontstaat, ongeveer als in fig. 22 is geteekend. Het bevat, zooals verwacht kon worden, de drie rechte lijnen  $FNE$ ,  $NL$  en  $CLD$ , benevens twee vlakke kromtelijnen  $EB$  en  $AC$ . Het ontstaat uit fig. 19 door twee zijvlakken van het parallelopipedum loodrecht op de  $X$ -as tot in het oneindige te verschuiven. De punten  $A$  en  $B$  dalen daarbij voortdurend, het oppervlak gaat het grondvlak asymptotisch naderen in de richting der  $X$ -as. Wat de afmetingen  $l_1 = FE$ ,  $h_1 = LN$  betreft, is weder

$$\mu \tau l_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{e_2 - e_3}}, \quad \mu \tau h_1 = 2\omega.$$

Na het buigen doet de fig. 22 zien, dat  $EF = 2BD$ , dit geldt dus ook van dezelfde lijnen in fig. 17, wat daar niet dadelijk in het oog viel. Waar fig. 17 nu verder kon ontaarden in fig. 18, een der oppervlakken van SCHERK, daar zal fig. 22 tegelijk in het andere oppervlak van SCHERK overgaan, en als het oppervlak van fig. 17 nadert tot eene catenoïde, zal terzelfdertijd het oppervlak van fig. 22 meer en meer op een schroefvlak met verticale as gaan gelijken; men behoeft slechts de vlakken  $y = \pm \frac{1}{2} l$ , die het oppervlak loodrecht moet ontmoeten, meer en meer in de richting der  $Y$ -as van elkander te verwijderen.



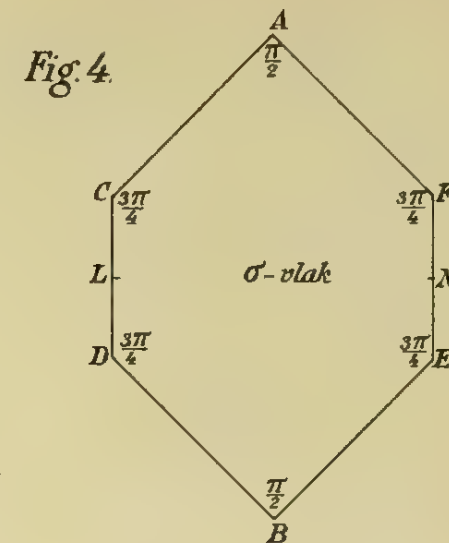
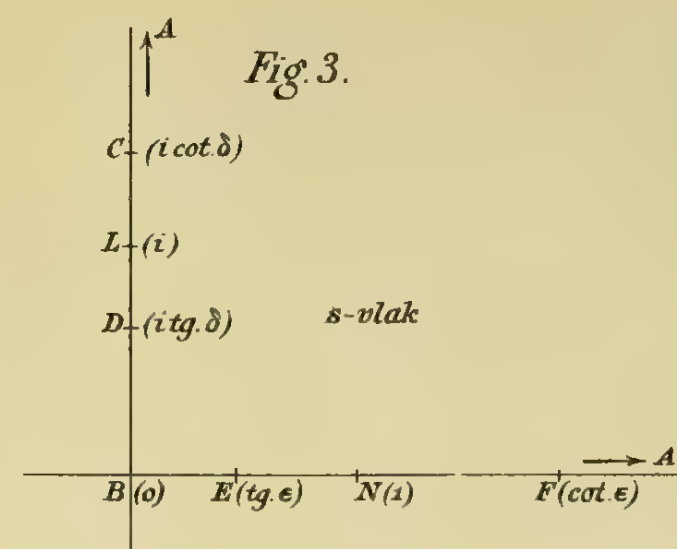
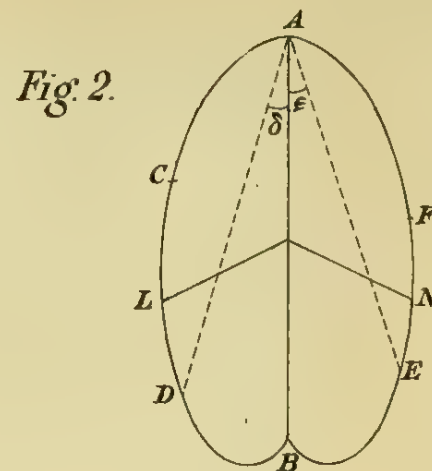
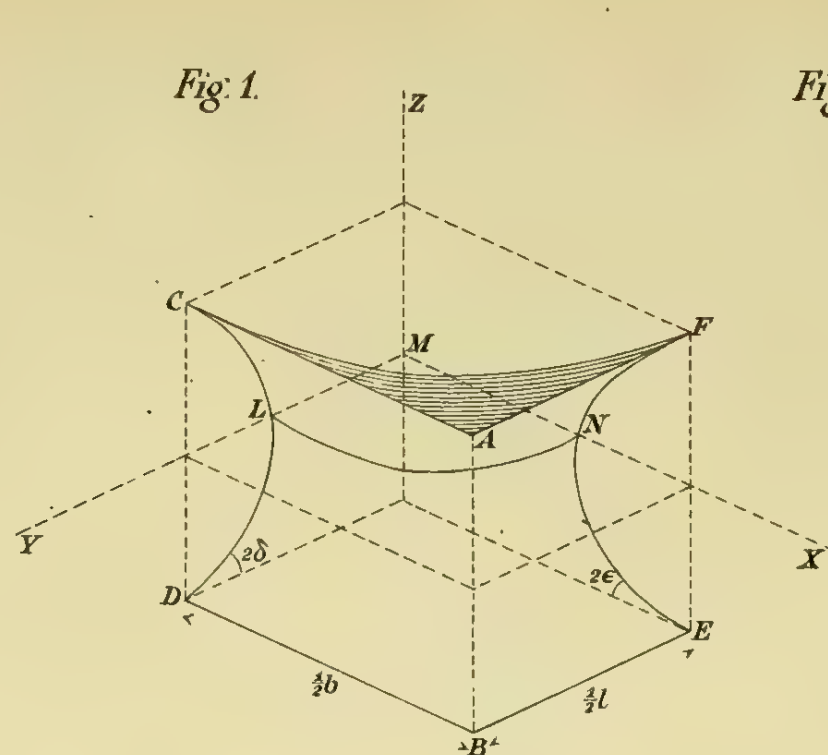


Fig. 5.  
ξ-vlak

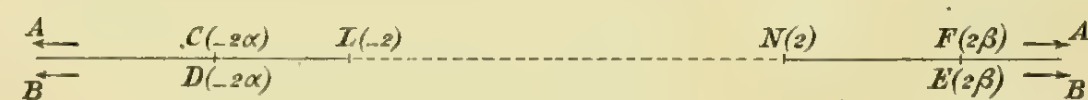


Fig. 6.

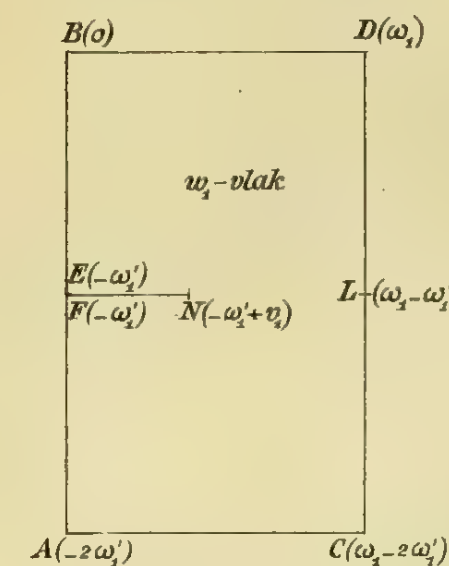


Fig. 7.

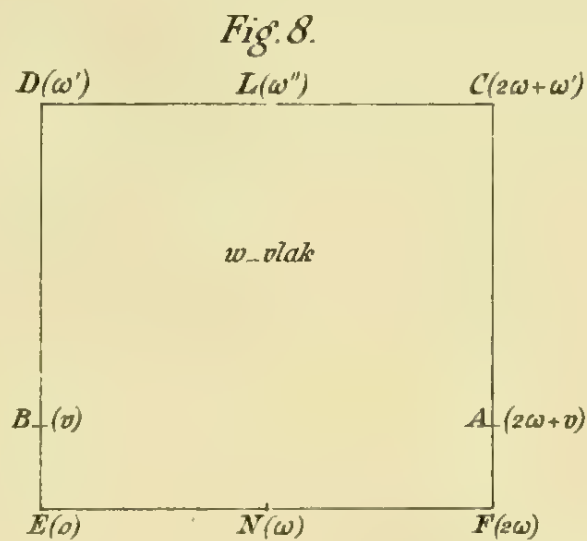
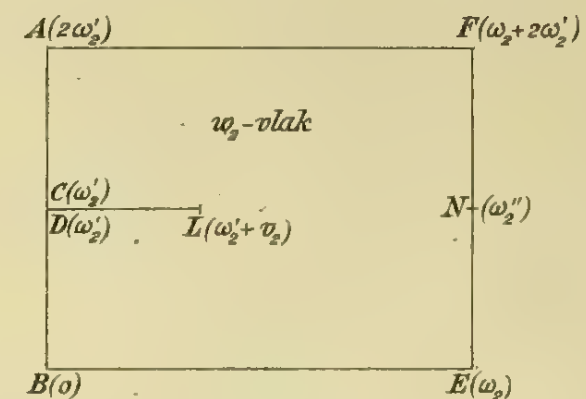


Fig. 9.

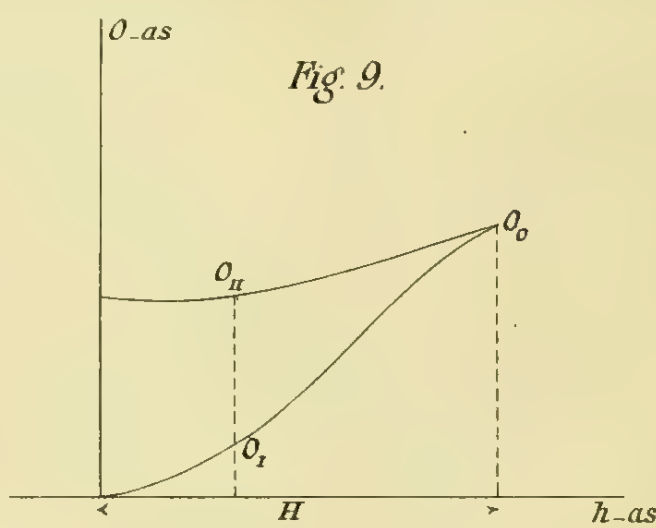


Fig. 10.

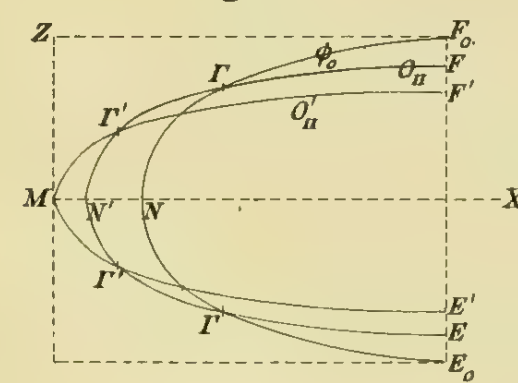


Fig. 11.

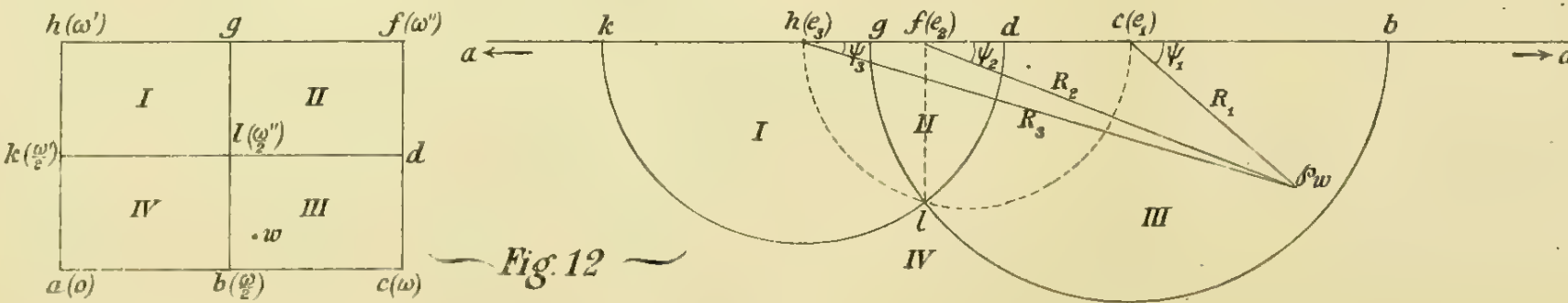
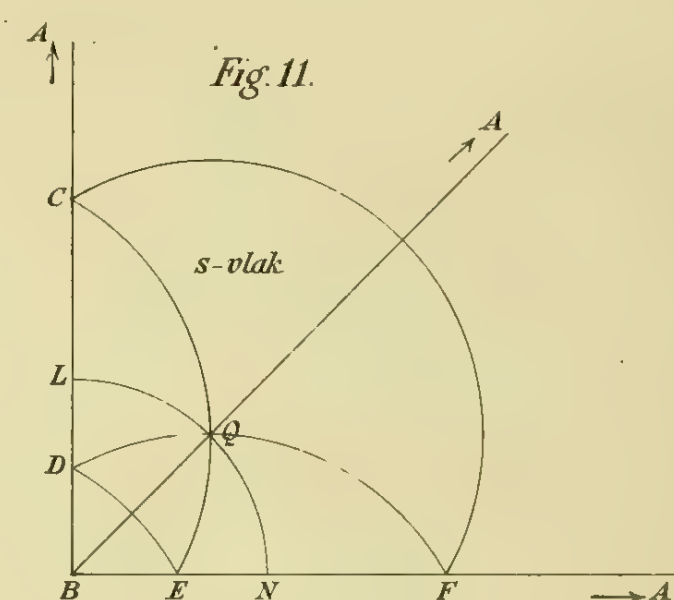
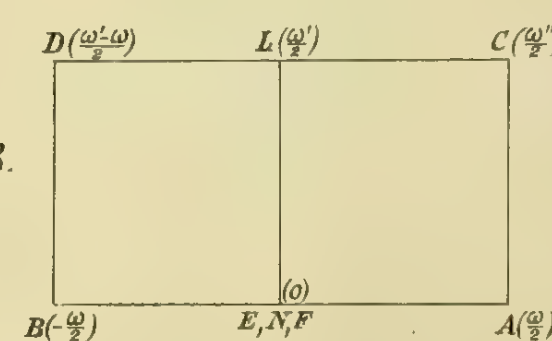
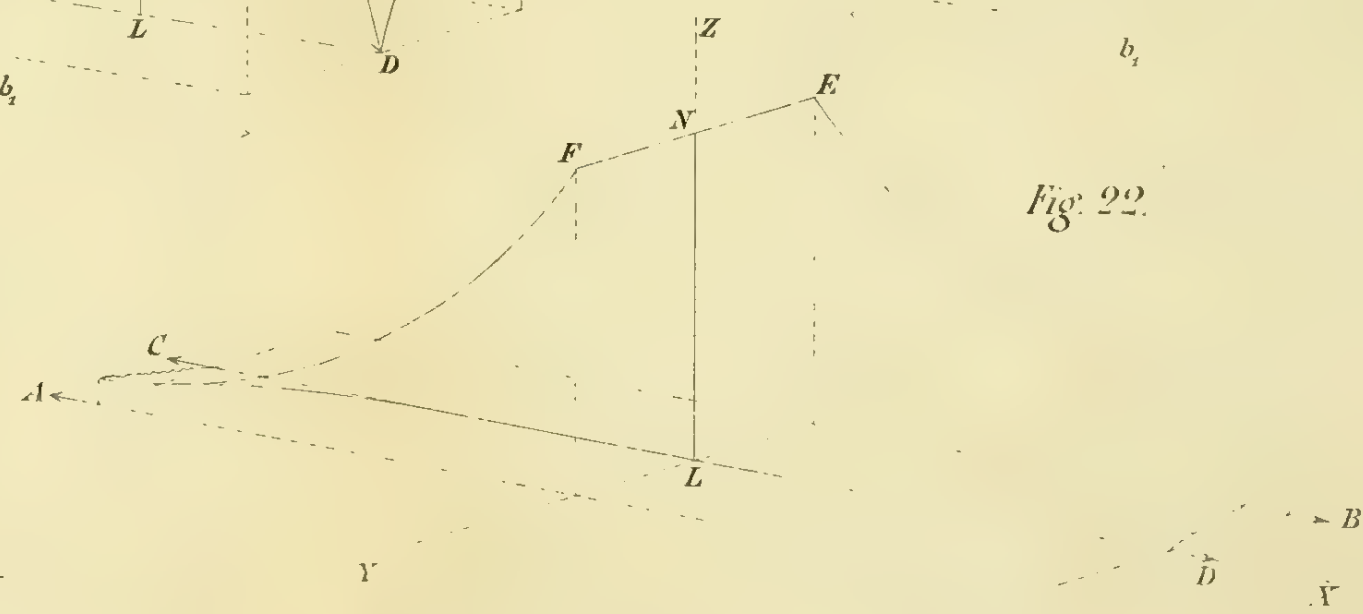
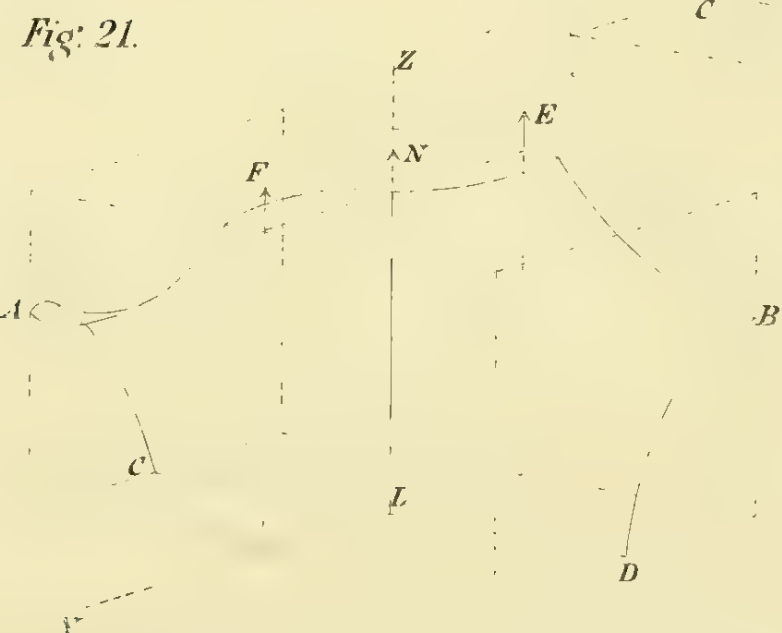
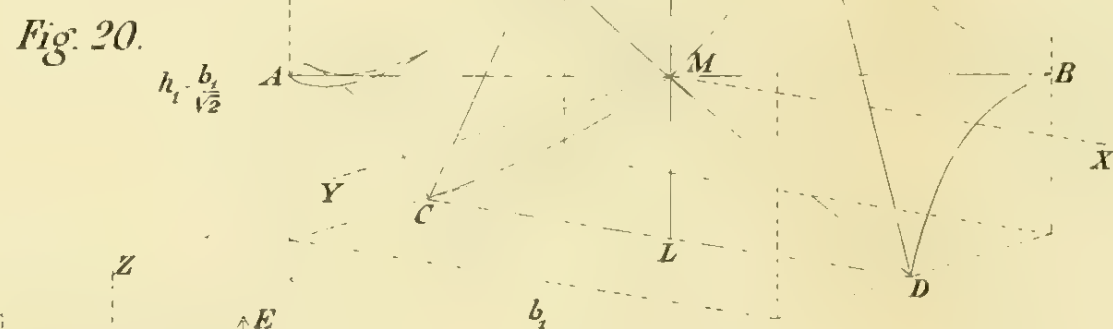
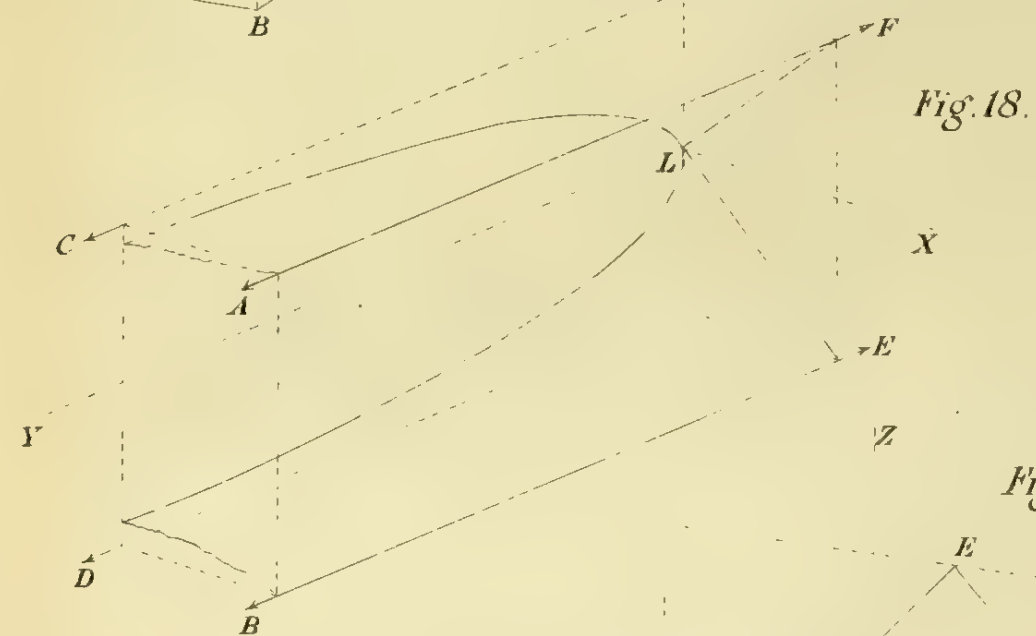
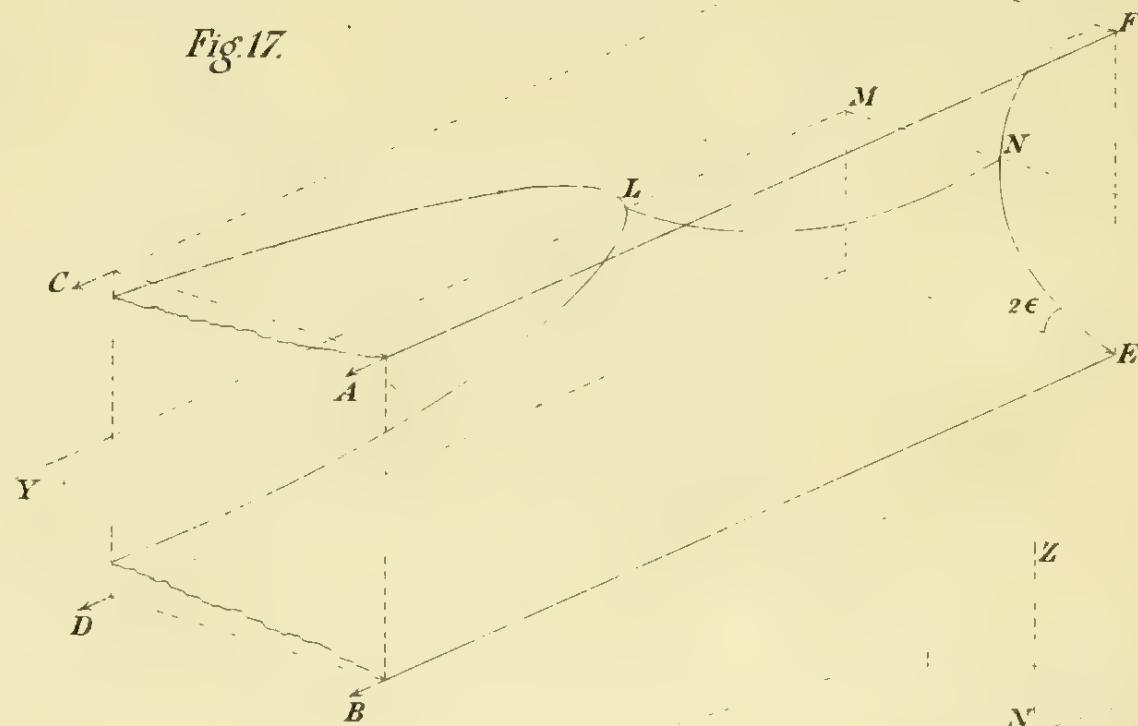
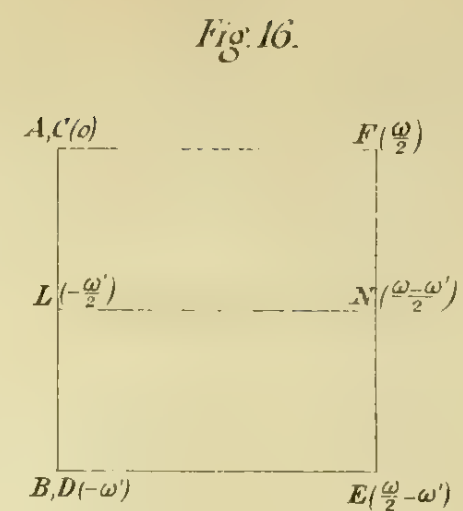
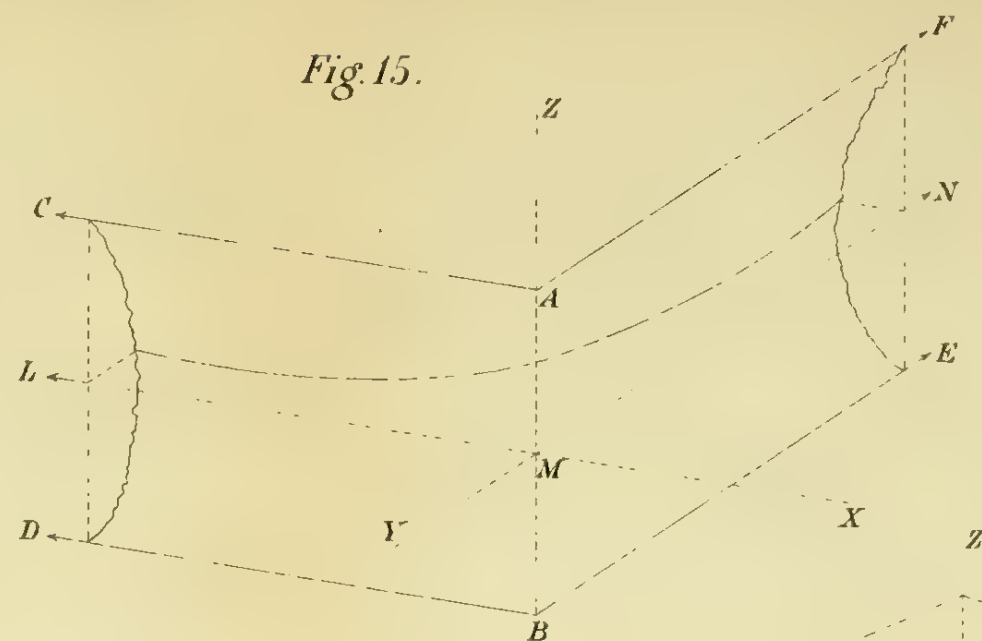
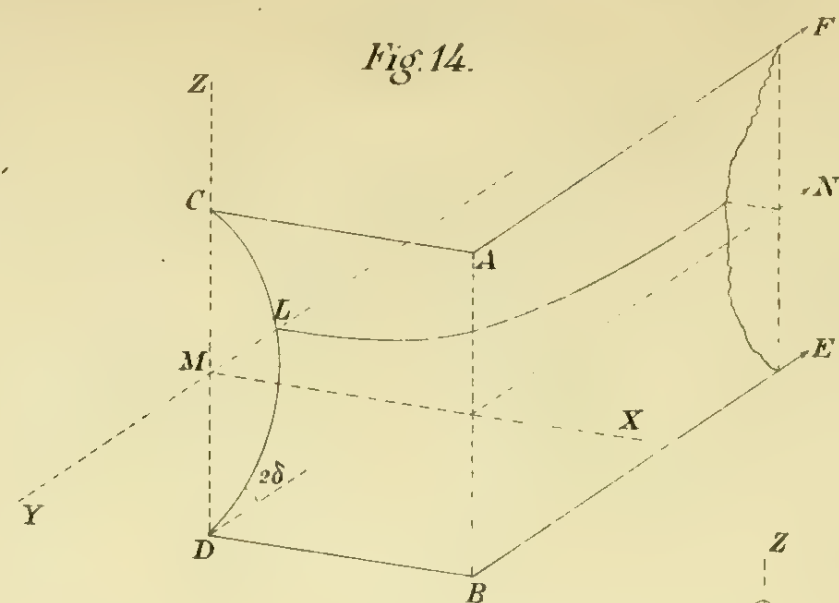


Fig. 13.

































GEDRUKT BIJ  
—° JOH. ENSCHEDÉ EN ZONEN °—  
HAARLEM